# 1. fejezet

# Egyenáramú hálózatok

## 1.1. Bevezetés

Az egyenáramú hálózatok elmélete generátorok és ellenállások összekapcsolásával létrehozott áramkörök elemzésével foglalkozik. Az ,,egyen" kifejezés arra utal, hogy a hálózatban mérhető áramok és feszültségek állandóak, értékük az időtől független[1]. A töltések mozgását valamilyen töltésszétválasztásra alkalmas eszköz végzi[2], amely energiát táplál a rendszerbe; ezeket az eszközöket nevezzük generátoroknak. A töltések mozgása zárt körökben valósul meg (áramkörök), a generátorok sarkai között[3]. A generátorok által szolgáltatott villamos teljesítményt fogyasztók veszik föl, melyeket ellenállásnak nevezünk. A fogyasztók által fölvett villamos teljesítmény hővé alakul[4]. A generátorokat és az ellenállásokat ideális vezetékkel kötjük össze. Az ideális vezetéket veszteség- (azaz ellenállás)mentes anyagként kezeljük.

## 1.2. Egyenáramú hálózatok építőelemei

Az egyenáramú hálózatok építőelemei a feszültség- ill. áramgenerátorok, és az ellenállások. A generátorok teljesítményt adnak le, az ellenállások teljesítményt vesznek föl. Ezen alkatrészek 2 kivezetéssel rendelkeznek, ún. kétpólusok[5]. Ezen alaktrészek kivezetéseit (pólusait) ideális[6] vezetékekkel kapcsoljuk össze. Az összekapcsolások során egyrészt zárt hurkok alakulnak ki, amelyben körbefolyhat az áram, másrészről vezeték elágazások, amelyeket csomópontnak nevezünk. Mivel a vezetékeket ideálisnak tekintjük, ezért sem a vezetékek hossza, sem a vezetékek alakja nem bír jelentőséggel: bármilyen kapcsolási rajz ekvivalens egy másikkal, ha az összekapcsolások struktúrája megegyezik.

[1] még ki- és bekapcsolási jelenségekkel sem foglalkozunk

[2] nevezhetnénk ,,töltésszivattyúnak" is

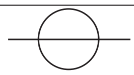
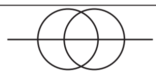
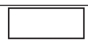
[3] Az elektronok mozgásának persze az a föltétele, hogy vezető anyag (pl. fém) legyen jelen a generátor kapcsai között.

[4] Ez néha hasznos, pl. egy villanyvasaló esetében, néha káros és szeretnénk elkerülni.

[5] Más nézőpont szerint 2 pólus=1 kapu, így egykapunak is szokták nevezni.

[6] nulla ellenállású

*A hálózatok elemzése a hálózat adott elemén fellépő feszültség illetve adott ágban folyó áram meghatározását jelenti.* Vagyis a hálózatokban az információt a feszültség illetve az áram hordozza. Az építőelemek áramköri elemzés és tervezés szempontjából fontos tulajdonságait a 1.1 táblázatban foglaltuk össze. Ezek szerint a feszültségforrás valami-

| eszköz | rajzjel | feszültség | áram |
|---|---|---|---|
| feszültséggenerátor |  | fix konstans | tetszőleges |
| áramgenerátor |  | tetszőleges | fix konstans |
| ellenállás |  | U=RI | I=U/R |

1.1. táblázat. Az egyenáramú hálózatok építőelemei

lyen adott feszültséget, az áramgenerátor adott áramot kényszerít a hálózatban, míg az ellenállások esetében egyenes arányosság van a rajtuk fellépő feszültség és rajtuk átfolyó áram között. Ez a jól ismert Ohm-törvény:

$$U = RI \tag{1.1}$$

### 1.2.1. Speciális kétpólusok: rövidzár és szakadás

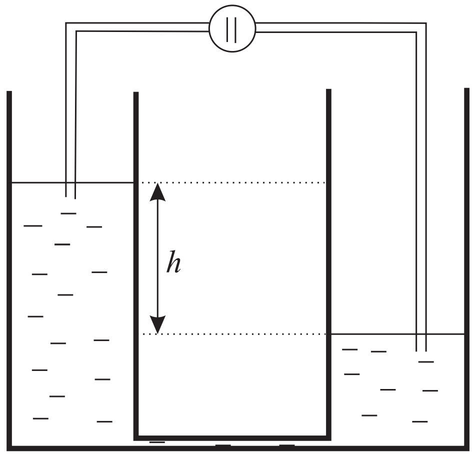
A zérus ellenállású ellenállást ($R = 0$ eset) rövidzárnak nevezzük, amely nem más, mint az ideális vezető. Legfontosabb tulajdonsága, hogy bármekkora áram follyék is rajta, feszültség nem esik rajta (másként megfogalmazva minden pontja azonos potemnciálon van).

A végtelen ellenállású ellenállást ($R = \infty$ esete) szakadásnak nevezzük (nem más mint egy szigetelő anyag). Ebben az esetben bármekkora feszültség legyen is a szakadás két pontja között, áram soha nem fog folyni.

### 1.2.2. Mérőirányok

Sem a feszültség, sem az áram nem vektormennyiségek, de pozitív és negatív értékeket is felvehetnek. Áram esetén a pozitív érték egy adott referenciairánnyal megegyező irányú áramot jelent, míg a negatív a referenciairánnyal ellentéteset. A kapcsolási rajzokon a referenciairányt (mérőirányt) nyíllal jelöljük. Feszültség esetén a mérőirányt jelző nyíl a pozitívabb potenciál felől mutat a negatívabb felé. (Ha a helyzet fordított, akkor ezt a feszültség negatív értékével fejezzük ki).

A mérőirány elnevezés onnan ered, hogy ezek a „nyilak” felfoghatóak úgy is, mint utasítás a voltmérő és ampermérő bekötésére. Ha az áramkörben a mérőirány szerint kötjük be a műszereket, akkor a mérőiránnyal megegyező előjelű mennyiségeket pozitívnak, míg az azzal ellentéteseket negatívnak jelzi a műszer.




1.1. ábra. Közlekedőedény szivattyúval

### 1.2.3. Villamos teljesítmény

A villamos hálózatokban a teljesítményt a $P = UI$ szorzat adja meg. A generátorok teljesítményt leadó, míg az ellenállások teljesítményt fölvevő alkatrészek. Az ellenállások által fölvett villamos teljesítmény hőenergiává alakul. A gyakorlatban az áramkörök ezért mindig melegednek. Ha a termelődő hőt nem sikerül a környezetbe sugározni, akkor az alkatrész túlmelegszik, akár el is éghet.

*Megállapodás szerint a fölvett teljesítményt tekintjük pozitívnak.* Ebből az következik, hogy az ellenállások esetében a feszültség és áram mérőirányokat megegyezőnek, míg generátorok esetén fordítottan kell fölvenni.

### 1.2.4. Analógiák más fizikai mennyiségekkel

Tekintsük a 1.1 ábrán látható közlekedőedényt. Egy szivattyúval biztosítjuk, hogy a vízszint különbség egyanakkora legyen mindkét edényrészben. Az állandó folyadékszint különbség hatására az összekötő csövön állandó sebességgel áramlik a víz, méghozzá ezt a sebességet a cső keresztmetszete (és természetesen a folyadékszintek okozta hidrosztatikai nyomáskülönbség) fogja meghatározni. A folyadékszint különbség megfelel a feszültségnek, az összekötő cső keresztmetszete az ellenállás fogalmának, továbbá ha igaz az, hogy a szivattyú mindig állandó folyadékszint különbséget tart fenn, akkor a szivattyú feszültséggenerátornak tekinthető. Ha a szivvatyút az összekötő csőbe építjük, és a vízáram sebességét tartjuk vele állandó értéken, akkor az áramgenerátorral analóg képlethez jutunk.

## 1.3. A Kirchhoff-törvények

Az egyenáramú hálózatok számítására vonatkozó legfontosabb összefüggések: Kirchhoff csomóponti- és huroktörvénye.

**1. Tétel (Kirchhoff csomóponti törvénye).** *Tetszőleges hálózat bármely csomópontjára igaz, hogy az adott csomópontba befolyó és kifolyó áramok összege megegyezik (azaz a csomópontokban töltés nem halmozódhat föl). Ha a befolyó és kifolyó áramokat ellentétes előjellel vesszük figyelembe, akkor*

$$\sum_j I_j = 0 \tag{1.2}$$

A csomóponti törvény azt fejezi ki, hogy a csomópontokra igaz a töltésmegmaradás törvénye, azaz a csomópontban töltés nem keletkezik és nem tűnik el; azaz a csomópontban áram nem keletkezik és nem tűnik el. Bizonyítás helyett egy szemléletes példát szeretnénk hozni: egy vizvezetékrendszerben levő elágazásra nyilván igaz, hogy amennyi víz befolyik az elágazásba, ugyanannyi fog kifolyni.

**2. Tétel (Kirchhoff huroktörvénye).** *Tetszőleges hálózatban bármely zárt hurkokban körüljárva a feszültségek algebrai összege zérus:*

$$\sum_i U_i = 0 \tag{1.3}$$

Ez azt jelenti, hogy egy adott hurokban egy tetszőleges körüljárási irányt definiálunk, és sorba vesszük a hurokban fellépő feszültségeket. Amelyek mérőiránya egyezik a körüljárási iránnyal, azokat pozitív, míg az ellentéteseket negatív előjellel vesszük figyelembe.

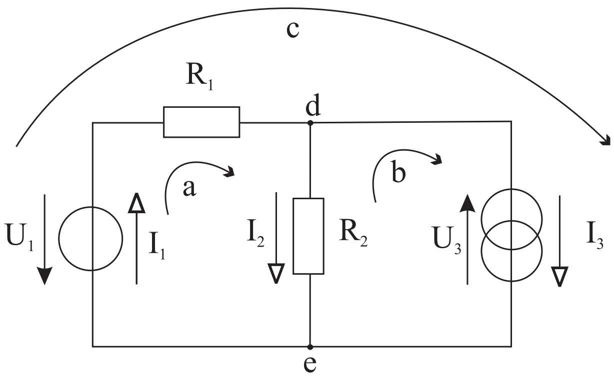
A huroktörvényt is szemléletessé tehetjük: Képzeljünk el egy hegymászót, aki egy menedékháztól felmászik a hegytetőre, és valamilyen *más úton* visszaereszkedik a kiindulópontjába (körutat tesz). Tudjuk, hogy eközben a potenciális energiája ugyanannyit nőtt, amennyit csökkent, hiszen ugyanolyan magasságban van a kiinduló és a végpontja. A villamos potenciál ugyanolyan jellegű fizikai mennyiség, mint a potenciális energia. Két pont között a potenciál különbség (más néven feszültség) megadja a villamos tér munkavégző képességét. Két földrajzi pont tengerszintfeletti magasságkülönbsége arányos a gravitációs munkavégző képességével ($mg(h_1 - h_2)$).

### 1.3.1. A Kirchhoff-törvények alkalmazása

A Krichoff-törvények (és az Ohm-törvény) segítségével minden egyenáramú hálózat kimerítően elemezhető, azaz tetszőleges áram és feszültség kiszámolható a segítségükkel.

Ismeretlennek az ágáramokat szoktuk tekinteni hiszen ez alapján az ágban lévő feszültségek meghatározhatóak az Ohm-törvény segítségével. (Ha egy ágban áramgenerátor van, annak az ágnak az árama ismert, ezért az nem ismeretlen, viszont ezen ágnak nem ismerjük a feszültségét, ezt kell ismeretlennek tekinteni!) Az egyes csomópontokra és hurkokra felírva a megfelelő Kirchoff-egyenleteket, egy lineáris egyenletrendszert kapunk. Ha az egyenletek és az ismeretlenek száma megegyezik, akkor oldható meg az egyenletrendszer. Tehát adott hálózat esetén azt kell megfontolni, hogy melyik csomópontokra és mely hurkokra érdemes fölírni a huroktörvényt.

Az általános szabály a következő (bizonyítás nélkül): a független csomópontok száma (ezek azok, amelyekre érdemes a csomóponti törvényt fölírni, mert lineárisan független




1.2. ábra.

egyenletekre vezet) eggyel kevesebb, mint a csomópontok száma. A független hurkok száma (amelyekre a huroktörvényt édemes fölírni) meegyezik az ágak száma mínusz a független csomópontok száma. (Ezt könnyebb úgy megjegyezni, hogy addig kell újabb és újabb hurkokra hurok egyenleteket fölírni, amíg az egyenletek száma el nem éri az ismeretlenek számát. Viszont figyelni kell arra, hogy a hurokegyenletek is függetlenek legyenek, ezt úgy lehet biztosítani, hogy mindig olyan hurkot kell választani, amelynek legalább egy éle nem szerepelt még eddigi hurkokban.) Lássunk egy egyszerű példát:

### 1.3.2. Példa a független csomópontok és hurkok számára

Tekintsük a 1.2. ábrán látható hálózatot. Adatok:
$U_1 = 3$ V
$I_3 = 2$ A
$R_1 = 10\ \Omega$
$R_2 = 30\ \Omega$
Ismeretlenek: $I_1, I_2, U_3$.

A csomópontok száma 2 ($d$ és $e$), tehát 2-1=1 csomóponti egyenletet kell fölírni, pl. a $d$ pontra:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \tag{1.4}$$

Összesen három hurok van a hálózatban ($a$, $b$ és $c$). Még 2 egyenletre van szükség (a független hurkok száma is persze 2). A három hurokból tetszőlegesen kiválasztunk kettőt, pl. $a$-t és $b$-t. A hurokegyenlet $a$-ra:

$$-U_1 + I_1R_1 + I_2R_2 = 0 \tag{1.5}$$

(Mivel $I_1$ és $I_2$ mérőiránya megegyezett a körbejárási iránnyal, ezért pozitív előjellel vettük figyelembe az $R_1$ és $R_2$ ellenállásokon eső feszültséget.) A $b$-hurokra:

$$-I_2R_2 - U_3 = 0 \tag{1.6}$$

A (1.4), (1.5) és (1.6) egyenletekből álló egyenletrendszer (egy lehetséges) megoldása: (1.4)-ből következik, hogy $I_1 = I_2 + I_3$. Ezt behelyettesítjük (1.5)-be:

$$-U_1 + (I_2 + I_3)R_1 + I_2R_2 = 0$$

Ebből $I_2$ rendezéssel kifejezhető:

$$I_2 = \frac{U_1 - I_3 R_1}{R_1 + R_2} \tag{1.7}$$

Ezután $I_2$ ismeretében (1.4)-ből $I_1$ számolható, ill. $I_2$ ismeretében (1.6)-ból $U_3$ egyszerűen adódik.

A megfelelő számértékeket behelyettesítve

$$I_2 = \frac{3 - 20}{40} = -0.425\mathrm{A}$$

vagyis $I_2$ valójában a mérőiránnyal ellentétesen folyik (vagy másként: ha az ampere-mérőt az ábra szerint kötnénk be, akkor negatív értéket mutatna).

$$I_1 = I_3 + I_2 = 2 - 0.425 = 1.575\mathrm{A}$$

ill.

$$U_3 = -I_2 R_2 = 0.425 \cdot 30 = 12.75\mathrm{V}.$$

### 1.3.3. Példa: A Wheatstone-híd

A 1.3. ábrán levő kapcsolást Wheatstone-hídnak nevezik, és a méréstechnikában alapvető fontossága van. Elemezzük ezt a hálózatot a Krichoff-törvények segítségével. Látható, hogy összesen 6 ismeretlen ágáramunk van, ezeket kell meghatározni, ebből az következik, hogy 6 egyenletet kell fölírnunk. (A független csomópontok száma 4-1=3, a független hurkok száma 6-3=3, tehát tényleg 6 egyenletet lesz érdemes fölírnunk.) Célunk az áthidaló ág áramának meghatározása ($I_5$ =?) Négy csomópont van ($d$, $e$, $f$, $g$), tehát három független csomóponti egyenlet írható föl. Ezeket tetszőlegesen választhatjuk, legyen pl. $d$, $e$, és $g$, amelyekre rendre az

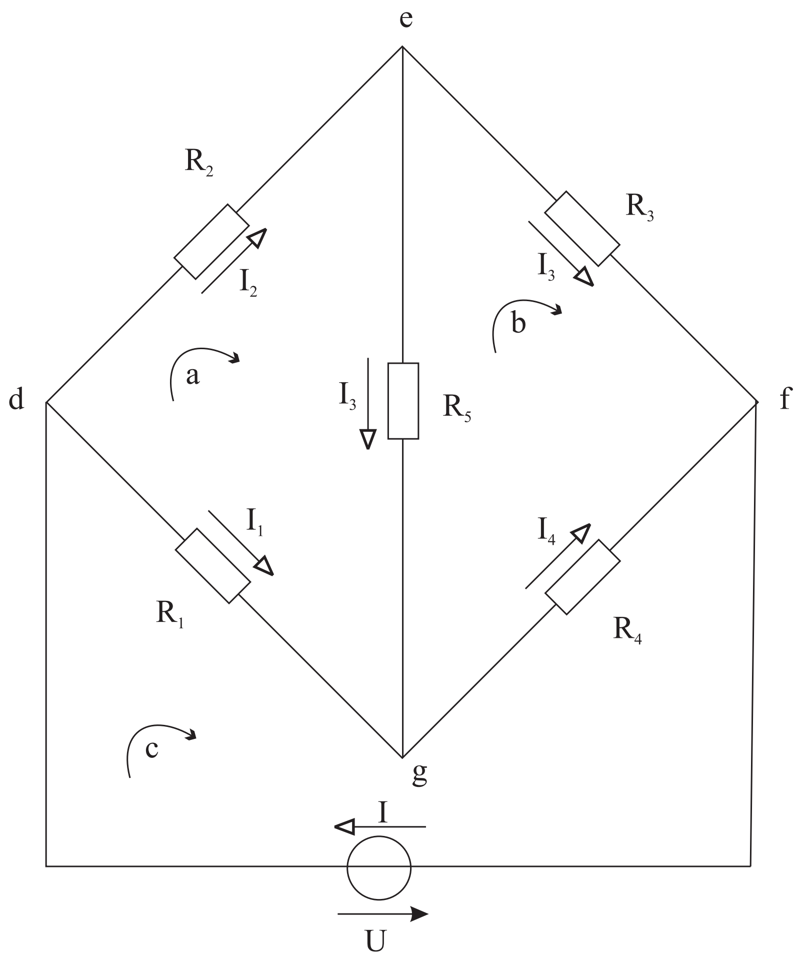
$$\begin{aligned} I - I_1 - I_2 &= 0 \\ I_2 - I_5 - I_3 &= 0 \\ I_1 + I_5 - I_4 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletek adódnak. Mivel 6 ismeretlen ágáram van, ezért még 3 huroktörvényt kell fölírni. Pl. az $a$, $b$ és $c$ hurkokra:

$$\begin{aligned} I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_5 R_5 &= 0 \\ -I_5 R_5 + I_3 R_3 - I_4 R_4 &= 0 \\ -U + I_1 R_1 + I_4 R_4 &= 0 \end{aligned}$$

Az egyenleteket $I_1, ..., I_5, I$ szerint rendezve az egyenletrendszert az alábbi, áttekinthetőbb alakba írhatjuk:

$$\begin{array}{cccccccc} -I_1 & -I_2 & & & & +I & = & 0 \\ & +I_2 & -I_3 & & -I_5 & & = & 0 \\ +I_1 & & & -I_4 & +I_5 & & = & 0 \\ -R_1 I_1 & +R_2 I_2 & & & +R_5 I_5 & & = & 0 \\ & & +R_3 I_3 & -R_4 I_4 & -R_5 I_5 & & = & 0 \\ +R_1 I_1 & & & +R_4 I_4 & & & = & U \end{array} \tag{1.8}$$




1.3. ábra.

Vezessük be az $\mathbf{i} = [I_1, ..., I_5, I]^T$ ill. $\mathbf{u} = [0, 0, 0, 0, 0, U]^T$ vektor jelöléseket. Az $\mathbf{i}$ vektor együtthatómátrixát $\mathbf{A}$-val jelölve az egyenletrendszer sokkal tömörebben fölírható:

$$\mathbf{Ai} = \mathbf{u}$$

ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -R_1 & R_2 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & -R_5 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A megoldás az ismeretlen $\mathbf{i}$ áramvektorra:

$$\mathbf{i} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}$$

A mátrix-alakba rendezett lineáris egyenletrendszerek számítógépes megoldására igen sok program létezik. Ha példaként az ellenállásértékek rendre
$R_1 = 10\Omega$
$R_2 = 20\Omega$
$R_3 = 30\Omega$
$R_4 = 40\Omega$
$R_5 = 50\Omega$
illetve $U = 3V$, akkor a megoldásra

$$\mathbf{i} = [0.0153, -0.1322, -0.1881, 0.0712, 0.0559, -0.1169]^T$$

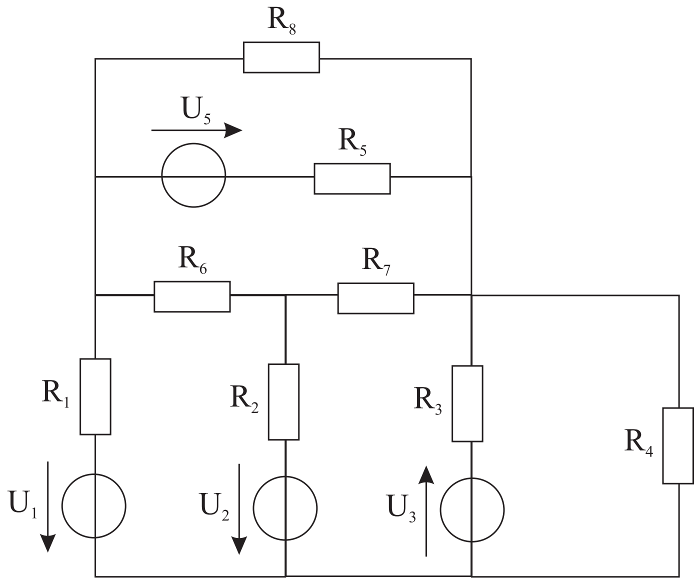
adódik, azaz pl. az $I_5$ áram 0.0559 A. vegyük észre, hogy ezzel a módszerrel egyszerre megkapjuk az összes ismeretlen ágáramot. Tehát gépi megoldás esetén a Kirchhoff-törvények közvetlen alkalmazása gyorsan célravezet (nagyobb hálózatok kézi számítása esetén viszont nehézkes).

## 1.4. A csomóponti potenciálok módszere

Az előző fejeteben láttuk, hogy a Kirchhoff-törvények alkalmazásával tetszőleges bonyolultságú hálózatok kimerithetően elemezhetőek, az adódó lineáris egyenletrendszer megoldása számitógép segitségével egyszerűen megoldható. Kézi számitás esetén gazdaságosabb módszereket alkalmazhatunk. Egyik ilyen – a Kirchhoff-törvények közvetlen alkalmazásánál gyorsabb – módszer a csomóponti potenciálok módszere. Ennek az a lényege, hogy a hálózat csomópontjainak potenciálját tekintjük ismeretleneknek. Ezek közül egy tetszőlegesen kiválasztottat 0-potenciálúnak választunk, és igy ehhez képest adjuk meg a többi csomópont potenciálját. (Adott pontok közötti feszültség a csomóponti potenciálok különbségeként adódik).

A módszer a következő:

1. Elnevezzük a csomópontok potenciáljait, egy tetszőlegeset 0-nak választunk;




1.4. ábra. Példa a csomóponti potenciálok módszerének alkalmazására

2. Minden csomópontra fölírjuk a csomóponti törvényt a csomóponti potenciálok segítségével.

3. Az így adódó egyenletrendszert megoldjuk;

A módszert egy példán szemléltetjük. A 1.4. ábrán látható hálózatban 4 csomópont van, ebből az egyiket 0-nak választottuk. Ezután fölírjuk a csomóponti törvényeket az alábbiak szerint:

Az $a$-pontból kifolyó áramok (minden áramot a csomópontból elfolyónak tételezünk föl, ilyen értelmezés szerinti mérőirányt választunk): az $R_1$ ellenálláson $\frac{U_a-U_1}{R_1}$, az $R_5$-ön $\frac{U_a-U_5-U_c}{R_5}$, az $R_6$-on $\frac{U_a-U_b}{R_6}$, végül az $R_8$-on $\frac{U_a-U_b}{R_8}$ áram folyik el, tehát összesen

$$\frac{U_a-U_1}{R_1}+\frac{U_a-U_5-U_c}{R_5}+\frac{U_a-U_b}{R_6}+\frac{U_a-U_b}{R_8}=0$$

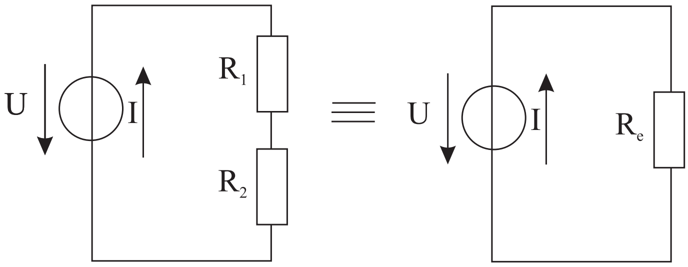
Hasonló módon a $b$ pontra:

$$\frac{U_b-U_2}{R_2}+\frac{U_b-U_a}{R_6}+\frac{U_b-U_c}{R_7}=0$$

és végül a $c$-re:

$$\frac{U_c+U_3}{R_3}+\frac{U_c}{R_4}+\frac{U_c-U_a+U_5}{R_5}+\frac{U_c-U_a}{R_8}+\frac{U_c-U_b}{R_7}=0$$

Ezután meg kell oldani ezt az egyenletrendszert $U_a, U_b, U_c$-re. Ezt az olvasóra bízzuk.




1.5. ábra. Ellenállások soros eredője

## 1.5. Ellenállások eredője

A hálózatok elemzésének, áttekintésének leggyakoribb módja az, hogy nagyobb hálózat-részeket helyettesitünk egyszerűbbel, amely a hálózat maradék részének szempontjából villamosan ugyanúgy viselkedik, mint a helyettesitett hálózat-rész.

### 1.5.1. Ellenállások soros kapcsolása

Tekintsük példáaul az alábbi feladatot. Adott egy feszültséggenerátor és rákapcsolunk sorosan egy $R_1$ és egy $R_2$ ellenállást. A két ellenállást szeretnénk egyetlen $R_e$ ellenállással helyettesiteni úgy, hogy a körben ugyanakkora áram follyon. Ennek az az értelme, hogy ebben az esetben a körben folyó áramot az Ohm-tv felhasználásával közvetlenül megkaphatjuk. Vagyis a két ellenállás esetét visszavezetjük az egyetlen ellenállás esetére, amely megoldását már ismerjük.

A 1.5. ábra bal oldali kapcsolására a huroktörvényt fölírva:

$$U = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2)$$

A célkitűzésünk szerint a jobb oldali, egyetlen ellenállást tartalmazó kapcsolásban is ugyanekkora áram folyik. Itt is fölírva a hurokegyenletet:

$$U = IR_e$$

A két egyenlet baloldala megegyezik, így a jobb oldalak egyenlőségéből következik, hogy

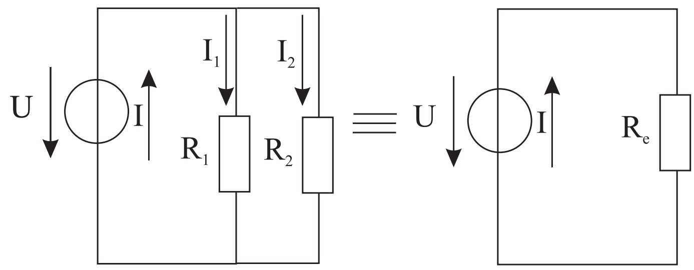
$$R_e = R_1 + R_2 \tag{1.9}$$

*Tehát ellenállásokat sorba kapcsolva az eredőjük a kettő ellenállás összegeként adódik.*

Ha nemcsak 2, hanem 3 vagy több ellenállás van sorosan kapcsolva, akkor ezek eredőjét kiszámolhatjuk úgy, hogy először vesszük kettőnek az eredőjét, utána az így kapottét és a harmadikét, stb. A megfelelő összefüggés:

$$R_e = R_1 + R_2 + ... + R_n$$

aminek belátását az olvasóra bízzuk.




1.6. ábra. Ellenállások párhuzamos eredője

### 1.5.2. Ellenállások párhuzamos kapcsolása

A feladat hasonló az előzőhöz, most két párhuzamosan kapcsolt ellenállást szeretnénk úgy helyettesíteni, hogy a generátort az egyetlen eredő ellenállás ugyanakkora árammal terhelje, mint az eredeti párhuzamos kapcsolás. (Más szóval, a generátoron ugyanakkora áram follyon). Most a következő egyenleteket írhatjuk föl. Csomóponti törvény a 1.9 ábra bal oldali kapcsolásában:

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$$

A jobb oldali kapcsolásra az Ohm-törvény: $I = \frac{U}{R_e}$. A két áram megegyezik (ez volt a célkitűzésünk), így az egyenletek jobb oldalai is egyenlőek, vagyis

$$\frac{U}{R_e} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$$

$U$-val egyszerűsítve:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{1.10}$$

*Tehát ellenállásokat párhuzamosan kapcsolva az eredőjük reciproka az egyes ellenállások reciprokainak összegeként adódik.*

A párhuzamos ellenállások eredőjének kifejezésére elterjedt egy másik jelölés mód is:

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 \times R_2 \tag{1.11}$$

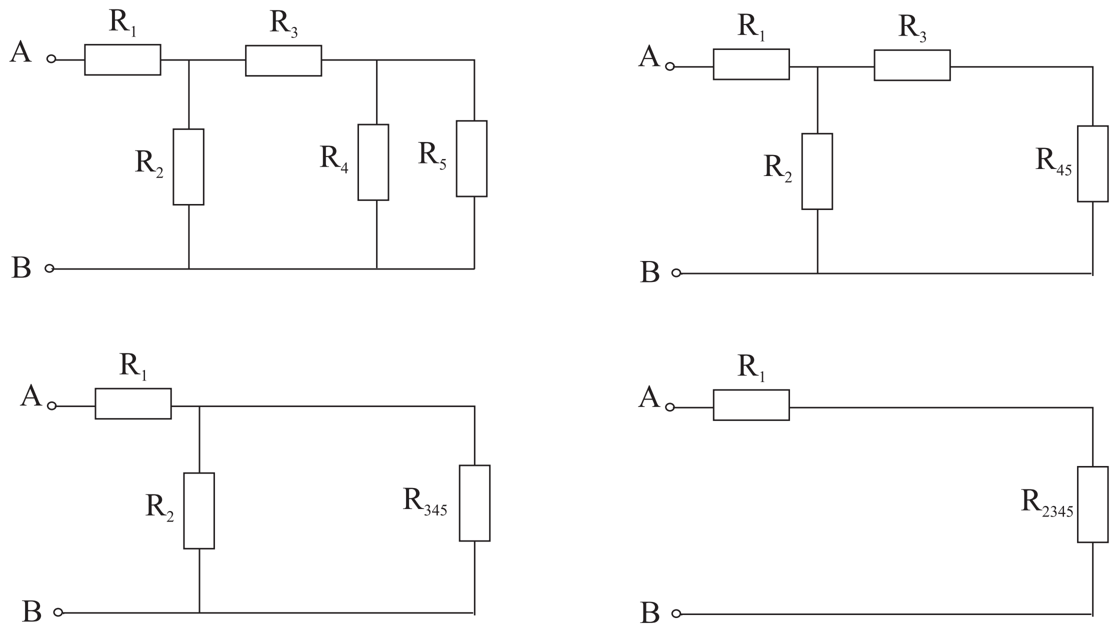
Az $\times$ jelet ,,replusz" műveletnek nevezzük. (Ennek legnagyobb előnye (1.10)-vel szemben, hogy nem az eredő reciprokára, hanem magára az eredőre vonatkozik.)

Ha nem csak kettő, hanem $n$ párhuzamos ellenállás eredőjét kell kiszámolni, akkor úgy kell eljárni, hogy először vesszük kettőnek az eredőjét, majd az így kapottnak az eredőjét a harmadikkal, stb. Az adódó összefüggés:

$$R_e = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$$

*Vigyázzunk* arra, hogy pl. három tag replusz-a nem számolható ki a (1.11)-szerinti definíció ,,általánosításával":

$$R_1 \times R_2 \times R_3 \neq \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$




1.7. ábra. Ellenállások eredője

*hanem*

$$R_1 \times R_2 \times R_3 = (R_1 \times R_2) \times R_3 = R_1 \times (R_2 \times R_3) = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

vagy alkalmazni kell az eredeti szabályt:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

### 1.5.3. Példa

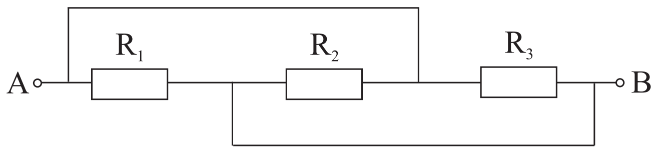
Határozzuk meg a 1.7 ábrán látható kapcsolásban az eredő ellenállást az $AB$ pontra nézve.

Az eredő az $AB$ pontra azt jelenti, hogy ha az $A$ és $B$ közé egy generátort kötnénk, akkor a hálózat mekkora áramot venne ki a generátorból, illetve mekkora az az egyetlen ellenállás (vagyis az eredő), amelyik ugyanerre a generátorra kapcsolva ugyanekkora áramot venne ki a generátorból.

A megoldás ránézésre is megmondható, ugyanakkor ilyenkor elég nagy a tévesztés veszélye. A legbiztosabb módszer (főleg bonyolultabb kapcsolások esetén), ha ,,algoritmikus" módszerrel ,,göngyölítjük föl" a problémát, lépésről lépésre. Az algoritmus a következő:

1. ha van a kapcsolásban olyan ág, amely 2 vagy több sorbakapcsolt ellenállást tartalmaz, helyettesítsük ezeket az eredőjükkel, ha nincs ilyen ág, ugorjunk a 2-es pontra;

2. az 1-1 ellenállást tartalmazó párhuzamos tagokat (és csakis ezeket) helyettesítsük a párhuzamos eredőjükkel;




1.8. ábra. Ellenállások eredője

3. ha csak 1 ellenállás maradt akkor kész vagyunk, különben ugorjunk az 1-re;

Ezt az algoritmust követve a **??** ábrán látható lépésekben érünk el a megoldáshoz. A köztes ábrákon szereplő ellenállásértékek rendre a következők: $R_{45} = R_4 \times R_5$, $R_{345} = R_3 + R_{45}$, $R_{2345} = R_2 \times R_{345}$. Végül látszik, hogy $R_1$ és $R_{2345}$ sorosan vannak kapcsolva, tehát a végeredmény

$$R_{AB} = R_1 + (R_2 \times (R_3 + R_4 \times R_5))$$

### 1.5.4. Példa

Sokszor a kapcsolási rajzról nem lehet első ránézésre egyértelműen látni, milyen kapcsolással is állunk szemben. Ilyenkor a kapcsolás ,,struktúráját" kell föltérképeznünk, vagyis az összeköttetések rendszerén nem változtatva más alakzatban kell a kapcsolást fölrajzolni. (Érdemes megemlíteni, hogy ugyanilyen feladat egy valóságos, megépített áramkör tanulmányozása, hiszen az áramkörök megvalósításakor nem az a fontos, hogy kézbe véve a panelt, rögtön látható legyen milyen kapcsolásról van szó, hanem az, hogy az alkatrészek minél kisebb helyen elférjenek, vagy minél kevesebb egymást keresztező drót legyen a panelen.)

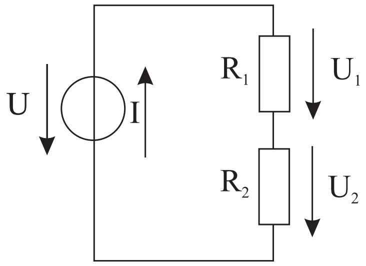
A 1.8 ábra egy ilyen ,,trükkös" példát mutat. Vegyük észre, hogy az $R_1$ ellenállsá egyik vége az $A$, míg másik vége közvetlenül a $B$ ponthoz kapcsolódik egy külön dróton keresztül. Némi tanulmányozás után ugyanez mondható az $R_2$ és $R_3$-ról is. Tehát mindegyik ellenállásra igaz, hogy egyik vége az $A$, a másik a $B$ ponthoz van kapcsolva, vagyis a három ellenállás párhuzamosan van kötve.

## 1.6. Generátorokból és ellenállásokból álló hálózat helyettesítése

Az előző fejezetben azzal foglalkoztunk, hogyan lehet ellenállásokból álló hálózatrészt egyetlen ellenállással helyettesíteni úgy, hogy villamos szempontból a helyettesités ekvivalens legyen az eredetivel. Ebben a fejezetben azt mutatjuk meg, hogyan lehet generátorokból és ellenállásokból álló hálózatrész helyettesítését elvégezni.

### 1.6.1. Thevenin tétele

**3. Tétel (Thevenin).** *Tetszőleges számú feszültség- és áramgenerátort illetve tetszőleges számú ellenállást tartalmazó hálózatrész helyettesithető annak tetszőleges $A$ és $B$ pontjára nézve egyetlen feszültséggenerátorral és azzal sorbakapcsolt ellenállással. A*




1.9. ábra. A feszültségosztás alapesete

*feszültséggenerátor feszültségértéke az A és B pont közötti üresjárási feszültséggel egyezik meg, az ellenállás (belső ellenállásnak nevezzük) értéke pedig a generátorok hatástalanitása mellett az A és B között adódó ellenálláseredővel egyezik meg. (Feszültséggenerátor hatástalanitása U=0 V feszültségű generátorral, azaz rövidzárral (ideális vezetékkel) történik, áramgenerátor hatástalanitása I=0 A áramú generátorral, azaz szakadással történik.)*

### 1.6.2. Norton tétele

**4. Tétel (Norton).** *Tetszőleges számú feszültség- és áramgenerátort illetve tetszőleges számú ellenállást tartalmazó hálózatrész helyettesithető annak tetszőleges A és B pontjára nézve egyetlen áramgenerátorral és azzal párhuzamosan kapcsolt ellenállással. A áramgenerátor áramértéke az A és B pont közötti rövidzárási árammal egyezik meg, az ellenállás (belső ellenállásnak nevezzük) értéke pedig a generátorok hatástalanitása mellett az A és B között adódó ellenálláseredővel egyezik meg. (Feszültséggenerátor hatástalanitása U=0 V feszültségű generátorral, azaz rövidzárral (ideális vezetékkel) történik, áramgenerátor hatástalanitása I=0 A áramú generátorral, azaz szakadással történik.)*

## 1.7. Feszültségosztó képlet

A Hálózatok elemzésekor hasznos formula levezetésével fogunk most foglalkozni. Tekintsük azt az alapvető fontosságú esetet, amikor egy feszültséggenerátorra két sorba kapcsolt ellenálláskapcsolódik. Kérdés az, hogy mekkora feszültség esik az egyik, illetve a másik ellenállsáon.

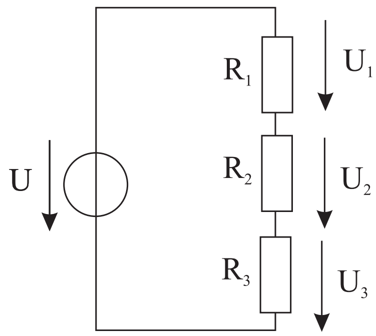
A Kirchhoff csomóponti törvény alapján tudjuk, hogy a körben ugyanaz az áram folyik (nincs egyetlen csomópont sem). Jelölje ezt $I$. A hurok-törvény alapján tudjuk, hogy

$$U_g = U_1 + U_2$$

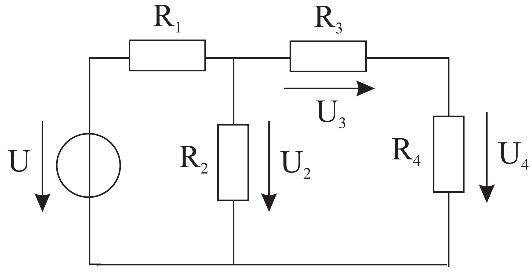
Az Ohm-törvény alapján az $U_1$ és $U_2$ feszültséget felirhatjuk a következő képpen:

$$U_1 = IR_1 \tag{1.12}$$

$$U_2 = IR_2 \tag{1.13}$$




1.10. ábra. Feszültségosztó 3 soros ellenálláson




1.11. ábra. Példa egymásbaágyazott feszültségosztó alkalmazására

A körben folyó áramról tudjuk, hogy a két ellenállás eredőjének felhasználásával (ami $R_1 + R_2$) az Ohm-törvény alkalmazásával kiszámolható:

$$I = \frac{U_g}{R_1 + R_2}$$

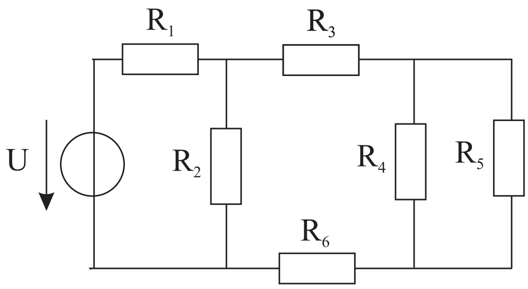
Ezt behelyettesitve a (1.12) egyenletbe $U_1$-re

$$U_1 = U_g \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{1.14}$$

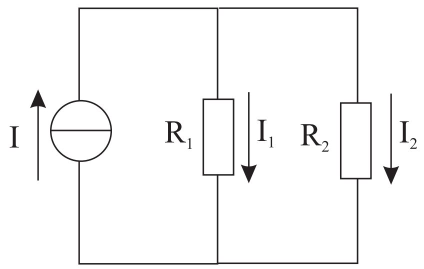
Hasonlóan

$$U_2 = U_g \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Ezeket az összefüggéseket feszültségosztó képleteknek nevezzük, s azt fejezik ki, hogy ha ismerjük két soros ellenállás együttes feszültségét, akkor ezen feszültség nekkora hányada esik az egyik ill. a másik ellenálláson. Minél nagyobb $R_1$ $R_2$-höz képest, annál nagyobb feszültséghányad esik rajta.




1.12. ábra. Példa egymásbaágyazott feszültségosztó alkalmazására (2)




1.13. ábra. Az áramosztó alapesete

### 1.7.1. Feszültségosztó 3 ellenálláson

### 1.7.2. Egymásba ágyazott feszültségosztó

### 1.7.3. További gyakorló példa feszültségosztóval

## 1.8. Áramosztó-képlet

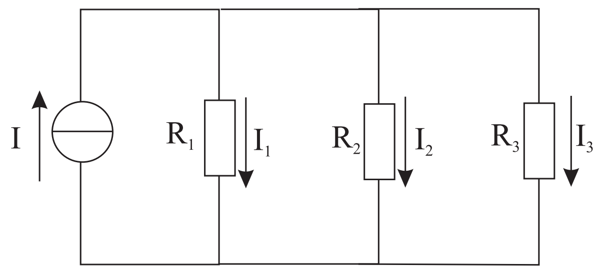
Az áramosztó képlet arra ad választ, hogy egy ismert áram ha kétfelé ágazik, és mindkét ág ellenállása ismert, milyen arányban oszlik szét. A vizsgált kapcsolás tehát a következő. Adott egy áramgenerátor, amire rákapcsolunk két párhuzamos ellenállást, $R_1$-t és $R_2$-t. A hurok-törvény értelmében tudjuk, hogy az áramgenerátoron ill. mindkét ellenálláson ugyanaz az $U$ feszültésg eseik (párhuzamos kapcsolás). A csomóponti törvény alapján pedig azt tudjuk, hogy

$$I = I_1 + I_2$$

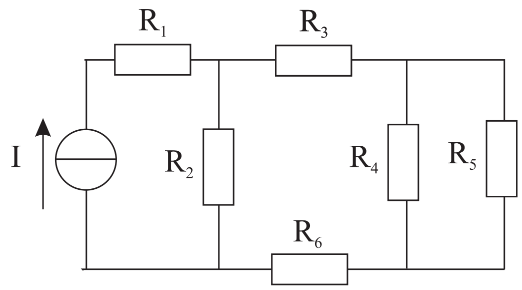
Mivel az Ohm-törvény értelmében $I_1 = U/R_1$ ill. $I_2 = U/R_2$, továbbá tudjuk, hogy az $U$ feszültség kiszámolható úgy, hogy meghatározzuk az ellenállsok eredőjét és az Ohm-törvényt használjuk: $U = I(R_1 \times R_2)$, ebből köüvetkezik, hogy

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{I(R_1 \times R_2)}{R_1} = \frac{I(\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2})}{R_1} = I\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Hasonlóan gondolatmenettel $I_2$-re $I_2 = I\frac{R_1}{R_1+R_2}$ adódik.




1.14. ábra. Áramosztás 3 párhuzamos ellenálláson




1.15. ábra. Az áramosztó alkalmazása

Vigyázat! A feszültség- és az áramosztó képlet alakja nagyon hasonlít, ugyanakkor van egy lényeges különbség. A feszültségosztóban az arányossági tényező számlálójában az az ellenállás szerepel, aminek a feszültségét keressük, az áramosztóban viszont pont a másik ellenállás ahhoz kélpest, a aminek az áramát keressük.

### 1.8.1. Áramosztó 3 párhuzamos ellenálláson

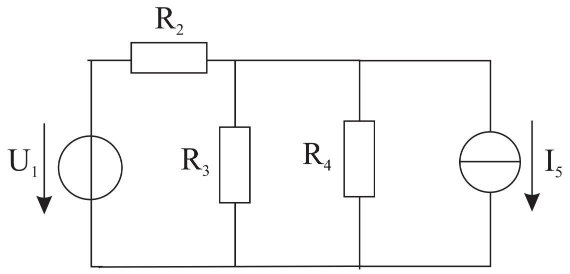
### 1.8.2. Példa az áramosztó alkalmazására

## 1.9. A szuperpozició elve

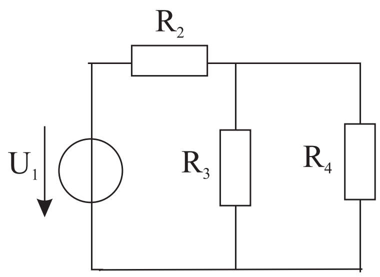
Az egyenáramú hálózatok számitása során felhasználhatjuk a fizika egyik alapvető elvét, a szuperpoziciót, amely azt mondja ki, hogy lineáris rendszerek esetén a gerjesztések összegére adott válasz megegyezik a gerjesztések válaszainak összegével. Magyarul az egyes generátorok hatása külön-külön kiszámolható, és ezeknek összegeként megkapható a keresett feszültésg ill. áram. A módszert tehát több generátort tartalmazó hálózatok számitására használhatjuk úgy, hogy először kiválasztunk egy adott generátort, a többit hatástalanítjuk (l. xxx. fejezet), utána a következő generátort tekintjük és a többit hatástalanítjuk, stb, majd végül az egyes generátorok hatására kialakuló feszültséget ill. áramot (előjelhelyesen) összegezzük.

### 1.9.1. Példa

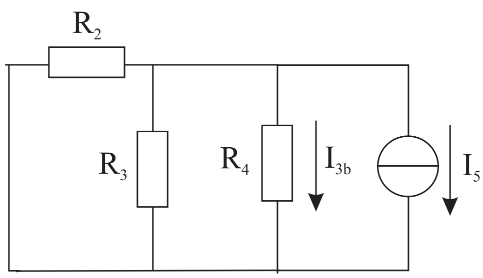
Tekintsük a 1.16. ábrán látható kapcsolást.



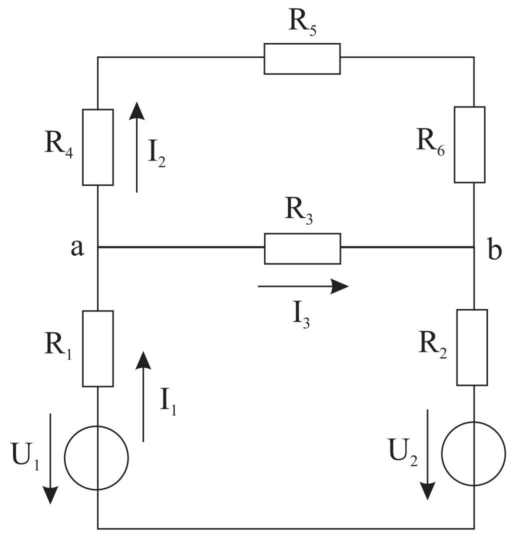

1.16. ábra. Két generátort tartalmazó kapcsolás




1.17. ábra. A feszültséggenerátor hatásának vizsgálata




1.18. ábra. Az áramgenerátor hatásának vizsgálata




1.19. ábra. Két feszültséggenerátort tartalmazó kapcsolás

### 1.9.2. Példa: Mi a kicsi és mi a nagy?

A vezeték ellenállása egyszer kicsi, másszor nagy....

## 1.10. Összefoglaló példa

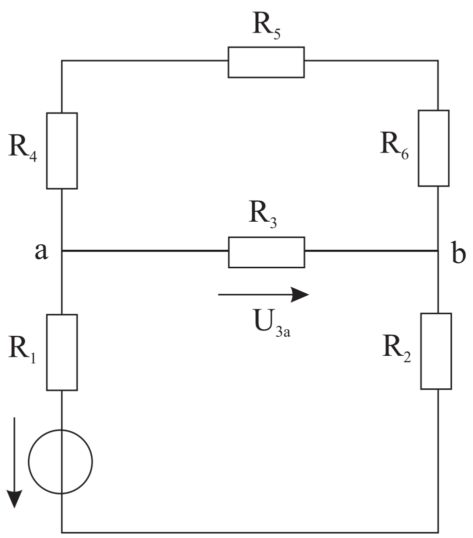
A 1.19. ábrán lévő kapcsolást 4 különböző módszerrel fogjuk kiszámolni.

### 1.10.1. Megoldás a Kirchhoff-törvények alkalmazásával

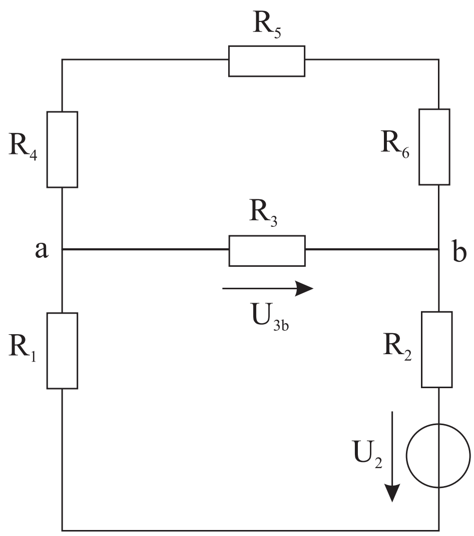
### 1.10.2. Megoldás a csomóponti-potenciálok módszerével

### 1.10.3. Megoldás a szuperpozíció elve alapján

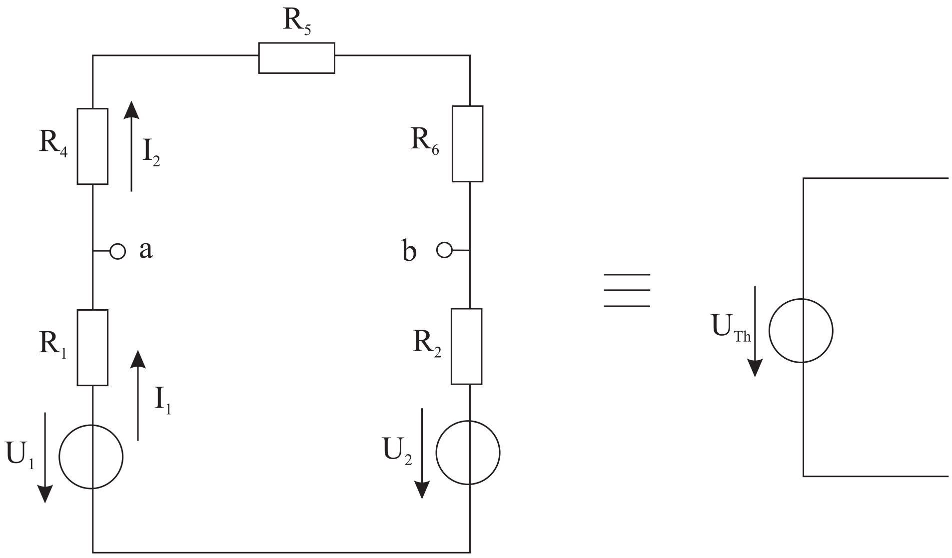
### 1.10.4. Megoldás Thevenin helyettesítőkép segítségével




1.20. ábra. Két feszültséggenerátort tartalmazó kapcsolás




1.21. ábra. Két feszültséggenerátort tartalmazó kapcsolás




1.22. ábra. Két feszültséggenerátort tartalmazó kapcsolás

# 2. fejezet

# Szinuszos feszültségű hálózatok

A váltakozó áramú villamos hálózatok számítását komplex számok segítségével végezzük. Ezzel a módszerrel lehet a legegyszerűbben eredményre jutni. Ehhez azonban szükség van a komplex aritmetika ismeretére, illetve fontos tudni, hogy a komplex szám – mint absztrakció – hogyan kapcsolható a fizikai képhez.

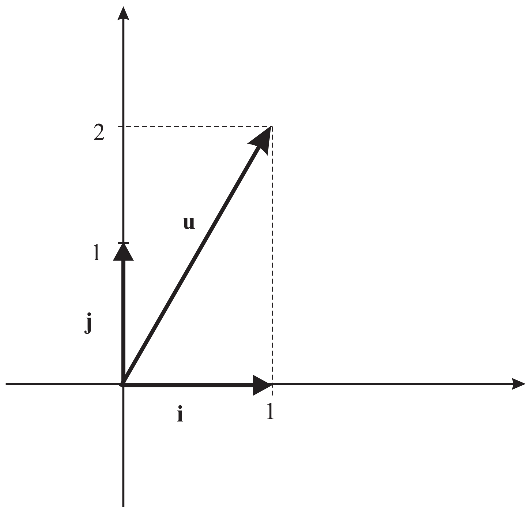
Ezekkel a kérdésekkel foglalkozunk ebben a rövid összefoglalóban. Először is bemutatjuk, mi is a komplex szám, illetve hogyan kell komplex számokkal számolni, s megismerkedünk az alapvető összefüggésekkel. Utána arról lesz szó, mi is a váltakozó feszültség (vagy áram), és miért alapvető fontosságú az, hogy váltakozó feszültségű hálózatokat elemezni tudjunk. Végül a rezisztív és reaktív elemeket és szinuszos generátorokat tartalmazó hálózatok számítástechnikáját mutatjuk be.

## 2.1. A komplex aritmetika

Tudjuk, hogy a szám fogalma igen nehezen érthető meg. A kisgyermekek számára szinte a legkomolyabb feladat megtanulni, mit is jelent a kettő vagy az öt. Később bevezetjük a negatív egész számokat, majd a tört számokat, és ezzel el is érkezünk a középiskolában használt legkomolyabb absztrakciós szintig, a valós számok halmazáig. A szám fogalma természetesen tovább absztrahálható, a valós számok utáni következő „állomás" a komplex szám, amely – kezelését tekintve – leginkább a két dimenziós (azaz két koordinátával rendelkező) vektorokhoz hasonlít. Ezért először is azt tekintjük át, hogy a síkbeli vektorokról mit is tudunk.

### 2.1.1. Emlékeztető a vektorokról

Legyen adott egy két dimenziós, valós együtthatós $\mathbf{u}$ vektor (így szoktuk jelölni: $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$). A koordináták értéke $\mathbf{u} = [1, 2]$. (A nyomtatott szövegekben a vektorokat általában félkövér betűkkel jelölik, míg kézírásban alá- vagy föléhúzással.) Az $\mathbf{u}$ vektort fölrajzoltuk a 2.1. ábrán. Eddig nem esett szó arról, hogy az előbbi tömör alakban megadott vektor koordináták mire is vonatkoznak (enélkül azonban föl sem tudtuk volna rajzolni az ábrát). Ezt a vonatkoztatási rendszert nevezzük bázisnak. Ez egy alap vektorkészletet jelent, és a vektorainkat úgy adjuk meg, hogy megmondjuk, hogy a bázisvektorok „milyen arányú




2.1. ábra. Az $\mathbf{u}$ vektor egymásra merőleges (ortogonális) bázisrendszerben

keverékeként” állítható elő a mi vektrounk. Az ábráról könnyen leolvasható, hogy az $\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j}$. Ennek a rövidített írásmódja a fönt is használt $\mathbf{u} = [1, 2]$. (Még egyszer hangsúlyozzuk, hogy az ilyen tömör formában megadott vektorok fölírásakor mindig tudni kell, mi a vonatkoztatási rendszer. Ez most esetünkben az egységnyi hosszú, egymásra merőleges $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok.) Számunkra ebből az a legfontosabb tanulság, hogy ha két vektort összeadunk (esetünkben az $\mathbf{i}$-t és a $2\mathbf{j}$-t), akkor az eredményvektor ($\mathbf{u}$) hossza nem fog megegyezni a két összeadott vektor hosszával, és az iránya is más lesz.

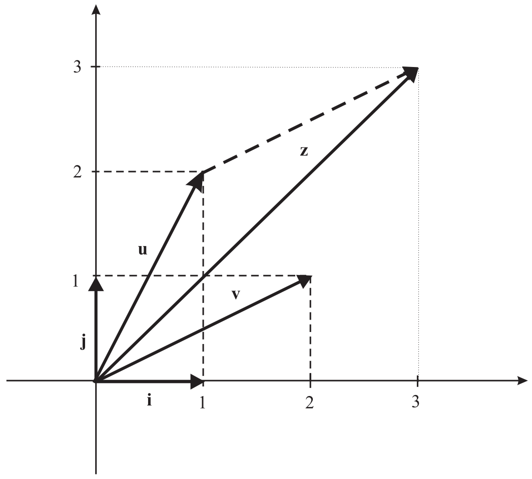
Ha most nem egy, hanem két vektort tekintünk, pl. az előbbi $\mathbf{u} = [1, 2]$ és a $\mathbf{v} = [2, 1]$ vektorokat, akkor azokat úgy tudjuk összegezni, hogy a koordináták értékeit (koordinátánként külön külön) összegezzük: $\mathbf{z} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (1+2)\mathbf{i} + (2+1)\mathbf{j} = [3, 3]$ (l. 2.2. ábra). Ugyanakkor azt is tudjuk, hogy a vektorok szorzása már nem ilyen egyszerű dolog. Először is két fajtája van: a skalár- és a vektorszorzat. Amint nevükből kiderül, két vektor skalárszorzata egy szám (azaz skalár, tehát nem vektor), míg a vektorszorzat vektort ad eredményül. Itt most annyit érdemes fölelevenítenünk, hogy két vektor skalárszorzata az a szám, amelyre

$$x = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \alpha$$

itt az $|\mathbf{u}|$ jelölés a vektor hosszát (abszolút értékét) jelenti, $\alpha$ pedig a két vektor által bezárt szög. A skalárszorzat így is számolható:

$$x = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Amint korábban hangsúlyoztuk, a vektorok fölírása függ a vonatkoztatási rendszertől. Pl. az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorokat elforgathatjuk, ekkor az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorokat más koordináták fogják leírni, de az ábrák jellege ugyanolyan marad. Továbbmenve, az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ bázisvektorok hosszát és egymáshoz viszonyított szögét is megváltoztathatjuk (ha nem is teljesen tetszőlegesen, pl. egy irányba nem mutathatnak).




2.2. ábra. Vektorok összeadása

Eddig a vektorok leírását két bázisvektor segítségével végeztük el. Választhatjuk a leírásnak egészen más módját is. Pl. jellemezhetjük a vektorainkat úgy is, hogy megadjuk a hosszát, valamint az **i** vektorral bezárt szögét. Ebből a két adatból ugyanolyan egyértelműen tudjuk rekonstruálni a vektort, mint az előbbi módszerrel. (Ezt a vektormegadást nevezik polár-koordinátás fölírásnak.) Ennek a fölírási módnak az az előnye, hogy vektorok skalárszorzatát egyszerűen tudjuk kiszámolni. Tekintsük most az $\mathbf{u}_1$ és az $\mathbf{u}_2$ vektorokat polárkoordinátáikkal megadottnak: $\mathbf{u}_1 = [r_1, \phi_1], \mathbf{u}_2 = [r_2, \phi_2]$. Ekkor a skalárszorzatuk a

$$z = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = r_1 r_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

formulával nagyon egyszerűen számolható.

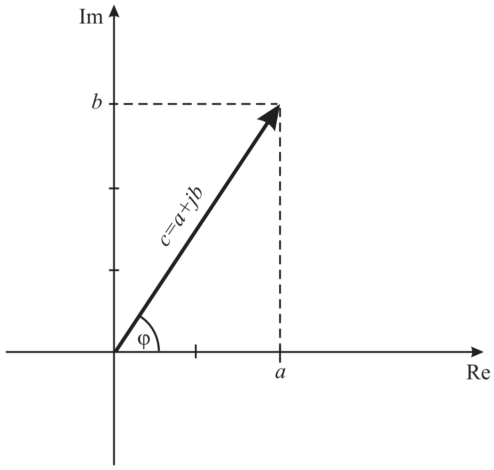
### 2.1.2. A komplex szám

A komplex szám úgy áll elő, hogy kiterjesztjük a valós számok halmazát: számításba vesszük a negatív számok négyzetgyökeit is. (Mivel ezeket a számokat konkrétan elképzelni nem tudjuk, ezért – jobb híján – egy szimbólummal jelöljük: $\sqrt{-1}$, vagy a gyorsabb írásmód végett ezt rövidítjük így: $j = \sqrt{-1}$.)

A negatív számok négyzetgyökeit képzetes számoknak nevezzük, és úgy szoktuk fölírni, mint a $\sqrt{-1}$-nek a szorzatát egy valós számmal. (Ez a fölbontás mindig elvégezhető, hiszen $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1}$.).

Komplex számot akkor kapunk, ha egy *valós* és egy *képzetes* számot összeadunk.

A számfogalomnak ez a kiterjesztése azt eredményezi, hogy a komplex számok nem ábrázolhatók egy számegyenesen, mint a valós számok, hanem csak egy „számsíkon". Tehát a komplex számot fölfoghatjuk úgy, mint egy speciális merőleges koordinátarendszerben fölírt két dimenziós vektort. A vízszintes koordinátatengelyt *valós (reális)* tengelynek, a függőleges tengelyt *képzetes (imaginárius)* tengelynek nevezzük. A képzeletbeli „bázisvektorok" a vízszintes irányban az $1(= \sqrt{1})$, míg a függőleges irányban




2.3. ábra. A komplex szám ábrázolása a komplex számsíkon

a $j = \sqrt{-1}$. Az „1" valós számot persze elhagyjuk, a leírásban csak a $j$ szerepel. Pl. a $c$ komplex szám egy konkrét értéke lehet $c = 2{+}3j$. (l. 2.3. ábra) (Matematikai könyvekben inkább $i$-vel jelölik a -1 négyzetgyökét, elektronikai munkákban a $j$ jelölés terjedt el.)

### 2.1.3. Komplex számok különböző alakjai

A komplex számot megadhatjuk *algebrai* alakban, ez az előző fejezetben bemutatott $c = a{+}jb$ alaknak felel meg. Ez azt jelenti, hogy valós és képzetes rész szerinti fölbontásban adtuk meg a vektort, hiszen ebből az alakból közvetlenül látható, hogy $\mathrm{Re}\{c\} = a$ és $\mathrm{Im}\{c\} = b$. Az algebrai alak tehát megfelel a derékszögű koordinátákkal megadott vektoralaknak.

Az exponenciális alak a vektorok polárkoordinátás megadásával analóg. A $c$ komplex számot az abszolút értékével (hosszával) és a valós tengellyel bezárt szögével is jellemezhetjük:

$$c = a + jb = |c|\, e^{j\varphi}$$

ahol $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ és $\tan\varphi = b/a$. Megjegyzés: ezek szerint $\varphi = \arctan(b/a)$. Mivel a tangens függvény $\pi$ szerint, azaz 180° szerint periodikus, ezért az arctg függvénynek 0-360 fok tartományban mindig két megoldása van. Azt, hogy nekünk melyikre van szükségünk abból tudjuk meg, hogy megvizsgáljuk, hogy az adott komplex szám melyik síknegyedben van.

Az algebrai és az exponenciális alak között az Euler-reláció teremt kapcsolatot, ezért ezt nagyon fontos fejből tudni:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi \tag{2.1}$$

*(Megjegyzés: Első ránézésre nagyon meglepő, hogy egy, a valós világban nem periodikus függvény (az $e^x$) komplex változó esetén periodikus lesz. Ennek intuitív magyarázatát*

*néhány sorral lentebb fogjuk látni. Az összefüggést az* $e^{j\varphi}$ *0-körüli Taylor-sorfejtésével lehet megmutatni:*

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= 1 + j\varphi + \frac{j^2}{2!}\varphi^2 + \frac{j^3}{3!}\varphi^3 + ... = \\ &= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - ... + j\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - ...\right) = \\ &= \cos\varphi + j\sin\varphi \end{aligned}$$

*hiszen*

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - ... \\ \cos\varphi &= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - ... \end{aligned}$$

*Vagyis az* $e^{j\varphi}$ *Taylor-sorában fölismertük a cos és a jsin Taylor-sorát.)*

Ezek alapján

$$\mathrm{Re}\left\{e^{j\varphi}\right\} = \cos\varphi \tag{2.2}$$

és

$$\mathrm{Im}\left\{e^{j\varphi}\right\} = \sin\varphi \tag{2.3}$$

illetve

$$\left|e^{j\varphi}\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1 \tag{2.4}$$

Ezek szerint a $c$ szám fölírható így is:

$$c = |c|e^{j\varphi} = |c|\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right) \tag{2.5}$$

Néhány fontos összefüggés:

$$j^2 = -1$$

$$j^3 = -j$$

$$j^4 = 1$$

$$j^5 = j \cdot j^4 = j$$

és így tovább, ugyanakkor természetesen ez a fajta periodikusság negatív kitevőkre is igaz:

$$j^0 = 1$$

$$j^{-1} = (\frac{1}{j} =) - j$$

$$j^{-2} = (\frac{1}{j^2} =) - 1$$

és így tovább. Másrészről

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{j90^\circ} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = j$$

Ezt az összefüggést úgy láthatjuk be legegyszerűbben, hogy magunk elé képzeljük a $e^{j\frac{\pi}{2}}$ számot reprezentáló vektort (fazort) a komplex számsíkon. Abszolútértéke 1, fázisszöge $\pi/2$, azaz 90°, vagyis az imaginárius tengely irányába mutat. Ugyanilyen megfontolással

$$e^{j\pi} = e^{j180^\circ} = -1$$

### 2.1.4. Komplex számok összeadása

Mint tudjuk, a derékszögű bázisrendszerben megadott vektorokat komponensenként adjuk össze. A komplex számok esetén is ezt az utat járhatjuk, ha a komplex szám algebrai alakjában van megadva. Például legyen $c = c_{re} + jc_{im}$ és $d = d_{re} + jd_{im}$. Ekkor

$$c + d = (c_{re} + d_{re}) + j(c_{im} + d_{im})$$

Ha több számot kell összeadni, akkor is ugyanígy járunk el. Kivonáskor a komponenseket kivonjuk egymásból.

Exponenciális alakban megadott számok összeadása nehézkes, legcélszerűbb algebrai alakra átírni az egyes számokat, s úgy adni össze. Például:

$$\begin{aligned} 3e^{j60^\circ} + 4e^{j45^\circ} &= (3\cos 60^\circ + 4\cos 45^\circ + j\,(3\sin 60^\circ + 4\sin 45^\circ) \\ &= 4.33 + j5.43 = 6.94e^{j51.4^\circ} \end{aligned}$$

### 2.1.5. Komplex számok szorzása

Ha a számok exponenciális alakban vannak megadva, akkor a legegyszerűbb a helyzetünk. Hatványokat ugyanis úgy szorzunk, hogy a kitevőiket összeadjuk. Például:

$$3e^{j60^\circ} \cdot 4e^{j45^\circ} = 3 \cdot 4e^{j60^\circ+45^\circ} = 12e^{j105^\circ}$$

Osztásnál a kitevőket – értelemszerűen – kivonni kell egymásból. Például:

$$\frac{3e^{j60^\circ}}{4e^{j45^\circ}} = 3e^{j60^\circ} \cdot \frac{1}{4}e^{-j45^\circ} = \frac{3}{4}e^{j15^\circ}$$

Itt azt használtuk ki, hogy egy exponenciális alakban megadott szám reciproka kiszámolható úgy, hogy a kitevő előjelét megfordítjuk.

Megjegyzés: figyeljünk föl arra, hogy míg a komplex számok összeadása megegyezett a vektorok összeadásával, addig a komplexek szorzása nem egyezik meg a vektoroknak sem a skalár sem a vektorszorzatával.

Algebrai alakban adott számokat vagy az összegek szorzatának kiszámítási szabályát alkalmazva szorzunk össze, vagy pedig átírjuk exponenciális alakba, s az előzőek szerint járunk el. Lássunk egy példát:

$$(1 + 2j)(3 + 4j) = 3 + 6j + 4j + 6j^2 = 3 + 10j - 8 = -5 + 10j$$

Előfordulhat az is, hogy két komplex számot összeadva vagy összeszorozva tisztán valós vagy éppen tisztán képzetes számot kapunk. Például:

$$(1+2j)(1-2j) = 1 + 2j - 2j + (-4j^2) = 1 + 4 = 5$$

Ha most ezt a két számot osztjuk egymással, akkor

$$\frac{1+2j}{1-2j} = \frac{1+2j}{1-2j} \cdot \frac{1+2j}{1+2j}$$

bővítéssel juthatunk eredményre. Ekkor a nevezőben az előbb kiszámolt szorzat szerepel, ennek értéke 5, tehát

$$\frac{1+2j}{1-2j} = \frac{(1+2j)^2}{5} = \frac{1+4j+4j^2}{5} = -\frac{3}{5} + j\frac{4}{5}$$

Jegyezzük meg, hogy az olyan számpárost, amelyek csak a képzetes részük előjelében térnek el (azaz csak a fázisszögük előjele különböző), *konjugált* számpárnak hívjuk. Ezek szorzata mindig valós számot ad, hiszen ha exponenciális alakban gondolkozunk:

$$ae^{j\varphi} \cdot be^{-j\varphi} = abe^0 = ab$$

Exponenciális alakban megadott számok osztása a szorzáshoz hasonlóan végezhető, hiszen minden exponenciális alakban adott komplex számnak nagyon egyszerű képezni a reciprokát:

$$\frac{1}{ae^{jx}} = \frac{1}{a}e^{-jx}$$

## 2.2. A váltakozó feszültség és áram

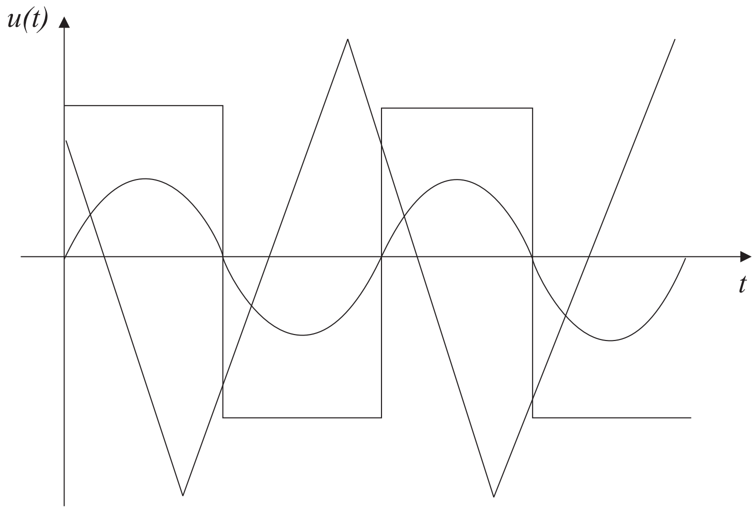
A váltakozó villamos mennyiségek intuitív definíciója az lehetne, hogy – ahogy a nevéből következik – az időben váltakozik az előjele. Ennél azonban precízebb definícióra van szükségünk. *Váltakozó jelnek azt a jelet nevezzük, amely periódikus, és egy periódusidő alatti középértéke zérus.* Matematikailag ezt úgy fejezzük ki, hogy az egy periódusra vett integrálja 0:

$$\int_0^T u(t)dt = 0$$

ahol $u(t)$ a szóban forgó váltakozó jel, $T$ pedig a periódusideje.

Figyeljük meg, hogy a konkrét jelalakra semmilyen megkötést nem tettünk! Lássunk néhány példát váltakozó jelekre, ennek a definíciónak az értelmében (lásd 2.4. ábra) Az összes lehetséges jelalak közül kiemelten fontos szerepe van a szinuszosan változó mennyiségeknek. Három okból:

1. A gyakorlatban működő generátorok ilyen alakú feszültséget állítanak elő (azaz ilyet tudunk egyszerűen létrehozni)




2.4. ábra. Különböző jelalakú periódikus, 0-középértékű váltakozó jelek

2. Egyszerűen belátható, hogy ha egy hálózat generátorának a jele $\omega$ körfrekvenciájú szinuszosan változó mennyiség, akkor a hálózat bármelyik elemén mind a feszültség, mind az áram ugyanilyen körfrekvenciájú szinuszosan változó mennyiség. Eltérés csak a nagyságukban és a kezdőfázisukban lehet. *Ez azt jelenti, hogy a bemenő és kimenő jelalak megegyezik. Ez kizárólag szinuszos mennyiségekre igaz.*

3. Bebizonyítható, hogy bármilyen periódikus (sőt nem periódikus) jel fölbontható szinuszos jelek összegére. A szuperpozíció elve alapján ezeknek a szinuszos összetevőknek a hatása külön-külön vizsgálható egy áramkörben, azaz *tetszőleges bemenő jelnek a vizsgálata visszavezethető szinuszosan változó jelek vizsgálatára.* (Ennek matematikai apparátusa a Fourier sorfejtés és a Fourier transzformáció.)

A szinuszosan változó mennyiségek időfüggvényének általános alakja:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi) \tag{2.6}$$

$U_0$-t a jel csúcsértékének nevezzük, $\omega$ a körfrekvencia (ez a változási sebességet mutatja meg), $\varphi$ pedig a kezdőfázis, ebből arra következtethetünk, hogy a függvényünknek mekkora az értéke a $t = 0$ időpillanatban.

### 2.2.1. Emlékeztető

A szinusz illetve a koszinusz függvény egymástól csak egy 90°-os időtengely-menti eltolásban különbözik:

$$\sin \omega t = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Továbbá a szinusz és a koszinusz 180°-kal való eltolása önmagának a -1-szeresét adja:

$$\cos(\omega t - \pi) = -\cos(\omega t)$$

## 2.3. A szinuszos feszültségű hálózatok számítása

Az előző pontban utaltunk rá, hogy a szinuszos feszültségű hálózatok számítása azért kiemelten fontos, mert ebben az esetben egy hálózat *minden* elemén *mind a feszültség mind az áram* azonos alakú időfüggvény (adott frekvenciájú szinuszos mennyiség), eltérés csak az amplitúdóban és a kezdőfázisban lehetséges. (Továbbá, hangsúlyozzuk, az is igaz, hogy tetszőleges jel fölbontható különböző frekvenciájú szinuszos jelek összegére, ezek mint külön generátorok értelmezhetőek, amelyeknek a hatása egyenként vehető figyelembe. Vagyis ha szinuszos hálózatokat tudunk számítani, akkor lényegében minden más jelalak esetében is minden feszültséget és áramot meg tudunk határozni a hálózat tetszőleges elemén). Ez a hálózatszámítás szempontjából azt jelenti, hogy egy *időfügvény* összesen *két számmal* jellemezhető, az amplitúdójával és a kezdőfázisával.

A célunk az, hogy az egyenáramú hálózatoknál alkalmazott törvényeket szinuszos hálózatok esetén is alkalmazni tudjuk. Ehhez egy matematikai segédeszközt, az ún. komplex számítási módszert fogjuk alkalmazni. Hangsúlyozzuk, hogy ez egy matematikai eszköztár, aminek az alkalmazásával az egyenáramoknál megszokott törvényeket, összefüggéseket (Kirchhoff törvények, feszültség- és áramosztó, stb.) továbbra is használni tudjuk.

### 2.3.1. A komplex számítási módszer

#### A szinuszos feszültségek és áramok jellemzése

Legyen adott egy feszültséggenerátor, amelynek ismerjük a feszültség-idő függvényét, s ez szinuszosan változó:

$$u(t) = U_o \cos(\omega_o t + \varphi)$$

Megjegyzés: Tudjuk, hogy a szinusz illetve a koszinusz függvény csak egy 90°-os eltolásban különböznek, maga a jelalak megegyezik. A későbbiekben látható okok miatt az villamosságtanban inkább a koszinusz függvényt használjuk.

Ehhez a valós feszültség-idő függvényhez rendeljünk hozzá egy komplex feszültség-idő függvényt az alábbi szabály szerint:

$$\bar{u}(t) = U_o e^{j(\omega t + \varphi)} = U_o e^{j\omega t} e^{j\varphi} \tag{2.7}$$

Az (2.1) Euler-összefüggés alapján tudjuk, hogy ennek a komplex időfüggvénynek a valós része az eredeti valós időfüggvény:

$$\mathrm{Re}\{\bar{u}(t)\} = \mathrm{Re}\left\{U_o e^{j\omega t} e^{j\varphi}\right\} = u(t) = U_o \cos(\omega_o t + \varphi)$$

Általánosan is igaz az, hogy a számolás során bármikor vehetjük a komplex időfüggvény valós részét, így mindig megkapjuk a valós időfüggvényt. Ezután a számolást tovább egyszerűsíthetjük azzal, hogy a (2.7) szerinti komplex időfüggvényből elhagyjuk azt a tagot – az $e^{j\omega t}$-t –, amelyik mindig, a hálózat minden feszültsége és árama esetében ugyanaz. Az így megmaradó

$$\hat{\bar{U}} = U_o e^{j\varphi} \tag{2.8}$$

kifejezést nevezzük komplex csúcsértéknek. Látható, hogy ebben a kifejezésben szerepel az, hogy mekkora a szinuszos jelünk amplitúdója és az, hogy mekkora a kezdőfázisa. (A frekvencia ugyanakkora, mint a generátoré.)

### Az impedancia

A váltakozó áramú hálózatokban generátorok, ellenállások, tekercsek és kondenzátorok vannak. A generátorok komplex helyettesítésével (komplex csúcsérték) az előző pontban foglalkoztunk. A passzív elemek (ellenállás, tekercs, kondenzátor) komplex jellemzésére az impedancia fogalmát vezetjük be. Az impedancia komplex mennyiség, amely magában foglalja azt, hogy az adott hálózati elemnek adott frekvencián mekkora az „ellenállása”, ugyanakkor azt is, hogy az energiatárolók (tekercs, kondenzátor) esetében a feszültség és az áram között milyen fáziseltérés mutatkozik. A levezetések mellőzésével:

$$Z_R = R \tag{2.9}$$

azaz az ellenállás frekvenciától függetlenül mindig valós, $R$ ellenállásként viselkedik, ugyanúgy, mint ahogy azt az egyenáramú hálózatokban megszoktuk.

$$Z_L = j\omega L \tag{2.10}$$

vagyis az $L$ induktivitású tekercs impedanciája függ attól, hogy a hálózat generátorának milyen a körfrekvenciája. Minél nagyobb ez a frekvencia, a tekercs annál nagyobb ellenállást mutat. Az impedanciája tisztán képzetes. A $C$ kapacitású kondenzátor impedanciája

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \tag{2.11}$$

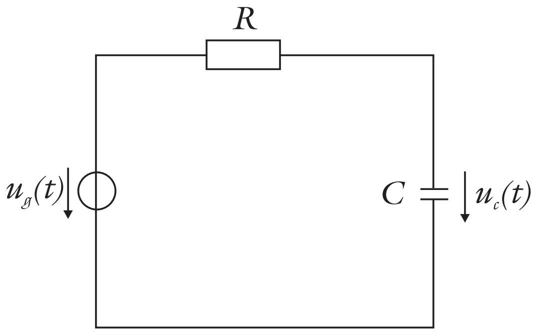
Ebből a kifejezésből az látszik, hogy minél nagyobb a hálózat frekvenciája, a kondenzátor annál kisebb „ellenállást” tanúsít (a váltakozó feszültséggel szemben).

### A hálózatszámítás menete

*Szinuszosan váltakozó áramú hálózatokat úgy számolunk, hogy a generátorok feszültség-idő (ill. áram-idő) függvényeit komplex csúcsértékükkel helyettesítjük, míg a passzív elemeket komplex impedanciájukkal. Ezek után az egyenáramú hálózatok elemzése során használt Kirchhoff-törvényeket használjuk, a különbség összesen annyi, hogy a generátorok feszültségei, áramai, illetve bármely alkatrész feszültségét ill. áramát a komplex csúcsértékével, a passzív elemeket pedig impedanciájukkal vesszük figyelembe.*

### Példa

Vizsgáljuk meg a 2.5. ábrán látható kapcsolást, s mondjuk meg, milyen a kondenzátoron eső feszültség időfüggvénye? A feszültséggenerátor időfüggvénye: $u_g(t) = U_o \sin(\omega t)$, $U_o =$ 1V, $\omega = 100$ rad/s, $R = 680\Omega$, a kondenzátor kapacitása $C = 47\mu$F.




2.5. ábra. A példában szereplő kapcsolás

Megoldás. Első dolgunk az, hogy a feszültséggenerátor időfüggvénye helyett vesszük a komplex időfüggvényt (a komplex számot, függvényt – ha hangsúlyozni akarjuk hogy komplex – felülvonással jelöljük):

$$\bar{u}_g(t) = U_o e^{j\omega t+\varphi}$$

ebből pedig kiszámoljuk a komplex csúcsértéket (Ehhez először a szinusz függvényt koszinusszá „alakítjuk”: $U_o \sin \omega t = U_o \cos(\omega t - 90°)$):

$$\hat{\bar{U}} = U_o e^{j\varphi} = U_o e^{-j90°}$$

A generátor feszültség-idő függvényét ezzel a komplex számmal helyettesítjük. Ezután kiszámoljuk a hálózatban levő passzív elemek impedanciáját. Az ellenállás impedanciája megegyezik az ellenállás értékével: $Z_R = R$ (valós), a kondenzátor impedanciája $1/(j\omega C)$ (tisztán képzetes). Miután minden hálózati elemet helyettesítettünk a komplex megfelelőjével, ezután a korábban tanult szabályok szerint járunk el. A legkézenfekvőbb a feszültségosztó képlet alkalmazása:

$$\hat{\bar{U}}_C = \hat{\bar{U}}_g \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \hat{\bar{U}}_g \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} \tag{2.12}$$

Ezzel lényegében meg is adtuk a választ, csak annyi van hátra, hogy $\hat{\bar{U}}_C$ komplex csúcsérték kifejezését olyan alakra hozzuk, amiből egyből ki tudjuk olvasni az időfüggvényt (hiszen végső soron mindig ez a fontos kérdés). Behelyettesítve a konkrét számértékeket:

$$\hat{\bar{U}}_g \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = 1e^{j\pi/2} \frac{-j\frac{1}{100 \cdot 4.7 \cdot 10^{-5}}}{680 - j\frac{1}{100 \cdot 4.7 \cdot 10^{-5}}} =$$

$$= 1e^{j\pi/2} \frac{-j212.8}{680 - j212.8} = e^{j\pi/2} \frac{212.8 e^{-j\pi/2}}{\sqrt{680^2 + 212.8^2} e^{j\alpha}}$$

ahol $\alpha$ a nevezőben levő komplex szám fázisa, hiszen exponenciális alakra kell ahhoz áttérnünk, hogy a valós időfüggvényt egyszerűen kiolvashassuk a komplex csúcsértékből. (Ne felejtsük: a komplex számítási módszer alkalmazásával minden feszültséget és áramot komplex csúcsértékben fogunk megkapni). $\alpha$-ról a következőt tudjuk (ha a komplex számsíkon elképzeljük a nevezőben levő számot (vektort): a szám a IV. síknegyedben van, tehát $\alpha$ $-90°$ és $0°$ között van. Ezt azért fontos előre tisztázni, mert a komplex szám valós és képzetes részéből azt tudjuk kiolvasni, hogy mekkora a fázisszög tangense:

$$\tan\alpha = -212.8/680$$

(Megjegyzés: mivel a tg függvény 180°-onként periodikus, ezért számológép használatával csak -90 és +90° közötti eredményeket kapunk az arctg függvény alkalmazásával. Ezért mindig meg kell fontolni, hogy a komplex szám a számsík melyik negyedében van, és szükség esetén (II. és III. síknegyed) „kézzel", 180° hozzáadásával kell korrigálni a kapott eredményt.) Ebből $\alpha = -17.38° = -0.3036$ rad adódik. Vagyis

$$\hat{\bar{u}} = e^{j\pi/2}\frac{212.8e^{-j\pi/2}}{\sqrt{680^2+212.8^2}e^{-j0.3036}} = \frac{212.8}{\sqrt{680^2+212.8^2}e^{-j0.3036}} =$$

$$= \frac{212.8}{712.5}e^{j0.3036} = 0.2987e^{j0.3036}$$

Ebből az időfüggvény közvetlenül kiolvasható, a tanulság kedvéért azonban most részletezzük a következők szerint: először a komplex csúcsértékből előállítjuk a komplex időfüggvényt. Tudjuk, hogy ez egy $e^{j\omega t}$-vel való szorzást jelent:

$$\bar{u}(t) = 0.2987e^{j0.3036}e^{j\omega t} = 0.2987e^{j(\omega t+0.3036)}$$

A komplex időfüggvény valós részét véve kapjuk a valós (valódi) időfüggvényt (lásd (2.1)):

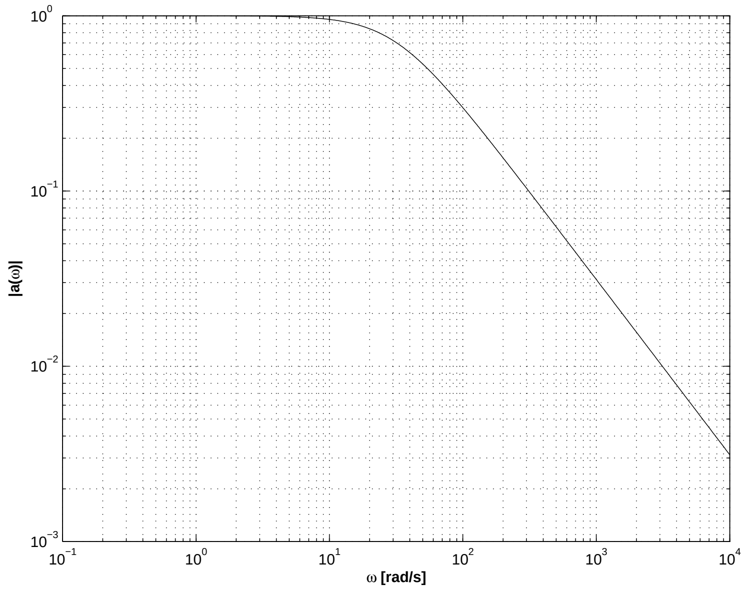
$$u(t) = \mathrm{Re}\{\bar{u}(t)\} = 0.2987\mathrm{V}\cos(\omega t + 0.3036)$$

### 2.3.2. Az átviteli karakterisztika

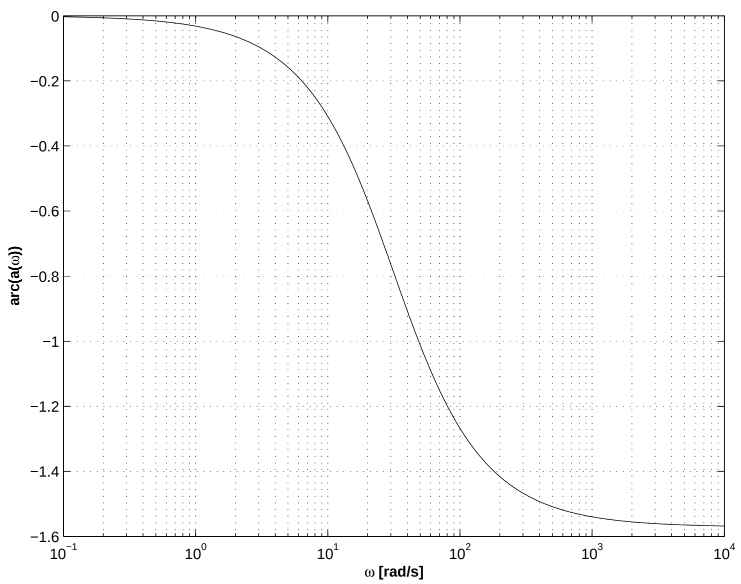
Láttuk, hogy a tekercs és a kondenzátor impedanciája frekvenciafüggő. Ez azt jelenti, hogy más és más frekvenciákon más és más nagyságú „ellenállást" mutatnak. Az előbbi példánál maradva tekintsük az (2.13) összefüggést. Fejezzük ki az $U_C(t)/U_g(t)$ hányadost, ezt nevezzük átviteli karakterisztikának:

$$\bar{a}(\omega) = \frac{\hat{\bar{U}}_C}{\hat{\bar{U}}_g} = \frac{1/(j\omega C)}{R+1/(j\omega C)} = \frac{1}{1+j\omega RC} \qquad (2.13)$$

Ha most ezt a hányadost úgy szemléljük, mint egy hálózat kimeneti feszültségének és bemeneti feszültségének a hányadosát, akkor konkrét $\omega$ esetén meg tudjuk mondani, mekkora a csillapítás illetve mekkora a hálózat fázisforgatása (vagyis a kimeneti feszültség fázisa hogyan viszonyul a bemeneti feszültség fázisához). Ilyen példát oldottunk meg az előbb. Ha most azt szeretnénk kifejezni, hogy a frekvencia függvényében hogyan viselkedik a hálózat, akkor az $\bar{a}(\omega)$ függvényt kellene ábrázolnunk. Mivel ez egy komplex értékű függvény, ezért ennek az ábrázolása nem magától értetődő. Az egyik legelterjedtebb megoldás, hogy az $\bar{a}(\omega)$ abszolútértékét illetve az $\bar{a}(\omega)$ fázisát ábrázolják a frekvencia függvényében. Ez az




2.6. ábra. Az átviteli karakterisztika ($\bar{a}(\omega)$) abszolútértéke




2.7. ábra. Az átviteli karakterisztika ($\bar{a}(\omega)$) fázisszöge esetünkben a 2.6. és 2.7. ábrákon látható. Az átviteli karakterisztika abszolútértékét mind a függőleges mind a vízszintes tengelyen logaritmikus léptékben szoktuk ábrázolni, akkor két egyenessel jól közelíthető görbét kapunk. Azt a pontot, ahol a két közelítő egyenes metszené egymást, törésponti frekvenciának nevezzük (ez esetünkben – a levezetés mellőzésével – $\omega = 1/RC = 31 rad/s$ körfrekvenciánál van. csillapítás 3dB, nevezzük törésponti frekvenciának. (Esetünkben ez 30 rad/s). Ez alatt a frekvencia alatt az átvitel egységnyinek tekinthető, ennél nagyobb frekvenciákon – a frekvencia növekedtével – egyre nagyobb a csillapítás. A 2.7. ábrán az átviteli karakterisztika fázisszögét ábrázoltuk, vagyis azt, hogy mekkora a hálózat fázistolása. Látható, hogy igen kis frekvenciákon nincs fázistolás, a törésponti frekvencián 45° ($\pi/4 = 0.785$ rad), nagy frekvenciákon 90° ($\pi/2 = 1.571$ rad).

Ez a hálózat tehát olyan tulajdonságú, hogy a kisfrekvenciás bemenőjeleket gyakorlatilag csillapítás nélkül átereszti, a nagyfrekvenciás jeleket viszont erősen csillapítja. Az ilyen hálózatot aluláteresztő szűrőnek nevezzük. Ez a hálózat a legegyszerűbb (ún. elsőfokú, mivel egy energiatároló, a kondenzátor van a kapcsolásban) aluláteresztő.

# 3. fejezet

# Periodikus gerjesztés számítása

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogyan lehet egy periodikus jelet szinuszos jelek összegeként fölírni. Ebben az esetben az egyes szinuszos összetevőkre az eddig tanult módon kiszámíthatjuk a választ. A szuperpozíció elve alapján pedig a teljes válasz a részválaszok összegeként határozható meg.

## 3.1. Periodikus jelek tulajdonságai

### 3.1.1. Miért fontosak?

A gyakorlatban előforduló jelek széles osztálya közelíthető periódikus jellel. (Pl. beszédjel, l. később)

### 3.1.2. Definíció

Intuitív definíció: Van egy olyan jel-részlet, amelyből ,,kirakható" az egész jel, az idők kezdetétől a végéig. (A periódikus jelek – a szinuszos jelekhez hasonlóan – nem alkalmasak tehát tranziensek, bekapcsolási jelenségek modellezésére). Egzakt definíció:

$$u(t + nT) = u(t)$$

Itt $T$ a legkisebb ilyen tulajdonságú idő, neve *periódusidő*.

### 3.1.3. Periodikus jelek jellemző mennyiségei

1. Középérték (Egyen- vagy más néven DC-összetevő[1]): egy periódusra vett átlagérték

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \mathrm{d}t$$

[1] Direct Current – egyenáram kifejezésből. Ennek ellentéte AC – alternating current, váltakozó áram. Az AC-DC kifejezést feszültségre (illetve bármilyen más típusú jelre) is szoktuk használni

2. Effektív érték (a jel energiájának számolásakor hasznos elsősorban):

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t$$

3. Csúcsérték: a jel legnagyobb pillanatértéke:

$$\hat{U} = \max u(t)$$

4. Csúcstényező: a csúcsérték és az effektív érték hányadosa. Arra utal, hogy a jel nagyságához képest mekkora az energiatartalom:

$$K = \frac{\hat{U}}{U_{eff}}$$

**Szinuszos jel effektív értéke.** Számoljuk ki az $U_0$ csúcsértékű szinuszos jel effektív értékét! A definíció alapján a feladat:

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T U_0^2 \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Mivel $\omega$ körfrekvencia esetén a periódusidő $T = 2\pi/\omega$, így

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T U_0^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t$$

A $\cos^2(x) = (1 - \cos 2x)/2$ azonosságot használva:

$$U_{eff}^2 = \frac{U_0^2}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)}{2}\right)\mathrm{d}t$$

Az integrál tagonként számítható:

$$U_{eff}^2 = \frac{U_0^2}{T}\left\{\left[\frac{t}{2}\right]_0^T - \left[\frac{\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)}{2}\right]_0^T\right\}$$

Itt a második tag egy szinuszos jel integrálja 2 periódusra, amely 0-t ad, tehát

$$U_{eff}^2 = \frac{U_0^2}{T}\frac{T}{2} = \frac{U_0^2}{2}$$

azaz

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

**Négyszögjel effektív értéke.** Számoljuk ki a $[0, T/2]$ tartományban $+U_0$, míg a $[T/2, T]$ tartományban $-U_0$ értékű négyszögjel effektív értékét!

Mivel ennek a jelnek a négyzete konstans $U_0^2$, ezért

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T U_0^2\mathrm{d}t = U_0^2$$

vagyis a csúcsérték és az effektív érték megegyezik.

## 3.2. Fourier-sorfejtés

Most arról lesz szó, milyen matematikai módszerrel lehet periódikus jeleket (különböző frekvenciájú) szinuszok összegére bontani. Ezt nevezzük Fourier-sorfejtésnek.

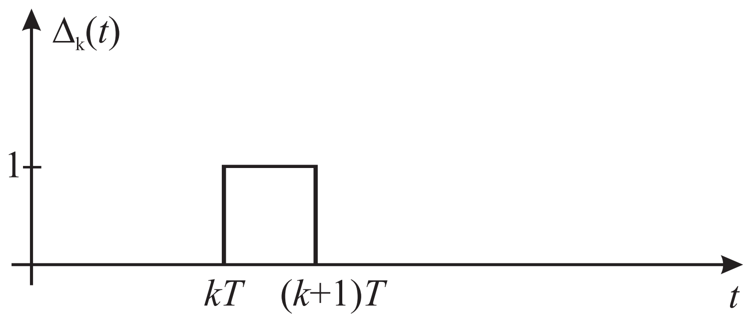
### 3.2.1. Az időfüggvény („időtartomány") értelmezése

Jeleket többféle módon megadhatunk, jellemezhetünk. Első ránézésre a jelek jellemzésének legkézenfekvőbb módja az ún. időtartománybeli leírás (ennek az elnevezésnek az értelmét később látni fogjuk). Ilyenkor tulajdonképpen egy feszültség-idő vagy áram-idő függvényt adunk meg, amennyiben rögzítjük a mért mennyiség időbeli változását.

A későbbiek megértése szempontjából hasznos lesz a következő – egyelőre a dolgok elbonyolításának tűnő – szemlélet. Tekintsük a következő függvénysereget:

$$\Delta_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad kT \le t \le (k+1)T \\ 0 & \text{egyebkent} \end{cases}$$

ahol $T$ egy előre definiált időtartam. (l. 3.1. ábra). Ezen függvények lineáris kom-

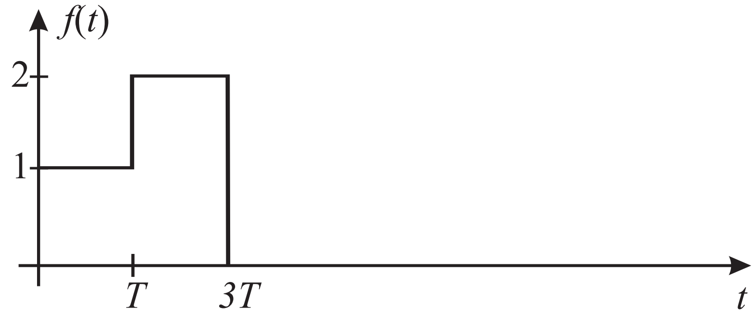



3.1. ábra. A $\Delta_k(t)$ függvény

binációjával[2] tetszőleges – $T$ egész számú többszörösei között konstans – függvény leírható. Pl. a 3.2 ábrán látható $f(t)$ kifejezhető a $\Delta_k$-k alábbi lineáris kombinációjával:

$$f(t) = 0\Delta_{-\infty}(t) + ... + 1\Delta_0(t) + 2\Delta_1(t) + 2\Delta_2(t) + 0\Delta_3(t) + ... + 0\Delta_\infty(t)$$

[2]a lineáris kombináció egy „keverési útmutató", melyik függvényből „mennyit kell venni" a kívánt eredmény eléréséhez




3.2. ábra. Egy lépcsős függvény

Ha $T$ értékét minden határon túl rövidítjük, akkor tetszőleges folytonos függvényt le tudunk ilyen módon írni: vagyis minden időpillanatban megadjuk a függvényértéket.

Vegyük észre, hogy a $\Delta_k(t)$ függvények speciális tulajdonságúak: ortogonálisak (merőlegesek) egymásra[3]. Két függvény – a vektorokhoz hasonlóan – akkor ortogonális, ha skalárszorzatuk nulla[4]: $\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_i(t)\Delta_j(t)\mathrm{d}t = 0$ ha $i \neq j$.

### 3.2.2. Frekvenciatartománybeli leírás

Tehát ha egy jelet időfüggvénnyel jellemzünk, akkor tulajdonképpen nem teszünk mást, mint minden lehetséges időpillanatra megadjuk a jel konkrét értékét, persze ebből végtelen sok van. Ha a jelet táblázatos formában kívánnánk megadni, akkor végtelen sok bejegyzést kéne tennünk, azaz tulajdonképpen egy végtelen dimenziós vektorhoz jutnánk, ahol a vektor egyes koordinátái a ,,soronkövetkező" pillanatbeli értéket tartalmaznák. (A függvények – jól ismert – matematikai leírása egy egyszerűsített eszköz a ,,végtelen dimenziós vektor" tömör jellemzésére: egy ,,recept" amellyel tetszőleges kívánt időpontban meghatározható a jel értéke, más szóval ,,igény esetén" bármelyik koordináta kiszámítható).

Ismert, hogy vektorok különböző koordináta-rendszerekben (más szóval bázisvektorok segítségével) leírhatók. Az egyes vektorokat jellemző szám $N$-esek ($N$-dimenziós vektorok esetén) értékei attól függnek, hogy milyen koordináta-rendszert (bázisvektor-rendszert) használunk. Pl. a síkbeli vektorok esetét tekintve a vízszintes-függőleges koordináta rendszerben (vízszintes és függőleges egységvektorok[5]) a $\sqrt{2}$ hosszú, $45o$-os vektor koordinátái: $[1, 1]$, míg egy, az óramutatóval ellentétes irányban $45^o$-kal elforgatott koordináta-rendszerben *ugyanezen* vektort jellemző koordináták: $[\sqrt{2}, 0]$.

Ezek után nem meglepő, hogy a függvények (azaz a ,,végtelen dimenziós" vektorok is ábrázolhatóak más ,,koordinátarendszerben". A vektorok esetében az átszámítást koordináta-transzformációnak neveztük, a függvények esetében függvény-transzformációnak.

Válasszunk most jeleink ábrázolásához más ,,koordináta rendszert", hátha így fon-

[3]Általában vektorok megadásakor is az ilyen koordináta-rendszereket kedveljük

[4]Függvények skalárszorzata nem más, mint a szorzatuk integrálja; komplex függvények esetén az egyik függvény és a másik konjugáltjának a szorzatának az integrálja.

[5]Eleve kérdéses, hogy mihez viszonyítjuk a víiszintest, de jobb kifejezést itt nehéz adni, ábra nélkül – majd pótlom

tos tulajdonságok nyilvánvalóbban láthatóvá válnak. Az új bázisfüggvények (gondoljunk bázisvektorokra) különböző frekvenciájú szinuszos függvények lesznek. A Fourier-sorfejtés arra ad választ, hogy milyen frekvenciájú, illetve milyen amplitudójú és fázisú szinuszok összegeként írhatók fel a periódikus jelek. A megoldás hasonló a vektorok bázistranszformációjánál megszokottakhoz: a transzformálandó vektort le kell vetíteni az egyes bázisvektorokra. A vektorok világában a vetítést a skalárszorzattal hajtottuk végre, a űfüggvények világában is skalárszorzatnak nevezik. Végrehajtása a két függvény szorzatának az integrálásával történik.

**Definíció.**

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{U}_k e^{jk\omega_0 t} \tag{3.1}$$

itt

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

illetve a kérdéses együtthatók kiszámítása:

$$\bar{U}_k = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{3.2}$$

Ez utóbbi formulában érhető tetten a fönt említett ,,vetítés": a transzformálandó $u(t)$ függvény és a különböző frekvenciájú komplex szinuszos függvények $e^{jk\omega_0 t}$ (konjugáltjának) a szorzatát integráljuk 1 periódusra. Látszik, hogy a felbontásban (az $U_0$ konstanson kívül $\omega_0$ illetve annak egész számú többszörös frekvenciái szerepelnek. Az $\omega_0$ frekvenciájú összetevő *alapharmónikusnak*, míg ennek többszöröseit *felharmónikusoknak* nevezik.

Fontos: Talán meglepő, hogy a $e^{-jk\omega_0 t}$ kifejezésre ,,szinuszos"-ként hivatkozunk. Ennek oka, hogy ennek valósrésze: $\mathrm{Re}\left\{e^{-jk\omega_0 t}\right\} = \cos k\omega_0 t$ az Euler-képlet értelmében.

**Megjegyzések.** 1. A komplex $\bar{U}_k$ együtthatók hordozzák a szinuszos összetvők amplitúdó- és fázis információit (ahogy azt már megszoktuk). Az $\bar{U}_k$ sorozatot Fourier-együtthatóknak, vagy röviden *spektrumnak* nevezik.

2. A jel középértékét megadja a 0 indexű *spektrális összetevő*:

$$\bar{U}_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\mathrm{d}t$$

vagyis éppen a jel középértékét (DC-komponensét) adja.

3. A (3.2) definícióból következik, hogy *valós* u(t) esetén

$$\bar{U}_k = \bar{U}_{-k}^*$$

ahol * a komplex konjugálást jelöli, illetve

$$u(t) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{U}_k e^{jk\omega_0 t} = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\bar{U}_k e^{jk\omega_0 t} + \bar{U}_{-k}e^{-jk\omega_0 t}\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \bar{U}_k e^{jk\omega_0 t} + \bar{U}_k^* \left( e^{-jk\omega_0 t} \right)^* \right) = \\
&= U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathrm{Re} \left\{ \bar{U}_k e^{jk\omega_0 t} \right\} = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathrm{Re} \left\{ U_k e^{j\varphi} e^{jk\omega_0 t} \right\} = \\
&= U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2U_k \cos\left( k\omega_0 t + \varphi_k \right)
\end{aligned}
$$

Megjegyzés: Látszik, hogy a Fourier-együtthatók komplex leírásában szereplő (első ránézésre meglepő) negatív frekvenciák csak a valós írásmódban ,,eltűnnek", matematikai segédeszköznek tekintendők, konkrét fizikai értelmük csak a pozitív frekvenciáknak vannak.

### 3.2.3. Példa Fourier-együtthatók számítására

Számítsuk ki a $[0, T/2]$ tartományon konstans 1, a $[T/2, T]$ tartományon konstans -1 értékű periodikus négyszögjel spektrumát (Fourier-összetevőit)!

A definíciós egyenletből kell kiindulni:

$$
\begin{aligned}
\bar{U}_k &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-jk\omega_0 t} \mathrm{d}t = \\
&= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} 1 \cdot e^{-jk\omega_0 t} \mathrm{d}t + \frac{2}{T} \int_{T/2}^{T} -1 \cdot e^{-jk\omega_0 t} \mathrm{d}t = \\
&= \frac{2}{T} \left\{ \int_0^{T/2} e^{-jk\omega_0 t} \mathrm{d}t - \frac{2}{T} \int_{T/2}^{T} e^{-jk\omega_0 t} \mathrm{d}t \right\} = \\
&= \frac{2}{T} \left\{ \left[ \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} \right]_0^{T/2} - \left[ \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} \right]_{T/2}^{T} \right\} = \\
&= \frac{2}{-jk\frac{2\pi}{T} T} \left\{ e^{-jk\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}} - 1 - e^{-jk\frac{2\pi}{T} T} + e^{-jk\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}} \right\} = \\
&= \frac{j}{k\pi} \left\{ 2e^{-jk\pi} - 1 - e^{-jk2\pi} \right\} = \\
&= \frac{j}{k\pi} \left\{ 2\cos\left(-k\pi\right) + j\sin\left(-k\pi\right) - 1 - \cos\left(-k2\pi\right) - j\sin\left(-k2\pi\right) \right\} = \\
&= \frac{j}{k\pi} \left\{ 2\cos k\pi - 2 \right\} = \\
&= \frac{j2}{k\pi} \left\{ \cos k\pi - 1 \right\}
\end{aligned}
$$

A levezetés 5. sorában kihasználtuk, hogy $\omega_0 = 2\pi/T$, a 6. sorban szereplő kifejezésre az Euler-képletet alkalmaztuk. A 7. sorban vegyük észre, hogy a szinusz függvények mindig 0-t adnak, míg a $\cos -2k\pi = 1$.

Most már konkrétan fölsorolhatjuk az együtthatók értékeit:

$$
\bar{U}_0 = 0
$$

$$\begin{aligned}
\bar{U}_1 &= \frac{-4j}{\pi} \\
\bar{U}_2 &= 0 \\
\bar{U}_3 &= \frac{-4j}{\pi}\frac{1}{3} \\
\bar{U}_4 &= 0 \\
\bar{U}_5 &= \frac{-4j}{\pi}\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Vagyis ennek a jelnek a spektrumában csak páratlan felharmónikusok szerepelnek. A valós alak (szinuszos jelek összegeként):

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{4}{\pi}\left(\cos\left(\omega_0 t - 90^o\right) + \frac{1}{3}\cos\left(3\omega_0 t - 90^o\right) + \frac{1}{5}\cos\left(5\omega_0 t - 90^o\right)\right) = \\
&= \frac{4}{\pi}\left(\sin\left(\omega_0 t\right) + \frac{1}{3}\sin\left(3\omega_0 t\right) + \frac{1}{5}\sin\left(5\omega_0 t\right)\right) =
\end{aligned}$$

### 3.2.4. A spektrum ábrázolása

Az átviteli karakterisztikával teljesen analóg módon ún. Bode-diagram segítségével szokás leginkább ábrázolni a spektrumot (vagyis az $\bar{U}_k$ Fourier-együtthatókat). Mivel csak diszkrét frekvenciák szerepelnek az előállításban, így a spektrum ,,vonalas” lesz.

********* ide jön a négyszögjel kiszámolt spketrumának az ábrája **************

### 3.2.5. Példa: periodikus gerjesztésű hálózat számítása

ide jön az elsőfokú RC tag bemenetére kapcsolt négyszögjel számítása

### 3.2.6. Alkalmazási példák

#### Beszédjel spketruma

#### FM rádióadások spektruma

# 4. fejezet

# Nemperiodikus jelek spektruma

Ez a fejezet még várat magára... A lényeg az, hogy abból lehet kiindulni, hogy a nemperiodikus jel tulajdonképpen fölfogható a periodikus általánosításaként úgy, hogy a periódusidő végtelenhez tart. Ebben az esetben a Fourier-sorfejtés képletében lévő szummázás integrálásba megy át, a képletek:

$$F(j\omega)\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}dt$$

(Ez a számítás nem minden esetben végezhető el, vagyis nem minden $f(t)$ függvénynek létezik a Fourier-transzformáltja. Ezzel a kérdéssel itt nem foglalkozunk).

Vegyük észre, hogy az Euler-képlet értelmében

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

vagyis a Fourier transzformációval egy függvényt végső soron különböző frekvenciájú szinuszos függvények összegeként állítunk elő.