# Gömbhullámok

A síkhullámok leírásának az alapját képező



egyenlet azt mondja ki, hogy a hangnyomás térbeli és időbeli második deriváltja – egy konstanstól eltekintve – egyenlő, ha csak egy irányú térbeli deriváltat (azaz csak egy irányba haladó hullámot) tekintünk. Ha ezt az összefüggést ki akarjuk terjeszteni a tér három irányára, akkor célszerű az egy dimenziós esetre vonatkozó térbeli derivált fogalmát feleleveníti, hogy azt három dimenzióra is általánosíthassuk.

Mit is jelent az egyváltozós függvény deriváltja? Azt mondja meg, hogy mi történik egy tetszőleges *f*(*x*) függvény értékével, ha a független változó értéke kis mértékben megváltozik:



Ha most egy irány helyett három dimenzióba kilépve vizsgáljuk a függvényt, akkor a függő változónak nem csak megváltozott értékét, hanem a változás térbeli irányát is tekintetbe vesszük. Descartes-koordináták esetén ez azt jelenti, hogy  helyett a

1. 

kifejezés adja meg a derivált értékét, ami most is ugyanazt jelenti, mint egy változós esetben: a függő változó változásának mértékét és a legnagyobb változás irányát.

*z*



*y*



*x*

1.1. ábra

A második derivált számításához az kifejezést kétszer kell alkalmaznunk:



A térbeli hangterjedés vizsgálata már egészen egyszerű esetekben is valamilyen véges méretű forrásból kiinduló hullámjelenség vizsgálatát igényli, amihez a derékszögű koordinátarendszer helyett alkalmasabbak a gömbkoordináták. Ezért meg kell néznünk, hogyan módosul a térbeli derivált leírása gömbkoordinátákban. A kétféle koordinátarendszer közötti összefüggést az mutatja.

Általános gömbkoordináták esetében a nablával jelölt térbeli operátor ezekkel a jelölésekkel



ami a három gömbi koordináta szerinti változások mindegyikét figyelembe veszi. Jelenlegi tárgyalásunk szempontjából bőségesen elegendő, ha csak  irányú változásokat vesszük figyelembe (azaz feltételezzük, hogy a hullámok iránytól független módon terjednek és jellemzőik csak az origótól mért távolságtól függenek), ezért csak az *r*-től függő tagot alkalmazzuk. A matematika vektorszámítási összefüggései szerint ezzel



A hullámegyenlet gömbi koordinátákban felírt megfelelője így



Megmutatjuk, hogy ez átírható a



alakba, ugyanis



Ha az kifejezés zárójeles részét most behelyettesítjük első két tagja helyébe, akkor a hullámegyenlet a



alakot ölti. Az egyenletet *r*-rel szorozva az első tagból eltűnik, a második tagba viszont a deriválás mögé bevihető, mert a távolság az időtől független:



Ez az egyenlet már könnyen megoldható, ha az (*rp*) szorzatot új változónak tekintjük. Arra ugyanis most is igaz, hogy bármely függvény megoldása az egyenletnek, amelyben a független változók „idő- mínusz térbeli változó per hangsebesség” kombinációban szerepelnek:



amiből következik, hogy

 ,

és harmonikus esetben – az 1. fejezetben látottak szerint – a



megoldásra vezet. Ez az összefüggés az ideális, csak az origótól mért távolság függvényében változó, időben harmonikus gömbhullámok hangnyomásának idő- és térbeli változását írja le, amelyben a fő eltérés az ideális síkhullámokhoz képest a hullám amplitúdójának távolságfüggése: a hullám amplitúdója nem állandó többé, hanem az origótól való távolsággal fordítottan arányos.

A részecskesebesség gömbhullámú esetben is az Euler-egyenletből nyerhető, miközben a hangnyomásnak térbeli deriváltját itt is *r* függvényében képezzük:



A részecskesebesség tehát immár nincs fázisban a hangnyomással, hanem a *kr* mennyiség 1-hez viszonyított értékétől függően kisebb vagy nagyobb fáziseltérést mutat, és amplitúdója is *kr*-től függ. Könnyű belátni, hogy ez a szorzat frekvenciafüggő és nem más, mint az origótól mért távolság hullámhosszhoz viszonyított értékével arányos:



A hely- vagy méretkoordináta és a hullámszám szorzata az akusztikában igen gyakran előforduló mennyiség, és mint látni fogjuk, igen sok esetben képez határvonalat különféle közelítések lehetősége között, ezért szokás külön névvel is illetni és Helmholtz-féle számnak nevezni.

Az összefüggésből egyszerű átrendezéssel nyerhetjük a specifikus impedancia összefüggését:



A specifikus impedancia 1-nél jóval kisebb Helmholtz-szám esetén közel képzetes és csekély abszolút értékű, míg 1-nél jóval nagyobb Helmholtz-számokra a síkhullám specifikus impedanciájához tart. Ez tulajdonképpen azt fejezi ki, hogy a gombhullámok az origótól a - hullámhosszhoz viszonyított – nagy távolságban már úgy viselkednek, mint az ideális síkhullám, azaz „kisimulnak”. Hasonló következtetés vonható le a részecskesebességet leíró egyenletből is: ha a Helmholtz-szám 1-nél jóval nagyobb, akkor a részecskesebesség a frekvenciától függetlenül arányos a hangnyomás értékével, míg ellenkező esetben – azaz kisfrekvencián – igen nagy értéket is felvehet.

Számítsuk még ki a gömbhullám hangintenzitásának átlagértékét, célszerűen a villamosságtanban megismert formula alkalmazásával:



A hangintenzitás az origótól vett távolság négyzetével fordított arányban van, a térben gyorsan csökken. Ha egy képzeletbeli *R* sugarú gömbbel vesszük körül vizsgálódásunk térrészét, akkor az erre a hipotetikus gömbfelületre meghatározott eredő hangteljesítmény a



összefüggés szerint helytől és időtől független.