Hangszerek fizikája zárthelyi dolgozat

2012. március 27. 12.15-14.00

1. feladat: (10 pont)

Egy húrt viszkózus csillapítás és a nemideális lezárás csillapító hatása egyaránt terhel. A viszkózus csillapításból származó időállandó $\tau_v = 2$ s, a lezárásból származó időállandó pedig $\tau_l = 10$ s. A kezdeti elmozduláshoz képest mikorra csökken a húr amplitúdója 30 dB-lel?

Az eredő időállandó a két időállandó replusza: $\tau = \tau_v \times \tau_l = 5/3$ s. Az exponenciális csökkenés szerint $A(t) = A_0 e^{-t/\tau}$, ahonnan $t = \tau \cdot \ln\left(\frac{A_0}{A(t)}\right) = \tau \cdot \frac{20}{20 \log e} \log\left(\frac{A_0}{A(t)}\right) = \frac{30\tau}{20 \log e} = \frac{5}{2 \log e}$ s $\approx 5{,}76$ s.

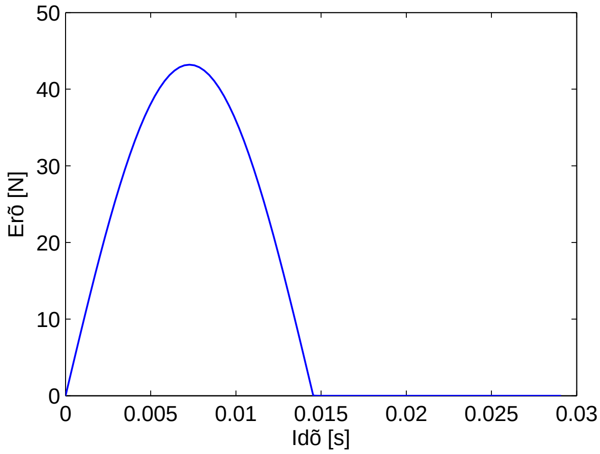
2. feladat: (10 pont)

Mekkora a csillapítatlan húr inharmonicitási állandója, ha az alaphang és az első felhang közti eltérés az ideális 1200 cent helyett 1215 cent?

$$\sqrt{\frac{1+4B}{1+B}} = 2^{15/1200} \rightarrow \frac{1+4B}{1+B} = 2^{30/1200} \rightarrow B = \frac{2^{30/1200}-1}{4-2^{30/1200}} = 5{,}86 \cdot 10^{-3}$$

3. feladat: (20 pont)

Az akusztikai laborban fellelhető eszközökkel szeretnénk megmérni egy mindkét végén befogott húrban ható feszítő erőt. A mérés során a húrra annak tömegénél lényegesen nagyobb, $M = 200$ g tömegű impulzuskalapácsot ejtünk $v_0 = 5$ m/ s sebességgel, és mérjük a kalapácsra ható erőt. Ha az $L = 40$ cm hosszú a húrt a hossz negyedelőpontjában ütjük, az alábbi görbét kapjuk:



a) Mekkora a húrban ható feszítő erő?

A mért szinusz periódusideje $T = 2 \cdot 0{,}014$ s. A szinusz frekvenciája $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{K/M}$, ahol K a húr ekvivalens merevsége. Innen $K = (M\omega_0)^2$. A (súlytalan) húr ekvivalens K merevsége számítható az $S/(L_1 \times L_2) = S/(L \cdot (0.25 \times 0.75))$ kifejezéssel, ahol S a feszítő erő, L_1 és L_2 pedig a tömeg két oldalán levő húrhosszak. Innen $S = KL \cdot (0.25 \times 0.75) = 755$ N.

b) Rajzolja fel, hogy milyen görbét kapnánk, ha a húrt a negyedelőpont helyett a felezőpontban ütnénk a nagy tömegű kalapáccsal!

Ha a húrt a felezőpontban ütjük, akkor annak ekvivalens merevsége $K = 4S/L$, mivel ekkor $L_1 \times L_2 = L/4$. Mivel ez az érték kisebb, mint az (a) pont szerinti merevség, a félszinusz szélesebb és laposabb lesz.

c) Az előbb hazudtunk, valójában nem is ilyen görbét kaptunk. Javítsa ki az eredeti ábrát úgy, hogy az valós mérési viszonyokat tükrözzön!

Sidney Operaház

d) A kalapács elemelkedése után a húr a kis a hangon szólal meg. Mekkora a húr teljes tömege?

A sajátfrekvencia $\omega_1 = 2\pi 220 \text{ rad/s} = \sqrt{\frac{S}{\mu}}\pi/L$, ahonnan $\mu = \frac{S}{(2L220\text{s}^{-1})^2} \approx 24\text{g/m}$, ahonnan $m_{\text{hr}} = \mu L \approx 9{,}8 \text{ g}$.

4. feladat: (20 pont)

Egy hatkórusos, G-c-f-a-d′-g′ hangolású reneszánsz lantot úgy hangolunk fel, hogy szomszédos húrjai tiszta kvart illetve nagyterc hangközöket adjanak ki.

a) Mekkora a G és g′ húrok alaphangjai közti frekvenciaarány?

$(4/3) \cdot (4/3) \cdot (5/4) \cdot (4/3) \cdot (4/3) = 320/81.$

b) Mekkora a tiszta két oktávtól való eltérés centben?

$-21{,}5$ cent, püthagoraszi komma.

5. feladat: (20 pont)

Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások!

a) Ha egy rezgő rendszernek módusalakjait $\psi_n(x)$-szel jelöljük, akkor tetszőleges gerjesztés esetére a gerjesztett válasz felírható $u(x,t) = \sum_n \psi_n(x)\alpha_n(t)$ alakban.

Igaz

b) Ha egy rezgő rendszernek $\psi_n(x)$ és ω_n összetartozó módusalakja és sajátfrekvenciája, akkor a gerjesztett válaszban a $\psi_n(x)$ módusalak mindig ω_n körfrekvenciájú harmonikus rezgést végez.

Nem igaz, csak szabadrezgésre.

c) Ha egy xilofonrudat hosszirányban megfeszítünk, akkor a felhangok távolodnak egymástól.

Hamis.

A rúdban a diszperzió miatt a felharmonikus frekvenciák a módusszám négyetével arányosak. Ha meghúzzuk a rudat, egyre inkább húrhoz fog hasonlítani, ahol a sajátfrekvenciák a módusszámmal arányosak. Ennek értelmében a felhangok (zenei értelemben) közelednek egymáshoz.

6. feladat: (20 pont)

Egy ideális, mindkét végén befogott, L hosszú húr a végétől x_0 távolságban megkopott. A kopás hatására a húr keresztmetszetének felülete Δx hosszúságú szakaszon az eredeti keresztmetszeti felület 90%-ára csökkent. Feltételezzük, hogy a keresztmetszet csökkenése a húrszegmens tömegének arányos csökkenésével jár. Hogyan változott a húr alap- és felhangjainak frekvenciája? A megoldás során feltételezze, hogy Δx a húr hosszához képest igen kicsi. Vonalvezető:

1. Alkalmazza a perturbációmódszert a kissé megváltozott operátor sajátértékeinek számításához

   (a) Írja fel a harmonikus, gerjesztésmentes húregyenletet sajátértékfeladat formájában, a sajátfrekvencia négyzetére hászáljon paramétert
   $\mathcal{A}\{u\} = -\frac{S}{\mu}u'' = \omega^2 u = \gamma u$

   (b) Vezessen be ε dimenziótlan paramétert a kopási mélységre, írja fel az inhomogén húr operátorát az ε paraméter által szabályozott mértékben megkopott esetre
   $\mu(x) = \mu_0\left[1 + \varepsilon\delta(x - x_0)\Delta x\right]$
   $\mathcal{A}\{u\} = -\frac{S}{\mu_0[1+\varepsilon\delta(x-x_0)\Delta x]}u''$

(c) Végezze el az operátor Taylor-sorba való fejtését, használja ki, hogy

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \cdots \tag{1}$$

$\mathcal{A}\{u\} \approx -\frac{S}{\mu_0}u'' + \varepsilon\frac{S\delta(x-x_0)\Delta x}{\mu_0}u''$
ahonnan már a perturbált operátor sajátértékének változásáról tanultak alapján adódik, hogy
$\delta\gamma_n = \frac{\langle\psi_n, \delta\mathcal{A}\{\psi_n\}\rangle}{\|\psi_n\|^2} = \frac{2}{L}\frac{S\Delta x}{\mu_0}\int_{x=0}^{L}\psi_n(x)\delta(x-x_0)\psi_n(x)\mathrm{d}x = \frac{2\Delta x}{L}c^2\psi_n^2(x_0)$, vagyis minden módus sajátfrekvenciája növekszik, méghozzá a módusalak x_0-beli elmozdulásnégyzetével arányos mértékben.