



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Hálózati Rendszerek és Szolgáltatások Tanszék

Csóka Bence

AZ OKARINA HANGJÁNAK MODELL ALAPÚ SZINTÉZISE

KONZULENS

Dr. Fiala Péter

BUDAPEST, 2018

Tartalomjegyzék

Összefoglaló	5
Abstract.....	6
1 Bevezetés	7
1.1 Motiváció, cél	7
1.2 Az okarina története	7
1.3 Modellezés visszacsatolt rendszerrel	9
2 A gerjesztés modellezése.....	11
2.1 Perturbáció a légáramban.....	12
2.2 Kölcsönhatás a hangszertesttel	13
2.3 Veszteségek	14
3 A rezonátor modellezése.....	16
3.1 Hullámterjedés hengeres csőben.....	16
3.1.1 Ideális szabad lezárás	17
3.1.2 Ideális merev lezárás.....	18
3.1.3 Pontosítás szabad lezárás esetén	18
3.2 Szemléltetés áramkörrel.....	19
3.3 Bemeneti admittancia.....	20
3.4 Becsült admittancia illesztése	21
4 A gerjesztés és a rezonátor összekapcsolása.....	23
4.1 A kapott egyenletrendszer	23
4.2 Dimenziótlanítás	24
4.3 Az eredő akusztikus sebesség	24
4.4 Az eredő hangnyomás.....	25
4.5 Implementálás MATLAB-ban	26
5 Mérések, eredmények	27
5.1 A felhasznált hangszer	27
5.2 Szimulációk	29
5.2.1 Admittancia.....	29
5.2.2 Akusztikus sebesség	29
5.2.3 Hangnyomás	31
5.2.4 Spektrum.....	32

5.3 Mérések.....	32
5.3.1 Hangnyomás	33
5.3.2 Spektrum.....	34
5.3.3 Frekvenciaingadozás.....	36
5.3.4 Nyomásingadozás	37
5.4 Szimulációs és mérési eredmények összehasonlítása.....	38
5.5 Mérési hibalehetőségek.....	41
5.6 Továbbfejlesztés	42
6 Összefoglalás.....	43
Köszönetnyilvánítás	44
Irodalomjegyzék.....	45

HALLGATÓI NYILATKOZAT

Alulírott **Csóka Bence**, szigorló hallgató kijelentem, hogy ezt a szakdolgozatot meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, csak a megadott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Hozzájárulok, hogy a jelen munkám alapadatait (szerző(k), cím, angol és magyar nyelvű tartalmi kivonat, készítés éve, konzulens(ek) neve) a BME VIK nyilvánosan hozzáférhető elektronikus formában, a munka teljes szövegét pedig az egyetem belső hálózatán keresztül (vagy hitelesített felhasználók számára) közzétegye. Kijelentem, hogy a benyújtott munka és annak elektronikus verziója megegyezik. Dékáni engedéllyel titkosított diplomatervek esetén a dolgozat szövege csak 3 év eltelte után válik hozzáférhetővé.

Kelt: Budapest, 2018. 12. 06.

.....
Csóka Bence

Összefoglaló

Manapság egyre gyakrabban felmerül az igény arra, hogy egy hangszer hangját előállítsuk mesterségesen, számítógépek segítségével. Ez lehetséges jelalapú szintézissel, ahol a hangszer egy rögzített hangmintáját dolgozzuk fel, vagy modellalapú szintézissel, ahol a hangszer fizikai modelljét használva juthatunk eredményre.

Ez a szakdolgozat az okarina nevű fúvós hangszer modellalapú szintézisével foglalkozik. Szükség van a hangszer gerjesztésének és magának a rezonátor fizikájának a megértésére. Ezt a két modellt összekapcsolva MATLAB-ban implementálható egy szimulátor program, amely képes előállítani a hangszer hangnyomását. A szimulátort tesztelve, bemeneti paraméterekként egy valódi okarina méreteit használva vizsgálhatók a hangkeltés során fellépő jelenségek. Részletezésre kerülnek a hangszeren végzett mérések is, amelyek eredménye összehasonlítható lesz a szimulációkkal. A szimulátor bemeneti paramétereit módosítva megfigyelhetők a kimenet változásai, ami alapján következtethetünk különböző törvényszerűségekre, és közelebb kerülhetünk az okarina fizikájának megértéséhez.

Abstract

Nowadays, the need to produce the sound of a musical instrument artificially, with the help of computers, arises more and more often. This is possible by signal-based synthesis, where a pre-recorded sample of an instrument's sound is processed, or by model-based synthesis, where we get results by using the physical model of the instrument.

This thesis details the model-based synthesis of the wind instrument called ocarina. It is necessary to understand the physics of the exciter and the resonator. By connecting the two models, it is possible to implement a simulator in MATLAB, which is able to produce the sound pressure of the instrument. Using the parameters of a real ocarina as inputs of the simulator, the different phenomenons during its sound production are observable. The results of measurements taken on the instrument are comparable to the simulations. By changing the inputs of the simulator, we can observe the changes in the output, imply some regularities, and better understand the physics of the ocarina.

1 Bevezetés

1.1 Motiváció, cél

Munkám során célom az okarina nevű fúvós hangszer megismerése, hangjának modell alapú szintézise. A hangszer működése során fellépő fizikai jelenségek ismeretében olyan szimulátor programot fejleszték, amely végeredményként képes az okarinához hasonló hangot előállítani. Ezzel a programmal szimulációkat végzek el, melyek eredményeit összehasonlítom egy valódi okarinán végzett mérésekkel. A program segítségével megvizsgálható lesz a modell viselkedése a különböző paraméterek változtatása esetén, ami alapján következtethetünk bizonyos fizikai összefüggésekre. A rezonátor és a gerjesztés modellezésére, illetve azok összekapcsolására van szükség, ebből a gerjesztés megértése jelenti a legnagyobb kihívást, ami az okarina esetében más, mint a legtöbb fúvós hangszernél.

Korábban is végeztek kutatásokat a témában, például Kobayashi, Takami, Miyamoto, Takahashi, Nishida és Aoyagi 2009-es cikke is az okarina egy fajta modellezését részletezi [1]. Ebben a cikkben kettő és három dimenzióban is megadnak egy modellt, három dimenzióban a hangszertest több pontján szimulálják a nyomást, és az okarina Helmholtz-rezonátor jellegéből indulnak ki a rezonanciafrekvencia becsléséhez, míg én a hangnyomást csak egy ponton vizsgálom, és az okarina bemeneti akusztikus admittanciáját használom fel (ami természetesen nincsen ellentmondásban a Helmholtz-rezonátor jelleggel).

1.2 Az okarina története

Az okarina eredete több mint 12000 évvel ezelőttre nyúlik vissza. Az okarina jellegű hangszereknek főleg kínai és közép-amerikai kultúrákban volt fontos szerepe, hasonló hangszer a kínai xun. Az újkor kezdetén történt közép-amerikai expedícióknak következtében a hangszert végül megismerték Európában is, ahol később, mint játékhangszer népszerűvé vált [2].



1.1. ábra: Amerikai okarina [3].

Az egyik legrégebbi Európában talált okarina Runikból, Koszovóból származik, feltehetőleg a neolitikus korban készült [4]. A modern európai okarina a 19. századból ered, amikor az olasz Giuseppe Donati továbbfejlesztette az okarinát játékból, amin csak néhány hangot lehetett lejátszani, egy sokkal szélesebben alkalmazható hangszerré. Maga az *ocarina* szó olaszul „kicsi ludat” jelent, amely elnevezést a formája miatt kapta.



1.1. ábra: Kínai xun [5].

Magyar-osztrák zeneszerző Ligeti György 1993-ban befejezett hegedűkoncertjében 4 okarinát használt fel. Krzysztof Penderecki, lengyel zeneszerző az 1974-es „Jákob álma”-ba 12, a 2008-as 8. szimfóniába pedig 50 okarinát épített bele, ahol a kórus tagjai játszottak rajta.

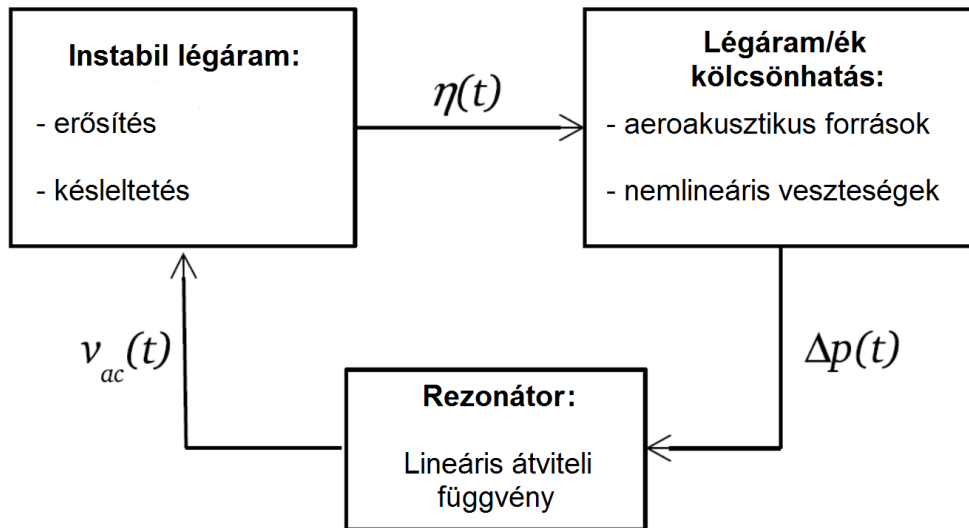
Az okarinához hasonló hangszer például a fentebb említett xun és az afrikai gömbfuvolák is, amik ugyanúgy Helmholtz-rezonátorként viselkednek. Koreában (hun) és Japánban (tsuchibue) is léteznek xun jellegű hangszerek. A pánsípok hangkeltése is hasonlít az okarináéra. A német gemshorn majdnem teljesen úgy működik, mint az okarina, csak kecskeszarvból készül. Az indiai borringo egy egyszerű, üreges agyaggömb három vagy négy lyukkal, amelyek közül az egyik nagyobb a többinél. Zenei hangot előállítani a nagyobb lyukba való horizontális befújással lehet, míg a kisebb lyukak befogásával vagy szabadon hagyásával szabályozhatjuk a hangmagasságot.



1.2. ábra: Tízlyukú okarina [6].

1.3 Modellezés visszacsatolt rendszerrel

Az okarina hangkeltésében szerepet játszó gerjesztés modellezéséhez felhasználhatunk egy, a fuvolaszerű hangszerekre alkalmazható modellt, aminek alapja Terrien, Vergez, Fabre és Barton 2014-es cikke [7].

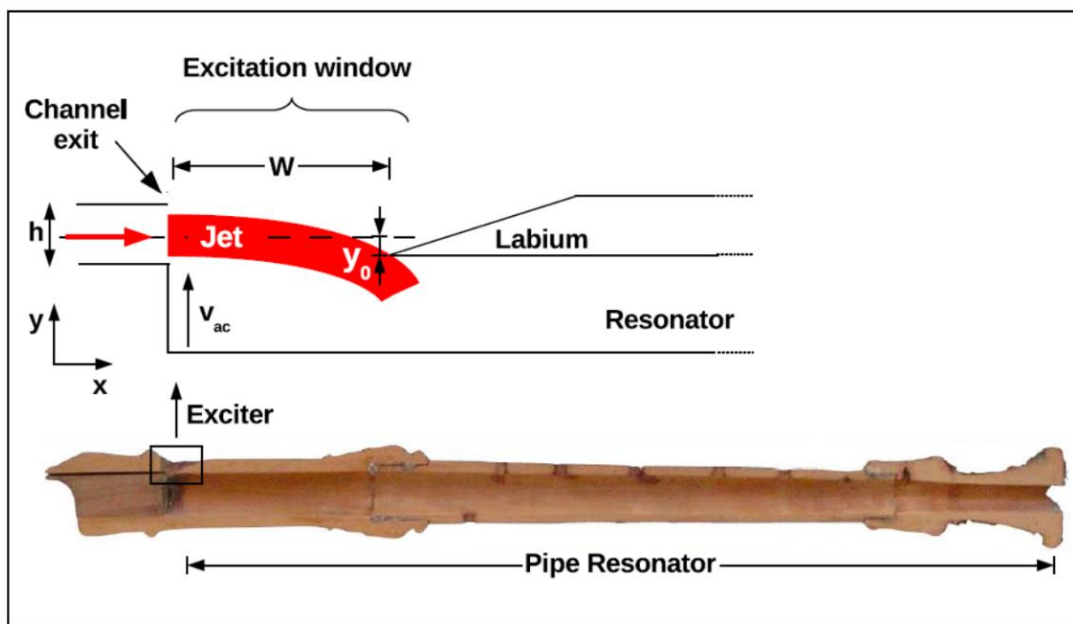


1.4. ábra: A hangkeltés modellezése visszacsatolt hurokkal [7].

A modell szerint a hangszer bemenetén keresztül bejön egy instabil légáram, amit a játékos biztosít. Itt az instabilitás azt jelenti, hogy a hangszerben lévő akusztikus hullámok, vagy bármilyen más zavar miatti perturbáció, ami létrejön a légáramban, felerősödik a hangszer belseje felé haladva. A légáram végül valamikor késleltetéssel elérkezik egy ékhez, majd azzal kölcsönhatásba lépve létrehozza azt a hangnyomást, amit a fülünkkel hangként érzékelünk, miközben nemlineáris veszteségek is fellépnek. A légáram az ék körül oszcillál, a levegő egy része a hangszer belseje felé halad, a többi pedig távozik belőle. Végül a hangnyomást visszacsatolva az okarina bemenő admittanciáján, megkapjuk azt az akusztikus sebességet, ami a hangszer üregében alakul ki, és visszaérkezve a bejáráshoz a bemenő légáramban kialakult perturbációért felelős. A lyukak befogásával mélyebb, szabadon hagyásával magasabb frekvenciájú a hangnyomás, illetve a befújás sebességével is szabályozhatjuk a frekvenciát (nagyobb sebesség esetén magasabb a frekvencia).

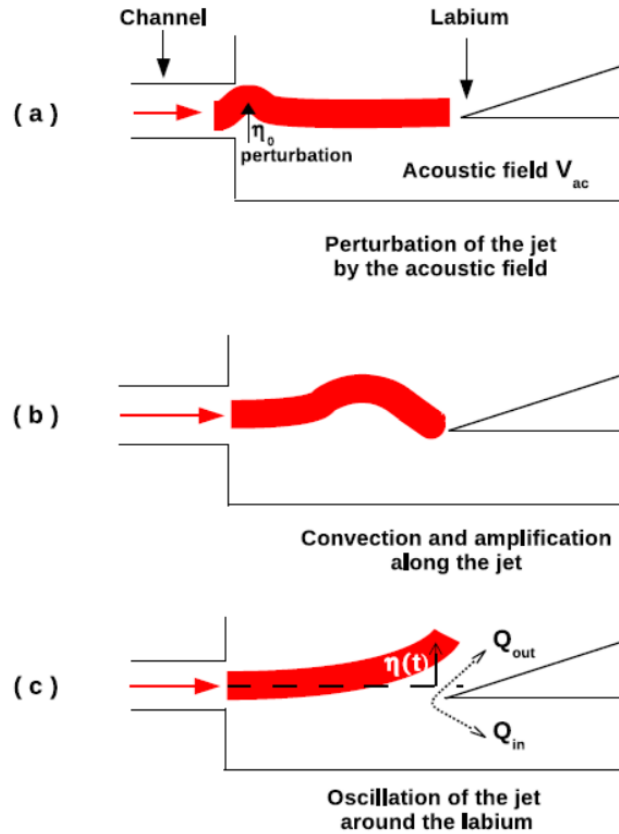
2 A gerjesztés modellezése

A fuvolaszerű hangszerek gerjesztése abban különbözik a legtöbb fúvós hangszertől, hogy míg azoknál a hangkeltés egy szilárd objektum rezegtetésével történik, itt a hang a bemeneti légáramnak (angolul „jet”) az ékkel („labium”) való nemlineáris kölcsönhatása, az akörüli oszcillációja során jön létre.



2.1. ábra: Fuvolaszerű hangszerek gerjesztése, kölcsönhatás a légáram és az ék között [7].

A légáramban a perturbáció befelé haladva felerősödik, majd amikor az ékhez érve kölcsönhatásba lép vele, egy része a hangszer belseje felé halad tovább, a többi pedig távozik belőle, ezzel a rezonátor számára nyomásforrásként funkcionál. A rezonátorban keletkezett akusztikus hullámok visszaérve a bemeneti légáramhoz fenntartják az oszcillációt.



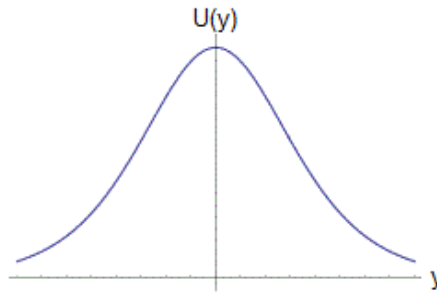
2.2. ábra: A bemeneti légáram viselkedése. (a) Perturbáció a bemenetnél. (b) A perturbáció felerősödése. (c) A légáram oszcillációja az ék körül [7].

2.1 Perturbáció a légáramban

A bejáraton keresztül beáramló légáram sebességprofilja az y koordináta függvényében:

$$U(y) = U_j \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{y}{b}\right), \quad (2.1)$$

ahol U_j a légáram közepének a sebessége (a j index légáram angol elnevezéséből, a „jet”-ből ered), $b = \frac{2h}{5}$, azaz a bejárat szélességének 2/5-öd része, y a légáram közepétől az eltérés, sech pedig a szekáns hiperbolikus függvény [8]. Érdemes megemlíteni, hogy ez a profil csak egy becslés, a valódit nem ismerjük, de a függvény megfelelő alakja és könnyű integrálhatósága miatt ezt használjuk. A 2.3. ábrán látható a függvény alakja, a légáram sebessége közepén a maximális, tőle távolodva pedig egyre csökken:



2.3. ábra: A bemeneti légáram sebességprofiljának alakja.

A perturbáció nagysága a fúvóka belső végénél (receptivitás):

$$\eta_0(t) = \frac{h}{U_j} \cdot v_{ac}(t). \quad (2.2)$$

A receptivitás pillanatnyi értéke egyenesen arányos az akusztikus sebesség pillanatnyi értékével, az arányossági tényező pedig a bejárat szélességének és a beáramló légáram maximális sebességének a hányadosa. A perturbáció befelé haladva exponenciálisan felerősödik, nagysága az x koordináta függvényében:

$$\eta(x, t) = \eta_0(t - \tau) \cdot e^{\alpha_i x}. \quad (2.3)$$

Ebben a formulában τ az az idő $\left(\tau \approx \frac{W}{0,4U_j}\right)$ [9], [10], [11], ami alatt a perturbáció eljut a bejáratától x távolságra, α_i pedig egy erősítési koefficiens, ami de la Cuadra [12] mérései szerint közelítőleg egyenlő a bejárat szélesség reciprokának 0,4-szeresével.

2.2 Kölcsönhatás a hangszeresttel

A perturbáció nagysága végül a bejáratától W távolságra lévő ékhez érve, a (2.3) képlet alapján:

$$\eta(x, t) = \eta_0(t - \tau) \cdot e^{\alpha_i W}. \quad (2.4)$$

Itt a légáram kölcsönhatásba lép az ékkel, elkezd oszcillálni körülötte a perturbációnak köszönhetően, így a levegő egy része a hangszer belsejébe halad tovább, a többi pedig távozik a hangszerből. Ezeknek a légtömegeknek a mennyisége attól függ, hogy pillanatnyilag a perturbáció miatt mekkora a kitérés a légtömeg közepe és a labium éle között; amennyiben ez a kitérés zérus, a levegő éppen megfelelődik, egyébként pedig abba az irányba megy egységnyi időtartam alatt nagyobb térfogatú levegő, amerre kitér a légáram. A konkrét mennyiséget a korábbi $U(y)$ sebességprofil y koordináta szerinti integrálásával számíthatjuk ki.

Ezt a folyamatot úgy is felfoghatjuk, mintha az ék élénél egy dipólforrás lenne, ahol a pólusok távolsága $\delta_d = \frac{4}{\pi} \sqrt{2hW}$ [13], ami eltörpül az akusztikus hullámhosszhoz képest, ezért a pólusok közötti levegőről feltételezhetjük, hogy összenyomhatatlan [14]. Ennek a távolságnak a segítségével kifejezhető a nyomásforrás képlete:

$$\Delta p_{src}(t) = -\frac{\rho \delta_d}{WH} \cdot \frac{dQ_{in}}{dt}, \quad (2.5)$$

ahol ρ a levegő sűrűsége, H a gerjesztési ablak szélessége, Q_{in} pedig a dipólforrás által a hangszer üregébe befecskendezett levegő mennyisége. Feltéve, hogy a bemeneten beáramló légáram sebessége kvázi statikus módon változik, ez a nyomásforrás a következő alakban is kifejezhető az y_0 érték segítségével, ami, ahogy a 2.1. ábrán is láthattuk, a bejárati csatorna közepének y koordinátája és az ék élének y koordinátája közötti különbség:

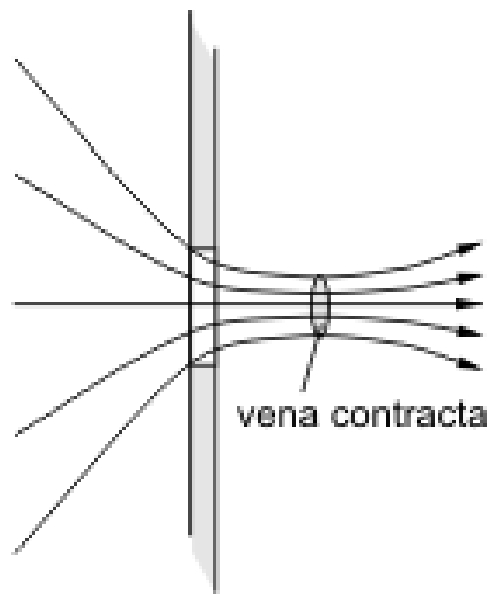
$$\Delta p_{src}(t) = \frac{\rho \delta_d b U_j}{W} \cdot \frac{d}{dt} \left[\tanh \left(\frac{\eta(W, t) - y_0}{b} \right) \right]. \quad (2.6)$$

2.3 Veszteségek

A légáramlat-ék kölcsönhatás során figyelembe kell vennünk a fellépő nemlineáris veszteségeket is. Az ék felé haladó légáramlatban örvénylés keletkezik a keresztbe áramló levegő miatt [15]. Ez energiadisszipációval jár, amit szemléltethetünk egy nemlineáris nyomásforrással a labium mellett:

$$\Delta p_{los}(t) = -\frac{\rho}{2} \left(\frac{v_{ac}(t)}{\alpha_{vc}} \right)^2 \text{sgn}(v_{ac}(t)), \quad (2.7)$$

ahol ρ a levegő sűrűsége, $v_{ac}(t)$ a az akusztikus sebesség az idő függvényében, sgn az előjelfüggvény, α_{vc} pedig az úgynevezett vena contracta faktor (ez esetben 0,6-nek veszünk), ami azért lép fel, mert a levegő szűk réseken való áthaladásakor nem tudja követni azok alakját, nem tud hirtelen irányt változtatni, és ezért az áramlás összeszűkül.



2.4. ábra: A vena contracta hatás.

Az eredő hangnyomás végül a nyomásforrás és a nemlineáris veszteségek összegeként írható fel:

$$\Delta p(t) = \Delta p_{src}(t) + \Delta p_{los}(t). \quad (2.8)$$

3 A rezonátor modellezése

Szükségünk van arra, hogy meghatározzuk az okarina bemeneti akusztikus impedanciáját, azaz hogy a frekvenciától függően mekkora a bemeneten kialakuló hangnyomás és térfogatsebesség hányadosa. Ehhez a hangszert modellezhetjük zárt, illetve nyitott végű egyenes hengeres csövek összességéként, ahol a nyomás és a térfogatsebesség kapcsolata jól leírható. Ezeket a hengeres csöveket helyettesíthetjük koncentrált paraméterű áramköri elemekkel a könnyebb megérthetőség érdekében. Végül a kapott bemeneti akusztikus admittanciát olyan alakra kell hoznunk, amit felhasználhatunk a gerjesztésmodellben.

3.1 Hullámterjedés hengeres csőben

Egyenes hengeres csőben egy bizonyos vágási frekvencia alatt csak hosszirányú hullámok lépnek fel, amiknek a terjedési irányuk párhuzamos a henger tengelyével. Ez a vágási frekvencia a (3.1) összefüggés alapján számítható ki:

$$\omega = \frac{1,84c}{R}, \quad (3.1)$$

ahol c a hangsebesség és R az oldalfurat sugara [16]. Ezt átrendezve kiszámítható, hogy a hallható hangok tartományában (20 kHz alatt) akkor hanyagolhatók el a sugárirányú és az érintő irányú hullámok, ha a sugár kisebb körülbelül fél centiméternél. Ez két lyuk kivételével teljesül is a vizsgált hangszeren, de az a kettő lyuk egy C-dúr skála lejátszása közben mindvégig lefogva marad. Ebben a frekvenciatartományban a csőben kialakuló nyomás és légáramsebesség térfüggését a (3.2) és (3.3) képletekkel írhatjuk le:

$$p(x) = p^+ e^{-jkx} + p^- e^{jkx}, \quad (3.2)$$

$$v(x) = \frac{1}{\rho_0 c} \cdot (p^+ e^{-jkx} - p^- e^{jkx}). \quad (3.3)$$

Itt az x a henger tengelye szerinti koordináta, k pedig a körfrekvencia és a hangsebesség hányadosa (amiből láthatjuk, hogy inentől kezdve időtartomány helyett frekvenciatartományban dolgozunk). A (3.2) és a (3.3) egyenletek hányadosaként kapjuk meg a cső impedanciáját az x pozíció függvényében:

$$z(x) = (\rho_0 c) \cdot \frac{p^+ e^{-jkx} + p^- e^{jkx}}{p^+ e^{-jkx} - p^- e^{jkx}} \quad (3.4)$$

Ha bevezetjük az $r = \frac{p^-}{p^+}$ reflexió tényezőt és a levegő $z_0 = \rho_0 c$ hullámimpedanciáját, illetve kihasználjuk, hogy $e^{jx} = \cos x + j \sin x$, akkor a (3.4) formulából kiindulva levezethető az impedancia értéke a bemeneten, azaz ahol $x = 0$:

$$z_1 = z(0) = z_0 \cdot \frac{z_2 \cos kL + jz_0 \sin kL}{z_0 \cos kL + jz_2 \sin kL} \quad (3.5)$$

Ebben a formulában a z_0 a levegő hullámimpedanciája, z_2 a cső impedanciája $x = L$ pozícióban (a lezárás), a k a körfrekvencia és a hangsebesség hányadosa, L pedig a cső hossza.

Mindebből az akusztikai impedanciát (a hangnyomás és a légáram térfogatsebességének hányadosát) úgy kaphatjuk meg, hogy a kapott impedanciát elosztjuk a henger alapjának a felszínével, azaz $Z_1 = \frac{z_1}{A}$. A későbbiekben ezt az értéket fogjuk használni.

Ezzel sikerült jellemeznünk tetszőleges egyenes hengeres csőnek a bemeneti akusztikus impedanciáját, függetlenül attól, hogy szabad, vagy merev lezárás van a végén.

3.1.1 Ideális szabad lezárás

Ideális szabad lezárás esetén, a cső végén a hangnyomás zérus, és véges nagyságú hosszirányú légáramsebesség van. Ebből következik, hogy a lezárás impedanciája $z_2 = z(L) = 0$, így a bemenő impedancia a (3.6) egyenlet szerint egyszerűsödik:

$$z_1 = jz_0 \tan kL. \quad (3.6)$$

A $\tan(kL)$ kis kL értékek esetén közelíthető kL -lel, így a z_0 -t $\rho_0 c$ -vel, k -t pedig $\frac{\omega}{c}$ -vel helyettesítve:

$$z_1 \approx j\omega \rho_0 L, \quad (3.7)$$

ebből az akusztikus impedancia:

$$Z_1 = j\omega \rho_0 \frac{L}{A}. \quad (3.8)$$

Láthatjuk, hogy a (3.8) formulában kapott impedancia egyenesen arányos a frekvenciával, hasonlóképpen, mint az áramkörökben egy induktivitás.

3.1.2 Ideális merev lezárás

Ideális merev lezárás esetén, a cső végén a hosszirányú légáramsebesség zérus, és a hangnyomás véges nagyságú. Ebből következik, hogy a lezárás impedanciája végtelen, így a bemeneti impedanciát határértékként a (3.9) egyenlet szerint írhatjuk le:

$$z_1 = -jz_0 \cot kL. \quad (3.9)$$

A $\cot(kL)$ kis kL értékek esetén közelíthető $\frac{1}{kL}$ -lel, így levezethető (3.10) alak:

$$z_1 \approx \frac{1}{j\omega \frac{L}{\rho_0 c^2}}, \quad (3.10)$$

ebből az akusztikus impedancia:

$$Z_1 \approx \frac{1}{j\omega \frac{V}{\rho_0 c^2}}, \quad (3.11)$$

ahol kihasználtuk, hogy a hengeres cső térfogata $V = AL$.

Ez esetben az impedancia fordítottan arányos a frekvenciával, ilyen szempontból hasonlóan viselkedik, mint áramkörökben egy kapacitás.

3.1.3 Pontosítás szabad lezárás esetén

A 3.1.1 és 3.1.2 alfejezetekben ideális eseteket néztünk, azonban a valóságban ezek a modellek nem mindig helytállóak. Az ideális merev lezárás jó közelítés a mereven lezárt csővégekre, de az ideális szabad lezárás modellje pontatlan, ezért érdemes bevezetni egy pontosabb modellt, ami figyelembe veszi a cső végénél fellépő sugárzási veszteségeket.

Szabad lezárásnál olyan modellt alkalmazunk, ahol a cső végén egy a sugarú mereven mozgó dugattyú van, amely a végtelen féltérbe sugároz. A dugattyú felületén kialakuló p nyomás és a v mozgási sebességének hányadosa lesz a sugárzási impedancia, amivel korrigálnunk kell:

$$\frac{p(L)}{v(L)} = z_2 = R + jX, \quad (3.12)$$

ahol R a sugárzási impedancia valós, az X pedig a képzetes része. Ezek a tagok megfelelően alacsony frekvenciákon a (3.13-3.14) formulákkal közelíthetők:

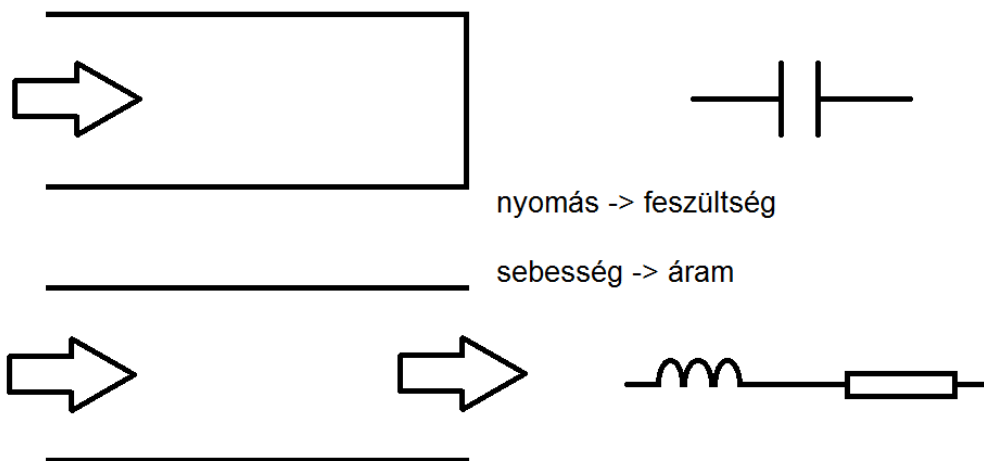
$$\frac{R}{A} = z_0 \frac{(ka)^2}{2A}, \quad (3.13)$$

$$\frac{X}{A} = z_0 \frac{8ka}{3\pi A}. \quad (3.14)$$

Kis ka értékekre ($ka \ll 1$) a valós részt gyakran elhanyagolhatjuk, míg a képzetes részt egy $\frac{8a}{3\pi} \approx 0,85a$ nagyságú hosszkorrekcióként értelmezhetjük. Ezeket az értékeket az ideális szabad lezárásnál kapott eredményhez hozzá kell adni, így kapunk egy, a valósághoz közelebb álló modellt nyitott végű csövek lezárására.

3.2 Szemléltetés áramkörrel

Az okarina bemenő akusztikus impedanciájának a könnyebb megérthetősége érdekében a hangszer szemléltethető egy olyan áramkörrel, ahol a térfogatsebességet árammal, a nyomást feszültséggel, az üreget kondenzátorral, a fúvókát és az oldalfuratokat pedig tekerccsel és velük sorosan kapcsolt (a frekvenciának a négyzetével arányos) ellenállással helyettesítjük (a mereven mozgó dugattyú miatt).



3.1. ábra: Egyenes hengeres cső helyettesítése koncentrált paraméterű áramköri elemekkel.

Az üreg modellezhető egy ideálisan zárt végű hengeres csővel, aminek, mint azt fentebb láttuk, az impedanciája fordítottan arányos a frekvenciával, ezért az áramköri

szemléltetésben helyettesíthetjük egy ideális kapacitással. A mereven lezárt cső akusztikus impedanciája $Z_1 = \frac{1}{j\omega \frac{V}{\rho_0 c^2}}$, ezért a helyettesítő kapacitás nagysága $C' = \frac{V}{\rho_0 c^2}$.

Ugyanígy az oldalfuratok és a fúvóka nyitott végű hengeres csöveknek vehetők, vagyis a helyükön egy sorba kapcsolt induktivitás és egy, a frekvenciával négyzetesen arányos impedanciájú ellenállás lesz. A nyitott végű cső akusztikus impedanciája $Z_1 = j\omega \rho_0 \frac{L}{A} + j\omega 8\rho_0 \frac{a}{3\pi A} + \omega^2 \frac{\rho_0}{2\pi c}$, ebből a két frekvenciával arányos tagból tevődik össze az induktivitás, aminek értéke $L' = \rho_0 \frac{L}{A} + 8\rho_0 \frac{a}{3\pi A}$. A fenti képletekben j az imaginárius egység, ω a körfrekvencia, ρ_0 a levegő sűrűsége, c a hangsebesség levegőben, V az üreg térfogata, L az adott oldalfurat hossza, A a keresztmetszetének nagysága, a pedig a sugara.

A térfogatsebesség áram jellegű mennyiség lesz, mert „elágazáskor”, csomópontokon ugyanúgy oszlanak el. A nyomás pedig feszültség jellegű mennyiség, ugyanis a hangnyomás is két pont közötti nyomáskülönbséget adja meg, ahogy a feszültség is két pont közötti potenciálkülönbség.

A furatok egymással és az üreggel párhuzamosan vannak kapcsolva, a fúvóka pedig az egészsel sorosan, mert a fúvókán beáramló levegő térfogatsebessége szétoszlik az üreg és a furatok között, a lyukakon összesen kiáramló levegő és az üregben lévő levegő térfogatsebességeinek összege szükségszerűen egyenlő kell, hogy legyen a beáramló levegőével. A bemenő akusztikai impedancia ezekből az elemekből számítható, hasonlóan, mint egy áramkörnél, az admittancia pedig ennek a reciproka lesz.

3.3 Bemeneti admittancia

Az okarina bemeneti akusztikus impedanciája (Z) a bemeneten kialakuló nyomás és térfogatsebesség frekvenciafüggő hányadosa, az akusztikus admittancia (Y) pedig ennek a reciproka. A 3.2 alfejezetben láthattuk, hogy hogyan lehet szemléltetni áramkörrel a hangszert, ez alapján már könnyen megkapható a bemeneti akusztikus impedancia, illetve admittancia.

Az egymással párhuzamosan kapcsolt oldalfuratok eredő impedanciáját replusz művelettel kapjuk meg. Megtehetjük azt is, hogy a lyukakat összevonjuk egy nagy lyukká, azaz egy sorosan kapcsolt induktivitássá és négyzetes ellenállássá, ezzel

leegyszerűsítve a további számításokat. Ezzel párhuzamosan kötve a kapacitást, és az egészhez sorosan kötve a fűvókát, a (3.15) egyenlet alakjában kapjuk meg a bemeneti akusztikus impedanciát:

$$Z_1 = sL_0 - s^2r_0 + \frac{1}{sC + \frac{1}{sL_1 - s^2r_1}}, \quad (3.15)$$

ahol $s = j\omega$, L_0 és r_0 a fűvóka, L_1 és r_1 az összevont oldalfuratok paraméterei, C pedig a kapacitás nagysága. Ha az r_0 és r_1 négyzetes veszteségeket elhagyjuk, a (3.16) képlet szerint egyszerűsödik a kapott eredmény:

$$Z'_1 = sL_0 + \frac{1}{sC + \frac{1}{sL_1}}. \quad (3.16)$$

A (3.15-3.16) reciproka pedig a bemeneti akusztikus admittancia:

$$Y_1 = \frac{1}{sL_0 - s^2r_0 + \frac{1}{sC + \frac{1}{sL_1 - s^2r_1}}}, \quad (3.17)$$

$$Y'_1 = \frac{1}{sL_0 + \frac{1}{sC + \frac{1}{sL_1}}}. \quad (3.18)$$

3.4 Becsült admittancia illesztése

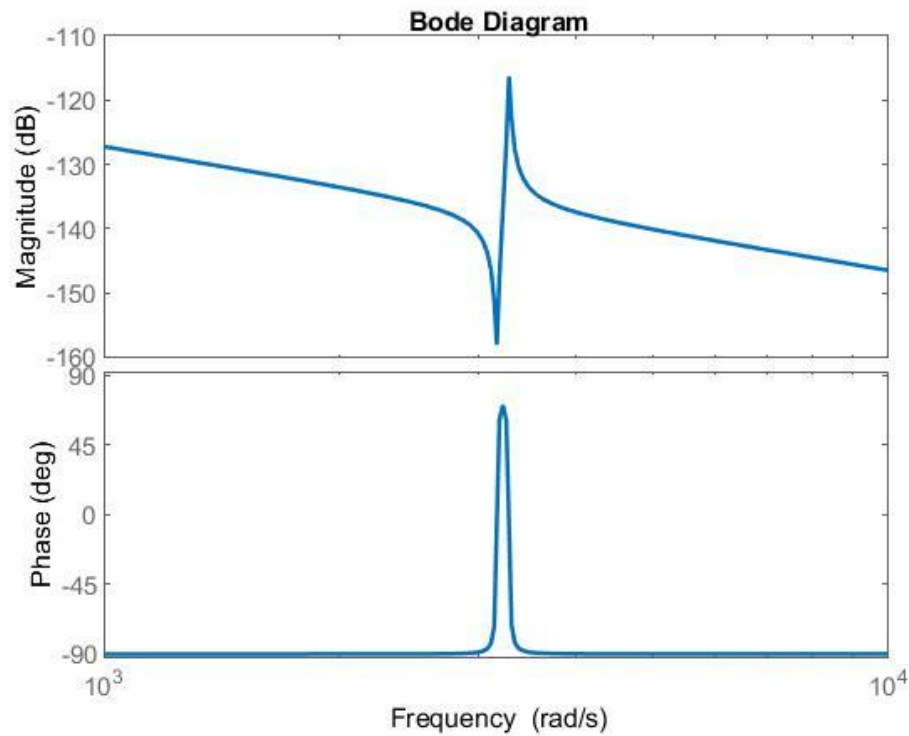
Az okarina bemenő admittanciáját (nem az akusztikus admittanciát) végül standard alakra kell hoznunk, hogy a gerjesztésmodellben fel tudjuk használni:

$$Y_{in}(\omega) = \frac{a_0}{b_0j\omega + c_0} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{a_kj\omega}{\omega_k^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_k}{Q_k}}. \quad (3.19)$$

A fenti kifejezésben j az imaginárius egység, ω a körfrekvencia, p az összes (nulla és nem nulla) rezonanciamódus száma (esetünkben ez 2-vel egyenlő), a_0 , b_0 és c_0 a nullafrekvenciás módus koefficiensai, a_k , ω_k és Q_k pedig a k -edik rezonanciamódushoz tartozó erősítés, rezonanciafrekvencia és jósági tényező.

Az eredeti admittanciára például úgy is illeszthetünk egy becsült admittanciát, hogy elhanyagoljuk a fűvókánál és az oldalfuratoknál fellépő nemlineáris veszteségeket, ezáltal a jósági tényező végtelen lesz, viszont az összes többi paraméter változatlan

marad. Ezek meghatározása után a jósági tényezőnek adunk egy olyan értéket, ami az eredeti admittanciához hasonló illesztett admittanciát eredményez. Ezt MATLAB-ban implementálva eredményként egy, a 3.2. ábrán látható Bode-diagramhoz hasonló alakút kaphatunk:



3.2. ábra: Az illesztett admittancia alakja.

Látható, hogy egy adott frekvenciánál van az admittancia csúcsa, itt a hangnyomást „nagyon átengedi”, a környezetében pedig elnyomja. Ez lesz maga a rezonanciafrekvencia.

4 A gerjesztés és a rezonátor összekapcsolása

Sikerült modellezni a gerjesztést és a rezonátort is, az eredő hangnyomás kiszámításához azonban össze kell kapcsolnunk a két modellt.

4.1 A kapott egyenletrendszer

A 2. és 3. fejezet alapján a (4.1-4.3) egyenleteket írhatjuk fel:

$$\eta(t) = \frac{h}{U_j} e^{\alpha_i W} v_{ac}(t - \tau), \quad (4.1)$$

$$\Delta p(t) = \Delta p_{src}(t) + \Delta p_{los}(t) = \frac{\rho \delta_a b U_j}{W} \cdot \frac{d}{dt} \left[\tanh \left(\frac{\eta(W, t) - y_0}{b} \right) \right] - \frac{\rho}{2} \left(\frac{v_{ac}(t)}{\alpha_{vc}} \right)^2 \operatorname{sgn}(v_{ac}(t)), \quad (4.2)$$

$$V_{ac}(\omega) = Y_{in}(\omega) \cdot \Delta P(\omega) = \left[\frac{a_0}{b_0 j \omega + c_0} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{a_k j \omega}{\omega_k^2 - \omega^2 + j \omega \frac{\omega_k}{Q_k}} \right] \cdot \Delta P(\omega). \quad (4.3)$$

Ezekből az első kettő, a bemeneti légáramban létrejövő perturbáció egyenlete és az eredő hangnyomás egyenlete a gerjesztésmodell része, és a harmadik az, ami összeköti a rezonátort a gerjesztéssel. A hangszer üregében létrejövő légáramlás akusztikus sebessége frekvenciatartományban egyenlő a bemenő akusztikus admittanciának és az eredő hangnyomás spektrumának a szorzatával.

Fontos még megemlíteni, hogy míg a három egyenlet közül az első kettő időtartományban, addig a harmadik frekvenciatartományban van, ezért még át kell alakítani ezeket inverz Fourier transzformációval. Végeredményként minden módushoz kapunk egy differenciálegyenletet:

$$b_0 \frac{dv_{aco}(t)}{dt} + c_0 v_{aco}(t) = a_0 \Delta p(t), \quad (4.4)$$

$$\frac{d^2 v_{ack}(t)}{dt^2} + \frac{\omega_k}{Q_k} \frac{dv_{ack}(t)}{dt} + \omega_k^2 v_{ack}(t) = a_k \frac{\Delta p(t)}{dt}. \quad (4.5)$$

Ezt az egyenletrendszert végül standard alakra kell hozni:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau), \dot{\mathbf{x}}(t - \tau), \lambda), \quad (4.6)$$

ahol \mathbf{x} az állapotváltozók (az akusztikus sebesség komponenseinek) vektora, λ a (többnyire konstans) paraméterek összessége, τ a késleltetés, f pedig egy nemlineáris függvény. Látható, hogy egy ilyen rendszerben az állapotváltozók deriváltjának pillanatnyi értéke függ az állapotváltozó pillanatnyi értékétől, a τ -val korábbi értékétől, és a deriváltjának a τ -val korábbi értékétől.

4.2 Dimenziótlanítás

A numerikus kondicionálás javítása érdekében a rendszert dimenziómentessé alakítjuk a (4.7-4.8) egyenletekkel előállított dimenziómentes változók bevezetésével:

$$\tilde{t} = \omega_1 t, \quad (4.7)$$

$$\tilde{v}(\tilde{t}) = \frac{he^{\alpha_i W}}{bU_j} v_{ac}(\tilde{t}). \quad (4.8)$$

Látható, hogy az időből az első rezonanciafrekvencia segítségével, a sebességből pedig a bemeneti légáramlat sebességének reciprokával hozunk létre dimenziómentes változót. Ezeket az átalakításokat végre kell hajtani mind a perturbáció, mind az eredő hangnyomás, mind a rezonátort és a gerjesztést összekapcsoló egyenleteken.

4.3 Az eredő akusztikus sebesség

Mindezek után az állapotváltozók a dimenziómentessé alakított akusztikai sebességnek a rezonanciamódusokra való vetülete (amik összege maga a dimenziómentes akusztikus sebesség), illetve ezek idő szerinti deriváltjai lesznek. Végeredményként a 4. fejezet eddigi képleteiből levezethető a (4.9-4.11) differenciálegyenlet-rendszer, amiben az állapotváltozókat fejezzük ki:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{v}}_0(\tilde{t}) = & \frac{a_0 \rho \delta_d h e^{\alpha_i W}}{W b_0} \sum_{i=0}^{p-1} \tilde{z}_i(\tilde{t} - \tilde{\tau}) \cdot \left\{ 1 - \tanh^2 \left[\sum_{i=0}^{p-1} \tilde{v}_i(\tilde{t} - \tilde{\tau}) - \frac{y_0}{b} \right] \right\} \\ & - \frac{a_0 \rho b W}{2 b_0 \alpha_{vc}^2 h e^{\alpha_i W} \gamma \tilde{\tau}} \sum_{i=0}^{p-1} \tilde{v}_i(\tilde{t}) \cdot \text{abs} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \tilde{v}_i(\tilde{t}) \right) - \frac{c_0}{b_0 \omega_1} \tilde{v}_0(\tilde{t}), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\dot{\tilde{v}}_k(\tilde{t}) = \tilde{z}_k(\tilde{t}), \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_k(\tilde{t}) = & \frac{a_k \rho \delta_d h e^{\alpha_i W}}{W} \sum_{i=0}^{p-1} \dot{z}_i(\tilde{t} - \tilde{\tau}) \cdot \left\{ 1 - \tanh^2 \left[\sum_{i=0}^{p-1} \tilde{v}_i(\tilde{t} - \tilde{\tau}) - \frac{y_0}{b} \right] \right\} \\
& - \frac{2a_k \rho \delta_d h e^{\alpha_i W}}{W} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \tilde{z}_i(\tilde{t} - \tilde{\tau}) \right)^2 \cdot \tanh \left[\sum_{i=0}^{p-1} \tilde{v}_i(\tilde{t} - \tilde{\tau}) - \frac{y_0}{b} \right] \\
& \cdot \left\{ 1 - \tanh^2 \left[\sum_{i=0}^{p-1} \tilde{v}_i(\tilde{t} - \tilde{\tau}) - \frac{y_0}{b} \right] \right\} \\
& - \frac{a_k \rho b W}{2\alpha_{\tilde{v}_c}^2 h e^{\alpha_i W} \gamma \tilde{\tau}} \cdot \left\{ \sum_{i=0}^{p-1} \tilde{z}_i(\tilde{t}) \operatorname{abs} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \tilde{v}_i(\tilde{t}) \right) \right. \\
& \left. + \sum_{i=0}^{p-1} \tilde{v}_i(\tilde{t}) \sum_{i=0}^{p-1} \tilde{z}_i(\tilde{t}) \operatorname{sgn} \left(\frac{bW\omega_1}{h e^{\alpha_i W} \gamma \tilde{\tau}} \sum_{i=0}^{p-1} \tilde{v}_i(\tilde{t}) \right) \right\} \\
& - \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^2 \tilde{v}_k(\tilde{t}) - \frac{\omega_k}{\omega_1 Q_k} \tilde{z}_k(\tilde{t}), \tag{4.11}
\end{aligned}$$

$$\forall k \in [1; 2; \dots; p-2; p-1], \tag{4.12}$$

$$\gamma = \frac{W}{\tilde{\tau} U_j} = \frac{W}{\omega_1 \tau U_j} = \frac{0,4}{\omega_1}. \tag{4.13}$$

A fenti egyenletrendszerben látható, hogy az állapotváltozók deriváltjának pillanatnyi értéke az állapotváltozók pillanatnyi értékének, a τ idővel korábbi értékének, a deriváltjának a τ idővel korábbi értékének és egyéb konstans (vagy kvázi statikus) paramétereknek a nemlineáris függvénye.

Az eredő akusztikus sebesség végül úgy kapható meg, hogy az idő szerinti deriváltakat összeadjuk $\left(\sum_{k=0}^{p-1} \dot{\tilde{v}}_k(\tilde{t}) \right)$, a kapott dimenziómentes sebességet visszaalakítjuk, majd végül idő szerint integrálunk.

4.4 Az eredő hangnyomás

Miután megkaptuk az eredő akusztikus sebességet, meg kell még határoznunk az éknél létrejövő hangnyomást is. Ez a sebesség a visszacsatolásnak köszönhetően éppen az lesz, ami meghatározza a bemeneti légáramban létrejövő perturbációt. Ezek alapján a hangnyomás a (2.8) képlet alapján kifejezhető:

$$\Delta p(t) = \frac{\rho \delta_a b U_j}{W} \cdot \frac{d}{dt} \left[\tanh \left(\frac{\eta(W, t) - y_0}{b} \right) \right] - \frac{\rho}{2} \left(\frac{v_{ac}(t)}{\alpha_{vc}} \right)^2 \operatorname{sgn}(v_{ac}(t)). \quad (4.14)$$

Bár a rezonátornak magának csak egy rezonanciafrekvenciája van, de hangnyomásban a hangképzés során fellépő nemlineáris folyamatok miatt már megjelennek a felhangok is.

4.5 Implementálás MATLAB-ban

A (4.1-4.3) egyenletrendszer megoldását két egymásba ágyazott függvénnyel oldottam meg. Az első függvény a (4.9-4.11) egyenletek szerinti deriválást végzi el. Bemeneti változóknak az időt, az állapotvektort, a hangszer méreteit és az abból levezetett paramétereket, illetve az akusztikus sebesség és annak egyszeres és kétszeres idő szerinti deriváltjainak a korábbi értékeit kapja meg, kimenetként pedig megadja az állapotvektor idő szerinti deriváltját. Az időt és az állapotváltozókat ebben a függvényben még ismeretlenként kezeljük.

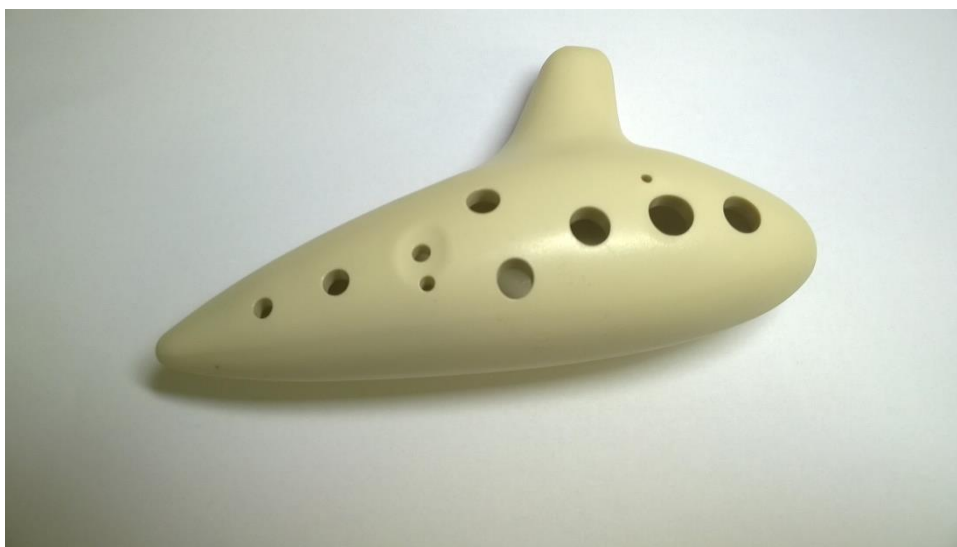
A külső függvény bemeneti változónak megkapja a légáram sebességét, az állapotváltozók kezdeti értékét, a mintavételi frekvenciát és a kívánt zenei hangot, kimenetként a kiszámolt akusztikus sebességvektort és a hozzá tartozó idővektort adja meg. Ennek a függvénynek a része egy ciklus, ami egy 1 másodperc hosszú szakaszon állítja elő az akusztikus sebességet. A ciklus egy lefutása alatt mindig egy adott hosszúságú időablakkal dolgozunk, aminek az eredményét hozzáillesztjük a korábban kiszámoltakhoz. Ez az időablak kisebb kell, hogy legyen τ -nál, ugyanis szükségünk van az állapotváltozóknak a τ -val korábbi értékekre, ezzel biztosítjuk, hogy azok már egy korábbi lefutásban ki lettek számítva. A kapott sebességet végül lineáris időskálára interpolálok.

A deriválás után az idő és az állapotváltozó vektorok még ismeretlenek, ezeket a deriváltfüggvényből határozott integrálással kaphatjuk meg. Ehhez az ode45 függvényt használtam, ami a Runge-Kutta (4, 5) formulán alapszik, és lépésről lépésre számítja ki a megoldást [17], [18].

5 Mérések, eredmények

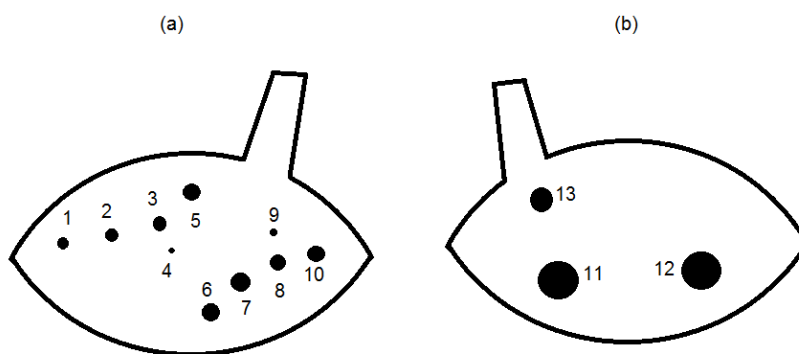
5.1 A felhasznált hangszer

A szakdolgozatomhoz felhasznált hangszer egy tizenkét lyukú, ABS műgyantából készült okarina. Az elülső oldalán tíz, a hátsó oldalán kettő befogható lyuk van, ezen kívül még van egy lyuk a fúvókán (bemenet), illetve egy a hátsó oldalon, ahol a levegő oszcillációja eredményezi a hangot (kimenet).



5.1. ábra: A mérésekhez felhasznált okarina.

A hangszer mért paraméterei az 5.1. táblázatban láthatók. A lyukak méretének számozása az 5.2. ábra alapján történik a táblázatban, tehát például a 3-as számú lyuk keresztmetszetének felülete A_3 , A_0 pedig a fúvóka lyukának nagysága.



5.2. ábra: Az okarina lyukainak sorszámozása. (a) Elülső oldal. (b) Hátsó oldal.

A ₁	17,35 mm ²
A ₂	28,27 mm ²
A ₃	14,52 mm ²
A ₄	7,55 mm ²
A ₅	41,85 mm ²
A ₆	47,78 mm ²
A ₇	60,82 mm ²
A ₈	75,43 mm ²
A ₉	5,73 mm ²
A ₁₀	63,62 mm ²
A ₁₁	113,1 mm ²
A ₁₂	109,36 mm ²
A ₁₃	62,21 mm ²
A ₀	25,2 mm ²
L	36,6 mm
d	6,8 mm
V	90 ml
W	8,5 mm
y ₀	0,1 mm
h	3,3 mm
H	6,9 mm

5.1. táblázat: A vizsgált okarina paramétereit (lyukak mérete, fúvóka hossza, falvastagság, térfogat, gerjesztési ablak, jet-labium ofszet, bemenet magasság, bemenet szélesség).

A hangszer hossz dimenziójú paramétereit tolómérővel mértem. A lyukakat a bemenet kivételével körnek vettem, az átmérőjükből pedig a kör területének képlete alapján számítottam ki a keresztmetszetük nagyságát. A bemeneti lyukat pedig téglalappal közelítettem, két oldalát szintén tolómérővel mérve.

A térfogatot víz segítségével becsültem meg. Mindegyik lyukat befedtem egy kivételével, majd ezen keresztül teletöltöttem. A víz térfogatát közvetlenül, illetve közvetetten is meghatároztam (a teli és az üres okarina tömegének különbségéből, ami

ez esetben viszonylag egyszerű, mert 1 milliliter víz közelítőleg 1 gramm szobahőmérsékleten), mindkét esetben közel azonos eredményre jutottam.

5.2 Szimulációk

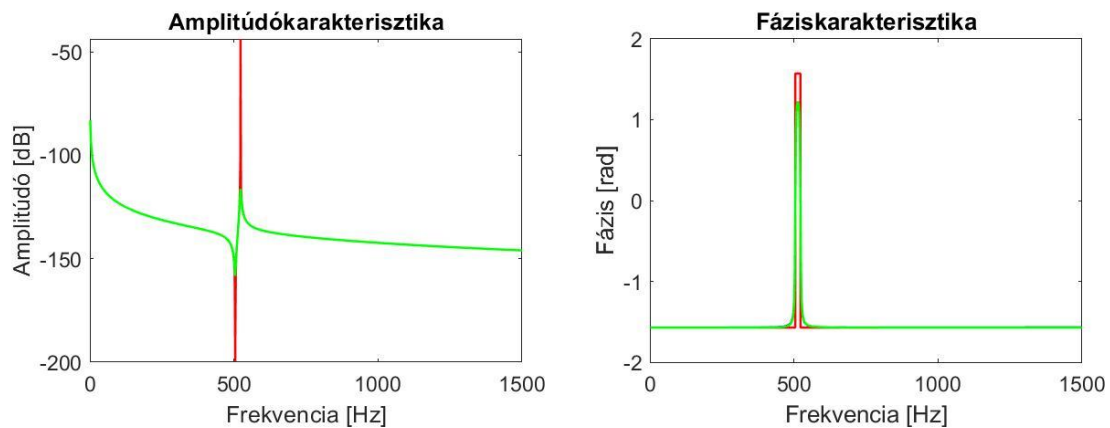
A következő szimulációkat MATLAB segítségével végeztem el, bemeneti paramétereként a vizsgált okarina paramétereit használtam. Kiindulásnak a kb. 5200 Hz-es „C” hanghoz tartozó konstellációt használom.

5.2.1 Admittancia

A 3 fejezetben egy általános módszert adtunk arra, hogy hogyan lehet egy adott okarina bemeneti akusztikus admittanciáját meghatározni, és erre standard alakú, a gerjesztésmodellben is felhasználható admittanciát illeszteni. Az 5.3 ábrán látható két színnel a valódi, pirossal a végtelen jósági tényezőjű, kézzel pedig a valódihoz illesztett admittancia amplitúdó- és fáziskarakterisztikája. Az illesztett admittancia végül az 5.1. egyenlet szerinti konkrét értéket veszi fel:

$$Y_{in}(\omega) = \frac{4,3738 \cdot 10^{-4}}{j\omega} + \frac{3,22 \cdot 10^{-5}j\omega}{(522,56 \cdot 2\pi)^2 - \omega^2 + j\omega \frac{522,56}{155}} \quad (5.1)$$

Az 5.3. ábrán láthatjuk, hogy ez az illesztett admittancia nagyon hasonlít a valóságoshoz.

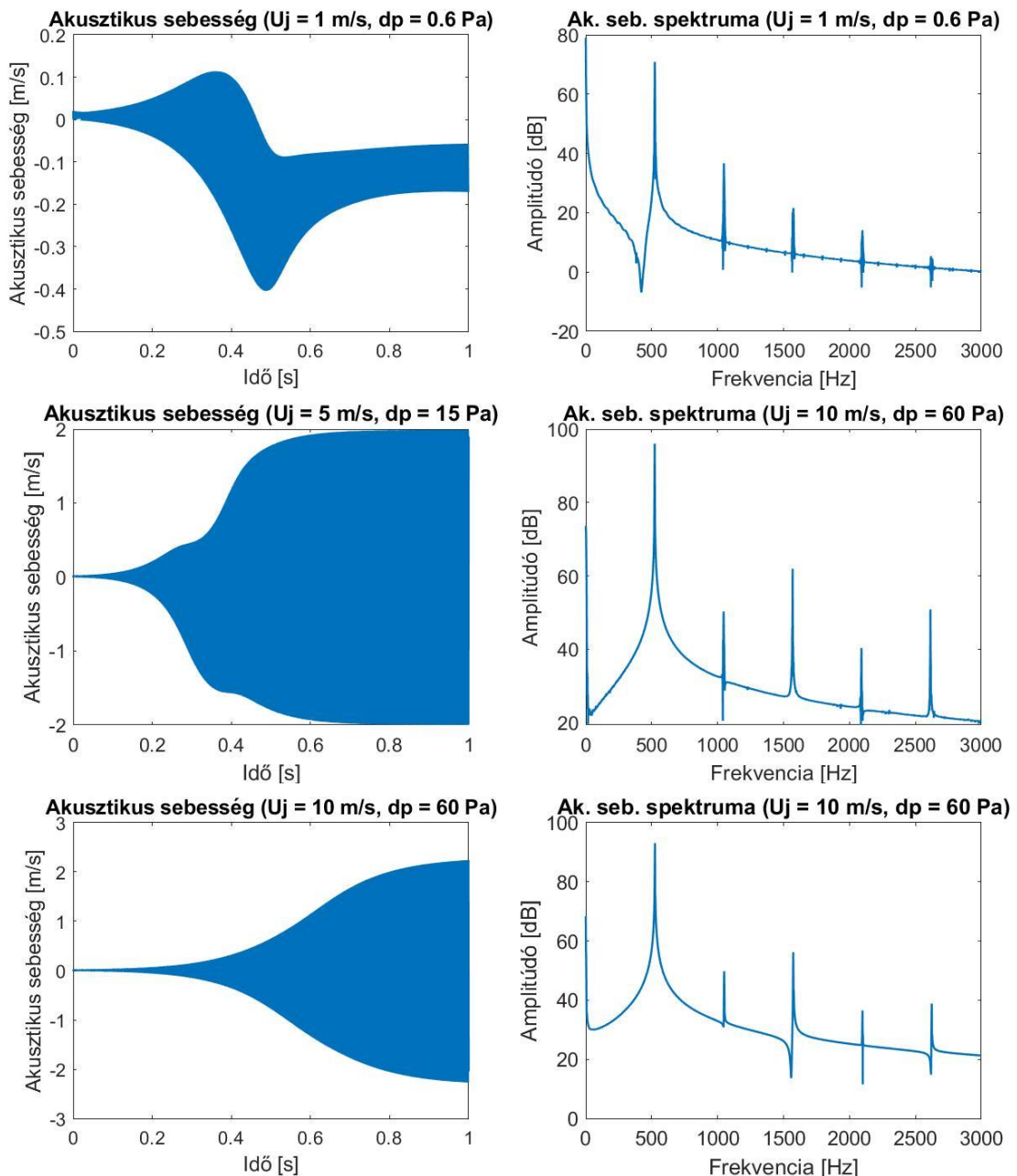


5.3. ábra: A bemeneti akusztikus admittancia amplitúdó- és fáziskarakterisztikája.

5.2.2 Akusztikus sebesség

A (4.9.-4.11.) differenciálegyenletek alapján az admittanciából és az okarina egyéb paramétereiből kiindulva szimulálhatjuk az éknél kialakuló akusztikus

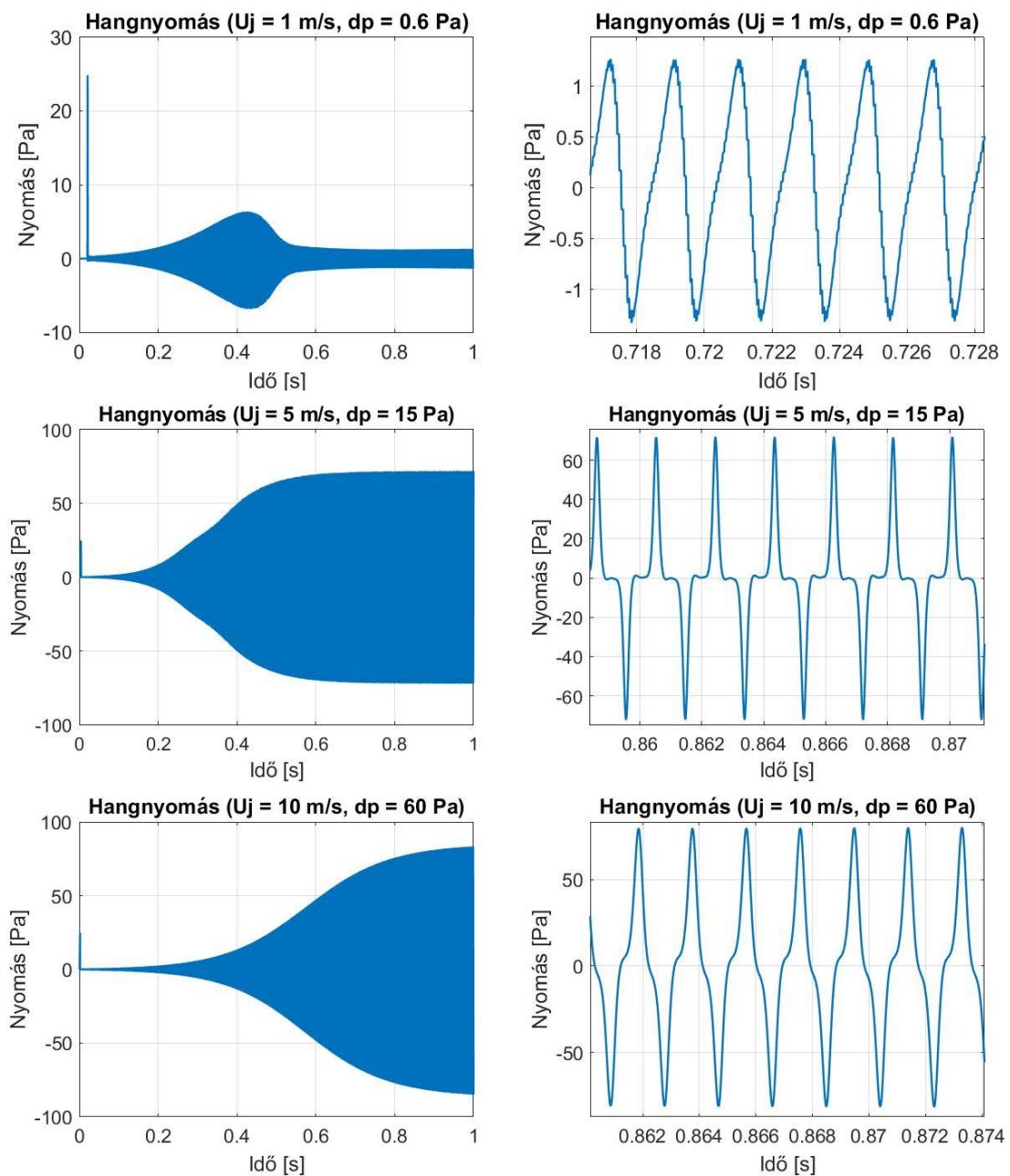
sebességet. Eredményként változó amplitúdójú, közel szinuszos jellegű függvényeket kapunk, a felhangok az alapfrekvenciás hanghoz képest legalább 30 dB-lel kisebbek. Az 5.4. ábrán az akusztikus sebességeket láthatjuk idő- és frekvenciatartományban, különböző bemeneti légáramsebességekre (1, 5 és 10 m/s-ra). A Jet-sebességekhez tartozó nyomáskülönbségeket Bernoulli törvényével $\left(\Delta p = \frac{U_j^2 \rho}{2}\right)$ számíthatjuk ki [16].



5.4. ábra: Az akusztikus sebesség idő- és frekvenciatartományban.

5.2.3 Hangnyomás

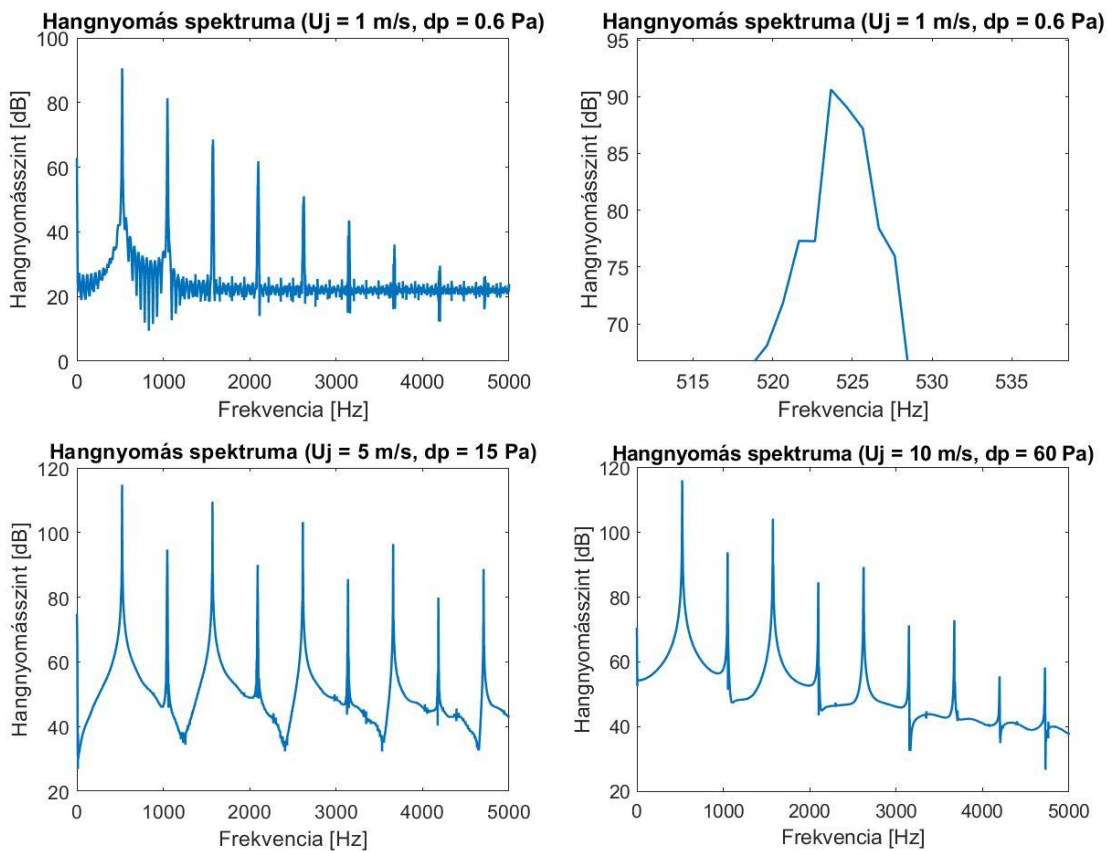
Az akusztikus sebességből a (4.14) formula alapján számíthatjuk ki a hangnyomás időfüggvényét, aminek az eredményét láthatjuk az 5.5. ábrán. A periódusidőt egy kicsivel kisebbnek becsülhetjük, mint 0,002 másodperc, azaz az alapfrekvencia valamivel 500 Hz fölött van, ami megfelel elvárásainknak (kb. 520 Hz). A jelalak nagyban függ a befújás erősségétől, $U_j = 5 \frac{m}{s}$ esetében különösen nagy amplitúdójú felhangokat várhatunk.



5.5. ábra: Hangnyomás az éknél.

5.2.4 Spektrum

A MATLAB „fft” (Fast Fourier Transformation) függvényének használatával kaphatjuk meg a szimulált hangnyomás spektrumát. Az alapharmonikus frekvenciája mindhárom esetben 520 Hz közelében van, ami egy C hangnak felel meg. A felhangok nagy erősséggel rezegnek, különösen 5 és 10 m/s-os Jet-sebesség esetén. Érdeemes megemlíteni, hogy bár 90-120 dB körüli hangnyomásszint nagyon nagy hangerőnek tűnhet, ez a szimuláció a hangforrás közvetlen közelében lévő hangnyomásra vonatkozik, egy bizonyos távolságban (például ahol a fülünk van) már jóval halkabb a hang.



5.6. ábra: A hangnyomás spektruma az éknél.

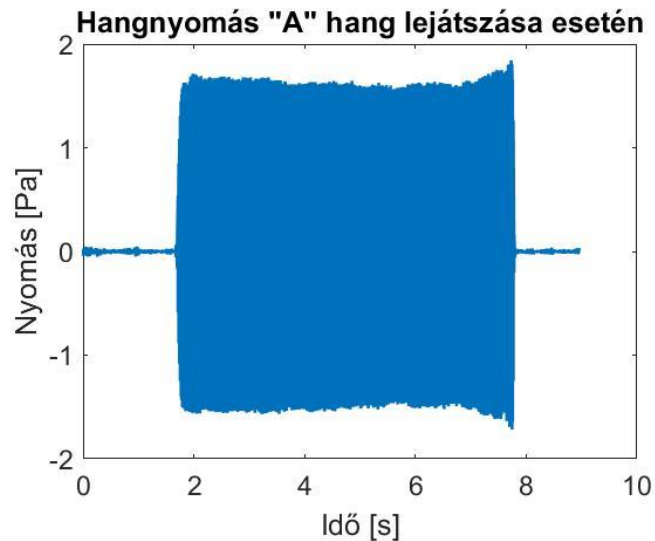
5.3 Mérések

A következő méréseket a BME Akusztikai és Stúdiótechnikai Laboratóriumának süketszobájában végeztem el. Az okarina hangját egy gömbkarakterisztikájú mikrofon alakította át elektromos jellé, amit egy erősítőn és egy hangkártyán keresztül egy számítógépre kötve dolgoztam fel a MATLAB NiHu kiegészítőjével. Az egy oktávus C-dúr skála mind a nyolc hangjára végeztem méréseket, az alábbiakban a körülbelül

880 Hz „A” hangra kapott eredményeket fogom részletezni. A mintavételi frekvencia 51,2 kHz volt, ami Shannon mintavételi törvénye alapján bőven elegendő, amit a rendszerben lévő analóg aluláteresztő szűrő és az emberi hallás korlátai biztosítanak.

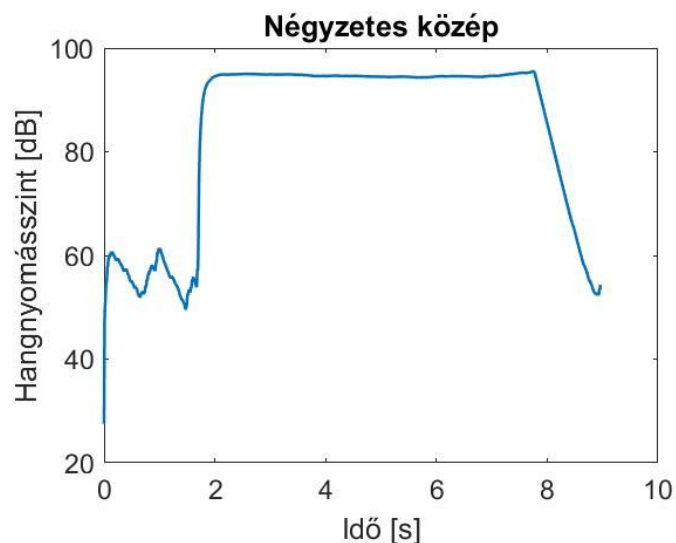
5.3.1 Hangnyomás

Az 5.7. ábrán kék színnel van ábrázolva a hangnyomás időfüggvénye a mérés teljes időtartamára. A maximum 1,5-2 Pa között ingadozik.



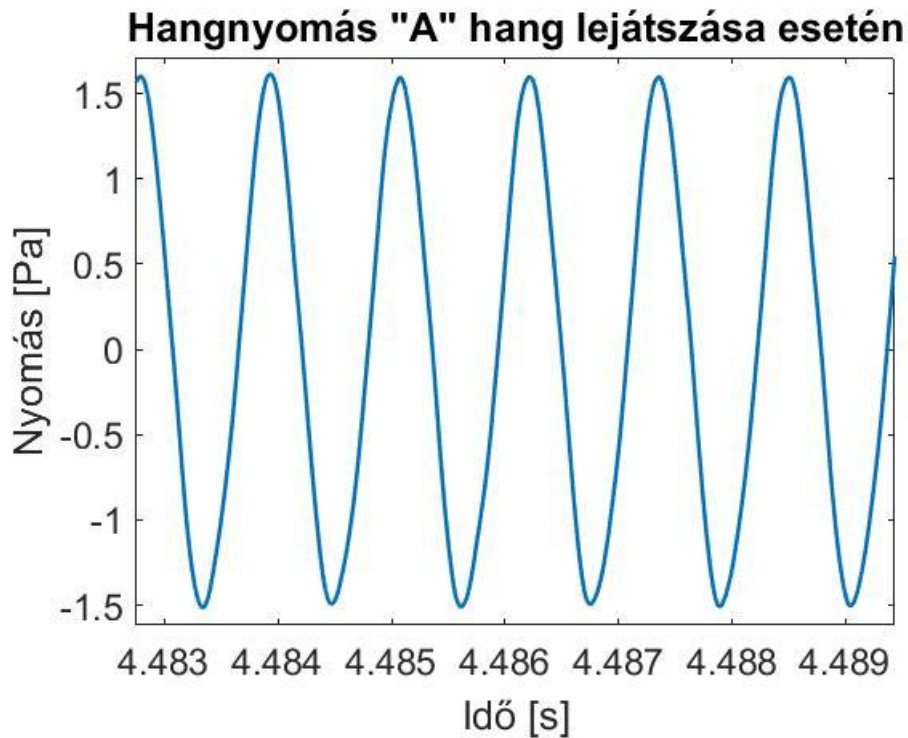
5.7. ábra: Mért hangnyomás kb. 880 Hz-es „A” hang esetén.

Az időfüggvény futó RMS-ét tizedmásodperces időablakokra vonatkoztatva láthatjuk az 5.8. képen. Az effektív érték maximuma 95 dB körül mozog, ez viszonylag hangosnak számít.



5.8. ábra: A mért hangnyomás futó RMS-e.

Az 5.7. ábrába belenagyítva megfigyelhetjük a hangnyomás jelalakját. Láthatjuk, hogy a jel nem tökéletes szinusz, de nagyon hasonlít rá, azaz a felhangok az alaphanghoz képest kis amplitúdóval rezegnek.

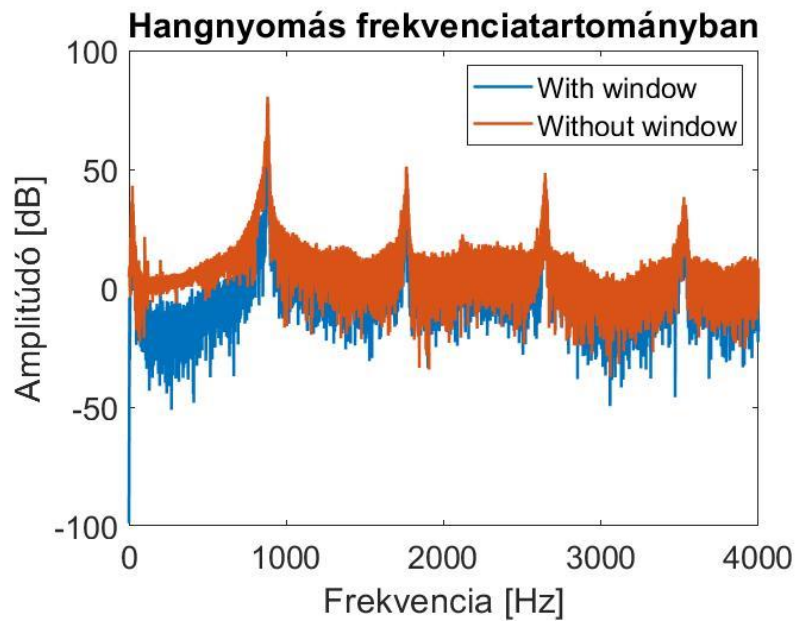


5.9. ábra: A mért hangnyomás jelalakja.

Tehetünk egy becslést az alapfrekvenciára, amit később, a frekvenciatartománybeli ábrázolásnál majd pontosíthatunk. A periódusidő valamivel több, mint 0,001 másodperc, azaz a frekvencia alacsonyabb 1000 Hz-nél. Nagyjából hét teljes periódust láthatunk 0,008 másodperc alatt, körülbelül 875 Hz-et becsülhetünk, ami közel van az „A” hangtól elvárt 880 Hz-hez.

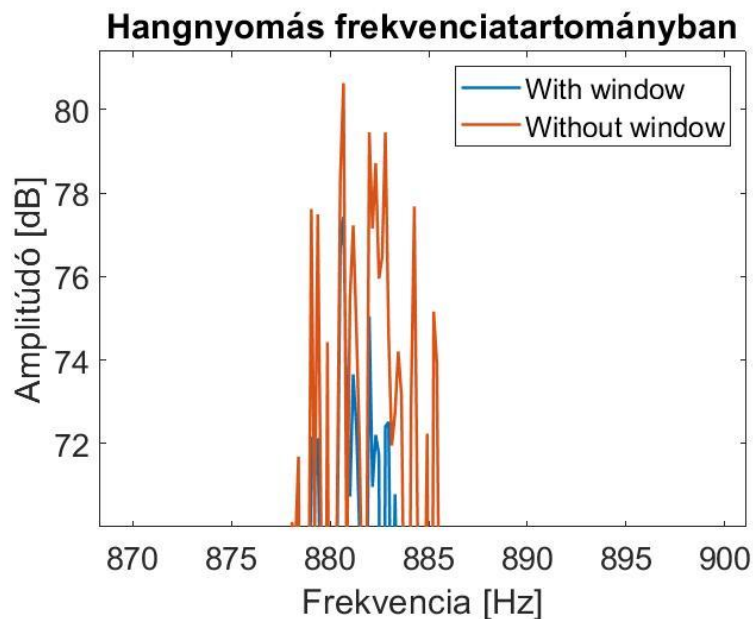
5.3.2 Spektrum

Az időfüggvény Fourier-transzformáltjának az abszolútértékének segítségével vizsgálhatjuk a jel amplitúdókarakterisztikáját frekvenciatartományban. Az eredmény javítása érdekében alkalmazhatunk Hann ablakot, aminek köszönhetően a rezonanciafrekvenciák közötti frekvenciákon az amplitúdó kisebb lesz. Az 5.10. ábrán már csak annak a szakasznak a spektrumát láthatjuk, amin a hang tényleg megszólal, azaz az 5.7. ábrán láthatóan kb. 2 és 7 másodperc közötti 5-6 másodperces szakaszon.



5.10. ábra: A mért hangnyomás amplitúdókarakterisztikája a stabil szakaszon.

Az alaphfrekvencia (az első csúcs az ábrán) 880-885 Hz környékén van, ez közel van az elvárt 880 Hz-hez. Az első három is felhang ennek a többszöröseinek (1760 Hz, 2640 Hz, 3520 Hz) a közvetlen közelében található meg. Az alaphfrekvencián az amplitúdó 5.11. ábrán körülbelül 80-81 dB, míg a felhangok közül az első (ami egyben a legnagyobb amplitúdójú felhang is) amplitúdója nagyjából 51 dB. Az első felhang az alaphanghoz képest 30 dB-lel tompítva van, azaz az amplitúdója $20\log_{10}30 = 30$ -szor kisebb, a többi felhangé pedig még inkább.



5.11. ábra: A hangnyomás alaphfrekvenciája.

5.3.3 Frekvenciaingadozás

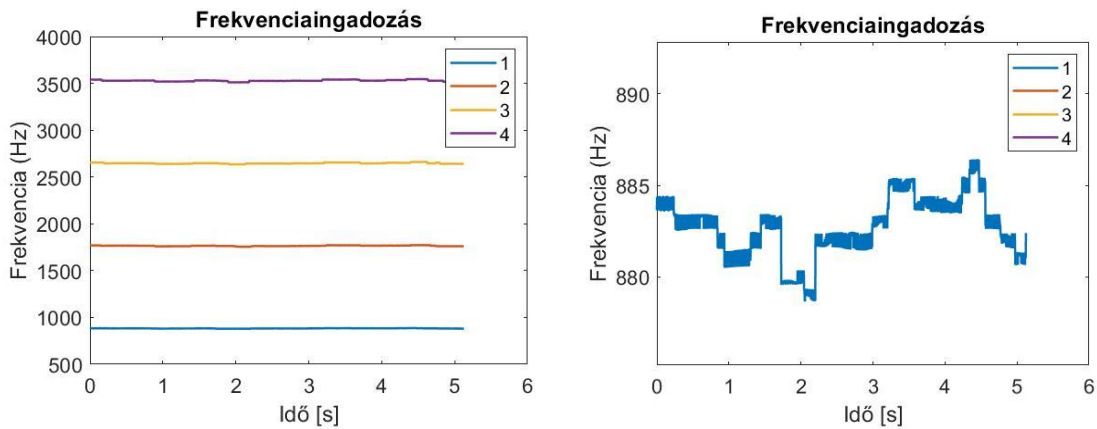
Az alapfrekvencia és a felhangok frekvenciái meg lettek határozva, azonban az okarina egy olyan hangszer, amivel lehet szabályozni az általa kiadott hang magasságát a fújás erősségével is. A mérés alatt természetesen nem sikerült teljesen egyenletesen fújni a hangszert, ezért a spektrum csúcsai, azaz az alapfrekvencia és a felhangok frekvenciái (és az azokhoz tartozó hangnyomás) a teljes szakaszra meghatározott értékek közelében ingadozni fognak, a spektrum az idő múlásával változni fog. Az 5.11. ábrán látható spektrumrészlet a mérés azon szakaszára vonatkozik, amikor megszólal a hang, ami egy néhány másodperces időtartam. Ez alatt a frekvencia ingadozásának köszönhetően a kiszámolt spektrum a legnagyobb csúcs körül zajos, több kisebb csúcs is megjelenik.

A spektrumot adott pillanatban úgy közelíthetjük, hogy a jelnek egy kis szakaszán végzünk Fourier-transzformációt, ennek a módszernek azonban korlátozott a pontossága, ugyanis az időablak hossza és a kapott spektrum felbontása fordítottan arányos (a másodpercek és a Hertz-ek számának szorzata 1), ami azt jelenti, hogy minél kisebb időtartamra akarunk becslést végezni, minél pontosabban akarjuk megkapni a spektrumot, annál alacsonyabb lesz a felbontása. Például ha az 5.10. és az 5.11. ábrákon lévő spektrumot rövidebb időtartamra vonatkoztatva számoltuk volna ki, akkor a frekvenciafelbontás kisebb lenne, azaz nem lenne ilyen zajos a spektrum a csúcs körül.

A feldolgozás során az időablakok hossza 1 másodperc volt, azaz a frekvencia felbontása 1 Hz-es. Lehetőségünk van arra, hogy meghatározzuk pontosabban az alapfrekvenciát és a felhangok frekvenciáit, anélkül, hogy megnöveljük az időablak méretét. Ha egy adott frekvenciát szeretnénk pontosítani, a következő lépéseket kell végrehajtanunk [19]:

1. A becsült frekvenciát felhasználva az eredeti jelünket egyoldali frekvenciamodulációval eltoljuk balra.
2. A modulált jelet egy aluláteresztő szűrővel megszűrjük, aminek a vágási frekvenciája jóval kisebb, mint a becsült alapfrekvencia.
3. A szűrt modulált jelben a szomszédos minták hányadosainak segítségével meghatározzuk az eltérést a valós és a becsült frekvenciák között.

Ezzel a módszerrel pontosított frekvencia-idő függvény látható az 5.12. ábrán bal oldalon, a jobb oldalon pedig az alaphfrekvencia ingadozása kinagyítva.

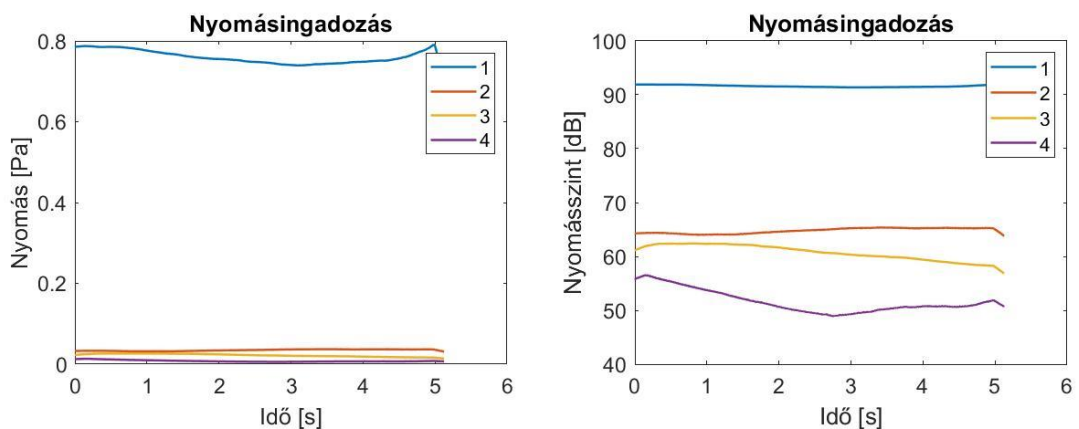


5.12. ábra: A felhangok frekvenciájának ingadozása az idő függvényében.

5.3.4 Nyomásingadozás

Az 5.3.3 alfejezetben ismertetett jelfeldolgozó módszer elsősorban a frekvencia pontosabb meghatározására szolgál, de lehetőségünk van a jel amplitúdóját is megkapni nagyobb pontossággal, ami ez esetben a nyomás lesz pascal-ban. Ez az érték szűrt modulált jel amplitúdójával, azaz az abszolútértékével lesz egyenlő, amit a módszer második lépésének végén már ki is számíthatunk.

Az 5.13. ábrák láthatjuk a felhangokhoz tartozó nyomásértékek ingadozását az idő függvényében, a bal oldalon lineáris, a jobb oldalon pedig logaritmikuskálán. Itt is bebizonyosodik, hogy a felhangok az alaphanghoz képest sokkal kisebb amplitúdóval rezegnek.



5.13. ábra: A felhangok frekvenciájának ingadozása az idő függvényében.

5.4 Szimulációs és mérési eredmények összehasonlítása

A méréseket a szimulációkkal összevetve látható legjobban, hogy mennyire működik a modellünk valós paramétereit használva. Jelen alfejezetben összehasonlítom az alapharmonikusok és a felhangok frekvenciáit, egy adott hangra a spektrum csúcsait, illetve ezek közül az első csúcs élességét.

Az 5.2. táblázatban látható az okarinán lejátszható C-dúr hangsor hangjainak mért és szimulált alapfrekvenciája, 10 m/s-os bemeneti légáramsebességgel számolva. Oszloponként rendre a temperált skála alapján várt értékek, a mért hangnyomás alapfrekvenciája, az admittancia rezonanciafrekvenciája, az akusztikus sebesség és a szimulált hangnyomás alapfrekvenciája található.

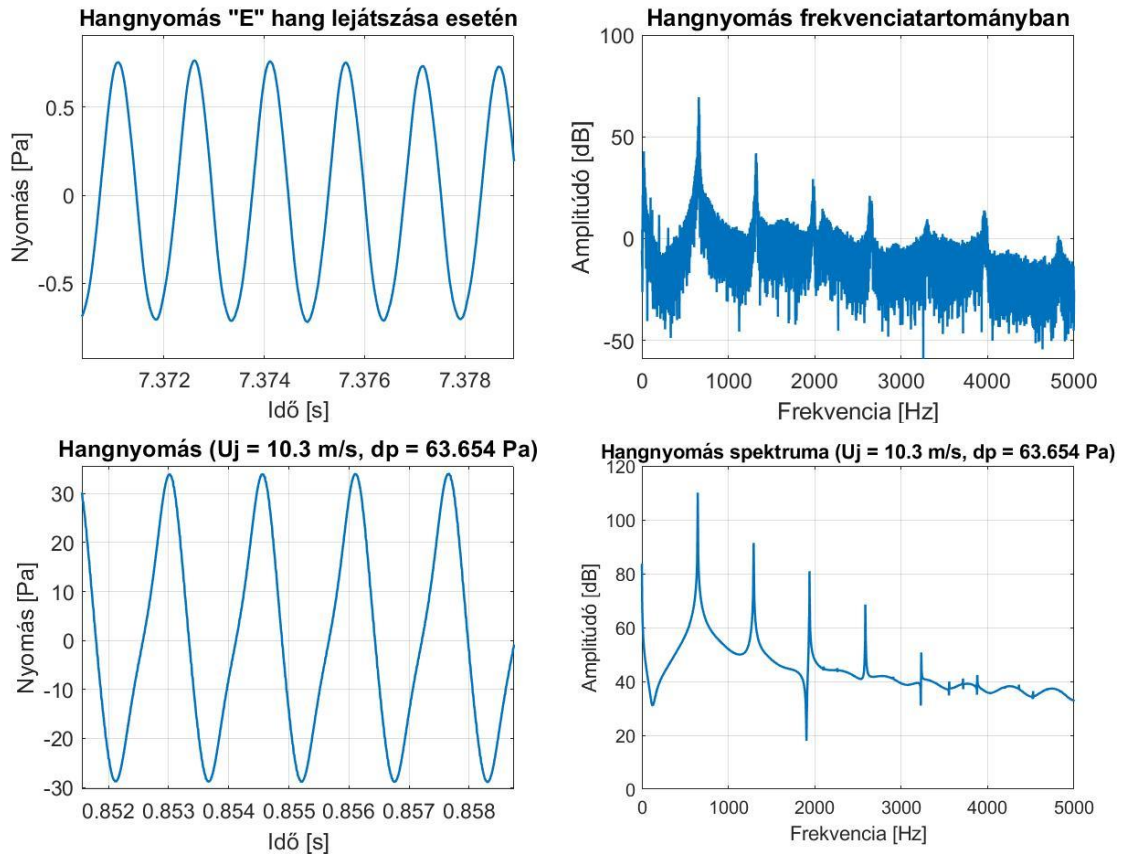
Zenei hang	Alapfrekvencia (Hz)				
	Várt (temperált skála)	Mért	Szimulált admittancia	Szimulált akusztikus sebesség	Szimulált hangnyomás
C	523,252	529,759	522,56	524,911	524,911
D	587,33	600,855	576,61	576,902	576,902
E	659,256	659,334	647,87	644,89	644,89
F	698,456	699,214	685,62	681,884	681,884
G	783,99	786,476	779,53	777,868	777,868
A	880	880,679	886,01	887,849	888,849
H	987,766	999,884	1002,64	1003,829	1004,829
C	1046,504	1063,544	1093,92	1092,814	1092,814

5.2. táblázat: C-dúr skála hangjainak alapfrekvenciája.

A várt és a mért frekvenciák közel vannak egymáshoz, különösen a hangsor közepén (E, F, G, A hangoknál). Az akusztikus sebesség és a hangnyomás frekvenciája mindig egymás közvetlen közelében van. A mért és a szimulált hangnyomás között kicsit nagyobbak a különbségek, legnagyobb eltérés a D és magas C hangok esetében van.

A mért és a szimulált hangnyomás alap- és felharmonikusainak összehasonlításával derül ki igazán, hogy a modell alapján szimulált hang mennyire hasonlít a valóságosra. Az 5.14. ábrán látható felül a mért, alul a szimulált hangnyomás jelalakja és spektruma, E hangra, 10,3 m/s-os légáramsebességre. 10-től 20 m/s-ig 0,1-

es sűrűséggel ellenőriztem minden esetet, ezek közül 10,3 m/s-nál hasonlított egymásra legjobban a két spektrum. A felső jelalak közelebb áll a tiszta szinuszhoz, a lenti spektrumban nagyobb amplitúdójú felhangokat várhatunk. A konkrét értékek az 5.3. táblázatban láthatók.



5.14. ábra Mért (fent) és szimulált (lent) „E” hang idő- (balra) és frekvenciatartományban (jobbra).

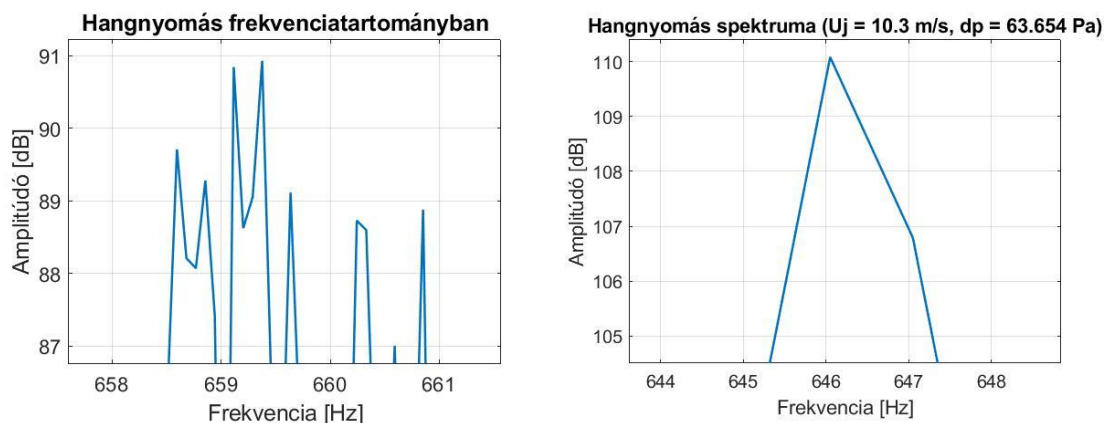
Komponens	Komponensek amplitúdója (dB) és frekvenciája (Hz)					
	Mért			Szimulált		
	Frekvencia	Hangnyomásszint	Relatív	Frekvencia	Hangnyomásszint	Relatív
Alaph.	659,375	69,494	0	646,052	110,088	0
Első fh.	1320,833	41,951	-27,543	1293,103	91,435	-18,653
Második fh.	1979,601	29,234	-40,26	1939,155	80,946	-29,142
Harmadik fh.	2635,677	20,964	-48,53	2585,207	68,518	-41,57
Negyedik fh.	3301,91	9,528	-59,966	3232,259	50,772	-59,316
Ötödik fh.	3965,017	13,818	-55,676	3880,31	42,39	-67,698

5.3. táblázat: Mért és szimulált „E” hang spektrális csúcsainak összehasonlítása.

A komponensek frekvenciái között is tapasztalható kismértékű eltérés, a szimulált frekvenciák valamivel alacsonyabbak a mérteknél. A negyedik felhang relatív (az alaphanghoz viszonyított) amplitúdója közel azonos a két esetben, az első három nagyobb, az ötödik kisebb szimuláció esetén. Természetesen akkor lenne igazán pontosan összehasonlítható a mérés és a szimuláció, ha a légáramsebességre, a fújás erősségére is végeztem volna mérést, de erre sajnos nem volt lehetőség.

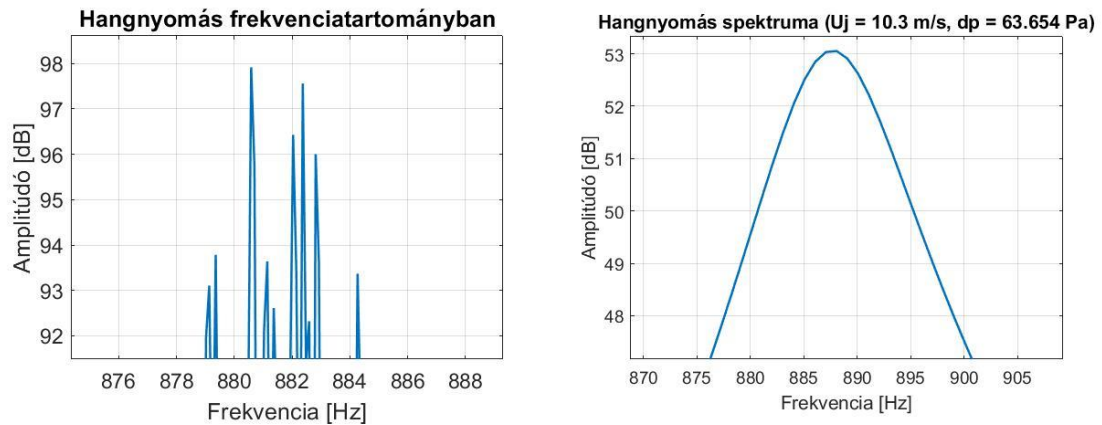
Magasabb hangoknál a jósági tényező jóval kisebb, mint mélyebb hangoknál, 150 körülről 100 alá is lecsökken, aminek például olyan következménye is lehet, hogy nem szólal meg a szimulált hang. Ezt az admittancia utólagos módosításával, a jósági tényező növelésével kiküszöbölhetjük, de csak akkor, ha ez indokolt. Ezt az alapján állapíthatjuk meg, hogy mind a mért, mind a szimulált hangnyomás spektrumában az alapharmonikus „hegyességét” kiszámoljuk, ami a jósági tényezővel összefüggésben van. „Hegyesség” alatt itt azt értjük, hogy hány Hz-es az az intervallum, amin belül a spektrum amplitúdója legfeljebb 3 dB-lel alacsonyabb a csúcspontnál. Egy adott konstans gerjesztés esetében minél nagyobb az admittancia jósági tényezője, annál nagyobb az alapharmonikus hegyessége (de egymással nem egyenesen arányosak). Két hangra végeztem el ezt a becslést, „E” és „A” hangra, mindkét esetben $U_j = 10,3$ m/s.

„E” hangnál nincs szükség módosításra, az admittanciában megadott jósági tényező 150,5, a szimulált hegyesség körülbelül $\frac{646,052}{1,5} = 430,7$, a mért hegyesség pedig kisebb, körülbelül $\frac{659,375}{2,5} = 263,75$. A szimulált hang megszólal, a jósági tényezőt nem szükséges megnövelni.



5.15. ábra: Az alapharmonikus közvetlen környezete „E” hang esetén.

„A” hangnál szükség van módosításra, az admittanciában megadott jósági tényező 97, a szimulált hegyesség körülbelül $\frac{888}{12} = 74$, a mért hegyesség pedig jóval nagyobb, körülbelül $\frac{880,58}{2,5} = 352,232$. A szimulált hang nem szólal meg, ez esetben a jósági tényező utólagos növelése indokolt.



5.16. ábra: Az alapharmonikus közvetlen környezete „A” hang esetén.

5.5 Mérési hibalehetőségek

A mérések során többféle hibalehetőségbe ütközhetünk, amik csökkenthetik az eredmény pontosságát. Az okarina méreteinek meghatározásakor közrejátszhat az alkalmazott tolómérő pontatlansága, és az ebből eredő hibák továbbmennek a lyuk nagyságán keresztül az admittanciára is. A térfogat mérésénél vigyázni kell a lyukak elzárására is, ugyanis könnyen előfordulhat, hogy kiszivárog valamennyi víz. Ha nem a megfelelő lyukon öntjük be a vizet (például nem a legfelsőn), nem lesz teljesen tele a hangszertest. A víz kiöntésekor egy kevés bent maradhat, ami meghamisítja a hangszer térfogatára kapott becslést, ezért érdemes lehet a közvetett, tömegmérős módszert alkalmazni.

Az akusztikai labor süketszobájában a terem felépítése és kialakítása miatt is figyelembe kell venni egy jelenséget. A terem az épülethez minden irányból rugókkal van rögzítve, azok rezgése miatt viszonylag nagy amplitúdójú infrahangok rezegnek a teremben, amiket bár nem hallunk, de a mikrofon az okarina hangjával együtt méri. Szerencsére ezt a problémát kiküszöbölhetjük úgy, hogy MATLAB-ban a mért jelet megsűrűjük egy 20 Hz-es törésponti frekvenciájú aluláteresztő szűrővel.

5.6 Továbbfejlesztés

Jelen munkát többféleképpen is tovább lehet fejleszteni. A szimulátornak bemeneti paraméterekként a vizsgált okarina méreteit adva bizonyos hangokat szimulálva nem tud hallható hangnyomás kialakulni. Ennek oka egyelőre ismeretlen, de (ahogy az 5.4 alfejezetben kifejtettem) indokolt lehet az admittancia, azon belül is a jósági tényező utólagos megváltoztatása, ami megoldja a problémát.

A szimulációk során gerjesztésnek konstans nagyságú bemeneti légáramsebességet használtam. Érdekes lehet megvizsgálni, milyen akusztikus sebességet és hangnyomást számít ki a program, ha másféle gerjesztést alkalmazunk, például exponenciálisan felfutó, lineárisan/lépcsőzetesen növekvő/csökkenő vagy periodikusan változó légáramsebességet, majd ezeket összehasonlítani megfelelő mérések eredményeivel.

A különböző bemeneti paraméterek módosításával a kimenet változásainak törvényszerűségeit is hasznos megfigyelni. A lyukak mérete, az okarina térfogata egyértelműen hatással vannak az admittanciára, és azon keresztül a kialakuló akusztikus sebességre és a hangnyomásra is. A gerjesztési ablak megrövidítésével többféle fújási erősség esetén szólalt meg a hangszer. Ezek további vizsgálatával, illetve egyéb bemeneti paraméterek változtatásával jobban megérthetjük a modell természetét és az okarina fizikai működését.

6 Összefoglalás

Sikerült modell alapján szintetizálni az okarina hangját. Ehhez először a gerjesztés és a rezonátor fizikáját kellett megismerni, majd a két modellt összekapcsolni.

Vizsgáltam a bemeneti légáram viselkedését, a benne létrejövő perturbációt és annak terjedését, oszcillációját a hangszer ékje körül és a fellépő veszteségeket. Az okarinát, mint rezonátort egyenes hengeres csövek összességéként modelleztem, amelyeket koncentrált paraméterű áramköri elemekkel szemléltettem. Ezek alapján számítottam egy elméleti admittanciát, amihez egyetlen egy rezonanciafrekvenciával rendelkező admittanciát illesztettem. A gerjesztés és a rezonátor összekapcsolásával létrejött differenciálegyenlet-rendszert MATLAB-ban oldottam meg.

Egy valódi okarinán méréseket végeztem, meghatároztam a paramétereit, és egy C-dúr skála mind a nyolc hangját játszva mértem meg a hangnyomást, aminek megvizsgáltam a frekvencia- és nyomásingadozását. A valós okarina paramétereit felhasználva szimulációkat végeztem el, amiket összehasonlítva a mérési eredményekkel kiderült, hogy a modell hasonló, de nem teljesen pontos eredményt ad. További szimulációkat is lehet végezni többféle bemeneti paraméterekkel és gerjesztéssel.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni konzulensemnek, Dr. Fiala Péternek a segítségét, tanácsait és iránymutatását. Köszönöm Dr. Rucz Péternek is a munkám haladását segítő ötleteit, észrevételeit. Végül megköszönném családomnak támogatásukat, építő kritikáikat és érdeklődésüket.

Irodalomjegyzék

- [1] Taizo Kobayashi, Toshiya Takami, Masataka Miyamoto, Kin'ya Takahashi, Akira Nishida, Mutsumi Aoyagi: „3D Calculation with Compressible LES for Sound Vibration of Ocarina”. [arXiv:0911.3567v1](https://arxiv.org/abs/0911.3567v1) (2009).
- [2] Ocarina History. <https://web.archive.org/web/20130313064537/http://ocarinaforest.com/info/ocarina-history/>. Elérés: 2018. november 17.
- [3] Ocarinas of the Americas. <https://www.peabody.harvard.edu/ocarinas-of-the-america>. Elérés: 2018. november 17.
- [4] Neolithic prehistoric site of Runik. https://dtk.rks.gov.net/tkk_objekti_en.aspx?id=8800. Elérés: 2018. november 20.
- [5] Xun. <https://www.britannica.com/art/xun>. Elérés: 2018. november 20.
- [6] https://www.thomann.de/hu/plaschke_okarina_in_c.htm. Elérés: 2018. november 20.
- [7] S. Terrien, C. Vergez, B. Fabre, D. Barton: „Calculation of the Steady-State Oscillations of a Flute Model Using the Orthogonal Collocation Method”. *Acta Acustica United with Acustica* Vol. 100, 2014, 690-704.
- [8] C. Ségoufin, B. Fabre, M. P. Verge, A. Hirschberg, A. P. J. Wijnands: Experimental study of the influence of the mouth geometry on sound production in a recorder-like instrument: windway length and chamfers. *Acta Acustica : the Journal of the European Acoustics Association*, Vol. 86(4), 2000, 649-661.
- [9] J. W. S. Rayleigh: *The theory of sound* second edition. New York, Dover, 1894.
- [10] P. de la Cuadra, C. Vergez, B. Fabre: Visualization and analysis of jet oscillation under transverse acoustic perturbation. *Journal of Flow Visualization and Image Processing*, Vol. 14, 2007, 355-374.
- [11] A. Nolle: Sinuous instability of a planar jet: propagation parameters and acoustic excitation. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 103, 1998, 3690-3705.
- [12] P. de la Cuadra: *The sound of oscillating air jets: Physics, modeling and simulation in flute-like instruments*. Dissertation. Stanford University, 2005.
- [13] M. P. Verge, R. Caussé, B. Fabre, A. Hirschberg, A. P. J. Wijnands, A. van Steenbergen: Jet oscillations and jet drive in recorder-like instruments. *Acta Acustica United with Acustica*, Vol. 2, 1994, 403-419.
- [14] A. Chaigne, J. Kergomard: *Acoustique des instruments de musique (acoustics of musical instruments)*. Belin (Echelles), 2008, Ch. 10.

- [15] B. Fabre, A. Hirschberg, A. P. J. Wijnands: Vortex shedding in steady oscillation of a flue organ pipe. *Acta Acustica United with Acustica*, Vol. 82(6), 1996, 863-877.
- [16] Fiala Péter: A hangszerek fizikája. Jegyzet, 2015, 9. fejezet.
- [17] Dormand, J. R. and P. J. Prince: A family of embedded Runge-Kutta formulae. *J. Comp. Appl. Math.*, Vol. 6, 1980, 19–26.
- [18] Shampine, L. F. and M. W. Reichelt: The MATLAB ODE Suite. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 18, 1997, 1–22.
- [19] Fiala Péter, Rucz Péter: Hangjelek digitális feldolgozása az akusztikai gyakorlatban. Mérési leírás.