



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Villamosmérnöki és Informatikai Kar

Híradástechnikai Tanszék

Akusztikus gitár számítógépes modellezése

SZAKDOLGOZAT

Készítette

Pelyva Miklós

Konzulens

Rucz Péter

2012. december 7.

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke	iii
Táblázatok jegyzéke	iv
Kivonat	vi
Abstract	vii
1. Bevezető	1
2. A gitár fizikája	3
2.1. Történelmi áttekintés	3
2.2. Az akusztikus gitár	3
2.2.1. Gitárfajták	4
2.2.2. Felépítés	4
2.2.3. A komplex rezgő rendszer	5
2.3. Célkitűzés	6
3. A hangtest módusainak meghatározása	8
3.1. Alapok	8
3.1.1. Rezgés	8
3.1.2. Rezonancia	9
3.1.3. Módus	9
3.2. A móduselemzés	9
3.2.1. Az impulzusválasz mérése	10
3.2.2. Modális szuperpozíció	10
3.2.3. A komplex pólusok meghatározása	10
3.2.4. A módusalakok meghatározása	11
4. A légüreg módusainak meghatározása	13
4.1. Végeselem módszer	13
4.1.1. Alapok	14
4.1.2. Az akusztikai hullámegyenlet	14
4.1.3. Peremfeltétel-probléma a frekvenciatartományban	15
4.1.4. Gyenge alak	16

4.1.5.	A gyenge alak diszkretizálása	16
4.1.6.	Tömeg- és merevségi mátrixok	17
4.2.	Peremelem módszer	18
4.2.1.	Alapok	18
4.2.2.	A probléma	18
4.2.3.	Kültéri probléma	19
4.2.4.	Diszkretizálás	20
4.2.5.	Az integrálegyenlet megoldása	20
4.3.	Összekapcsolt véges- és peremelem módszer	21
4.3.1.	A probléma definiálása	21
4.3.2.	A beeső mező	22
4.3.3.	Peremérték-feltételek	22
4.3.4.	A végelem módszer egyenleteinek megoldása	23
5.	Eredmények	25
5.1.	Móduselemzés a fedlapon	25
5.1.1.	Mérési összeállítás	26
5.1.2.	Analízis	27
5.1.3.	Eredmények	29
5.2.	A légüreg módusai	30
5.2.1.	A modell létrehozása	31
5.2.2.	Végelem szimuláció	33
5.2.3.	Csatolt szimuláció	35
5.2.4.	Átviteli-karakterisztika mérése	38
5.3.	Felhasznált programok	41
6.	Összefoglalás	42
	Köszönetnyilvánítás	I
	Irodalomjegyzék	III

Ábrák jegyzéke

2.1. A gitár fajtái	4
2.2. A gitár felépítése	4
2.3. Gerendázatminták	5
2.4. A hanglesugárzásban résztvevő szerkezeti elemek és kapcsolatok	6
4.1. Zárt tartományon felírt peremértékfeladat	14
4.2. Egy diszkrétizált felület	17
4.3. Kültéri lesugárzási probléma	18
4.4. A kültéri probléma visszavezetése beltéri problémára	20
4.5. A gitártest metszete oldalnézetből	22
5.1. Móduselemzés a gitáron	26
5.2. Stabilizációs diagramok	28
5.3. A fedlap módusalakjai	29
5.4. A Fender CD-60 módusalakjai	30
5.5. A mesh megépítésének lépései	32
5.6. Szimulált eredmények végeselem módszert alkalmazva	33
5.7. A légüreg módusalakjai	34
5.8. A hanglyuk beépítésének hatása a csatolt szimulációra	36
5.9. A szimulált karakterisztika	37
5.10. Szimulált eredmények végeselem módszert alkalmazva	38
5.11. Gerjesztés-válasz mérése	39
5.12. Csoportosított eredmények, átlagolás után	40

Táblázatok jegyzéke

2.1. A gitár részeinek faanyag-típusai	7
5.1. A fedlap módusalakjainak frekvenciái Hz-ben, különböző gitártípusokra . . .	29
5.2. Valós és szimulált légüreg-módusok frekvenciértékei Hz-ben I.	34
5.3. Valós és szimulált légüreg-módusok frekvenciértékei Hz-ben II.	37
5.4. Az összesített légüreg-módusok frekvenciértékei Hz-ben	41

HALLGATÓI NYILATKOZAT

Alulírott *Pelyva Miklós*, szigorló hallgató kijelentem, hogy ezt a szakdolgozatot meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, csak a megadott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Hozzájárulok, hogy a jelen munkám alapadatait (szerző, cím, angol és magyar nyelvű tartalmi kivonat, készítés éve, konzulens neve) a BME VIK nyilvánosan hozzáférhető elektronikus formában, a munka teljes szövegét pedig az egyetem belső hálózatán keresztül (vagy autentikált felhasználók számára) közzétegye. Kijelentem, hogy a benyújtott munka és annak elektronikus verziója megegyezik. Dékáni engedéllyel titkosított diplomatervek esetén a dolgozat szövege csak 3 év eltelte után válik hozzáférhetővé.

Budapest, 2012. december 7.

Pelyva Miklós
hallgató

Kivonat

A gitár hangkeltésben közrejátszó részei közül egyértelműen a fedlap és a légüreg kialakítása a legkritikusabb a hangszer minőségének szempontjából.

A fedlap a gitár azon része, amely átalakítja a húr rezgésének energiáját, és relatív nagy felületének köszönhetően képes azt akusztikai rövidzár nélkül a közegbe továbbítani. A légüreg szintén a hangkeltésben vesz részt, főleg alacsony frekvenciás, mélyebb hangok esetén kell kiemelni jelentőségét. Jelen dolgozat a hangszer fentebb említett két fontos rezgő rendszerének vizsgálatát mutatja be, mérési és modellezési módszerekkel.

A móduselemzés során a hangszeren felvett pontok között átvitel karakterisztikák kerültek megmérésre egy Fender CD-60 típusú folk-gitár fedlapján. A mérés alapja impulzuskalapács által előállított pontszerű erőhatásra adott válasz gyorsulásérzékelőkkel történő meghatározása volt. Ezek alapján, a rendszer komplex pólusainak kiszámításával, a hangszer módusalakjai és az azokhoz tartozó frekvenciaértékek kerültek megállapításra.

A légüreg módusalakjai Matlab környezetben, végelem módszer felhasználásával, háromdimenziós modell segítségével jöttek létre. Később a kültéri lesugárzás, azaz a belső légüreghez a hanglyukkal kapcsolódó külső akusztikai tér is a modellbe lett építve, a peremelem módszer nevű numerikus technika és a fentebb már említett végelem módszer csatolásával.

Ezáltal egy csatolt szimulációt lehetett lefuttatni akár egy széles frekvenciatartományon is, melynek helyességét a hangszer átviteli-karakterisztikájának megmérése támasztotta alá. Utóbbinál a gitár légüregét egy külső hangsugárzóval gerjesztettem.

Az ebben a dolgozatban bemutatásra kerülő munka hozzájárul a hangszer működésének részletesebb megértéséhez valamint a rendelkezésre álló modellezési eszközök továbbfejlesztéséhez.

Abstract

The design of the soundboard and the air cavity of a guitar are the most critical parts in terms of the sound quality of the instrument.

The string itself produces only a small amount of sound pressure because it has very low radiation efficiency. This phenomenon is called acoustic short-circuit. Hence, the soundboard must amplify the vibrational energy of the string. The top plate has a relatively large surface, which means that it can avoid the acoustic short-circuit and can radiate efficiently. The air cavity also plays a very important role in the sound production, especially in the low frequency range. This thesis shows the analysis of the aforementioned oscillating systems.

During the modal analysis of the soundboard the transfer characteristics were computed between several measurement points on a Fender CD-60 type folk-guitar top. The measurement was based on the determination of the responses to excitations recorded by accelerometers. The force was generated by means of an impact hammer, which acted like a point source on the surface. Therefore, the complex poles and the corresponding frequency values of the soundboard were determined.

The mode shapes of the air cavity were computed by means of numerical techniques in Matlab environment. With the utilization of the finite element method (FEM), a three-dimensional model was established. After all, by using an alternative numerical method, the boundary element method (BEM), the outer infinite acoustic field was successfully coupled to the existing system.

Thus, a coupled simulation had been executed in a relatively wide bandwidth, in which the accuracy of the model was successfully tested by the evaluation of the transmission characteristics of the Fender CD-60.

The experiments and simulations presented herein in lead to a better understanding of the acoustics of the guitar and are helpful in the development of novel modelling techniques.

1. fejezet

Bevezető

Az egyik legelterjedtebb és legnépszerűbb hangszer a gitár, amely a kordofonok családjába tartozik, vagyis a hangját megfeszített húrok gerjesztése hozza létre.

A kordofon hangszerekre jellemző, hogy a kiadott hang nem közvetlenül a rezgő húrokból keletkezik. A húrok rezgési energiája gerjeszti a fed- illetve hátlapot, melyekről megtörténik a hanglesugárzás, illetve rezgésbe hozza a hangszertestben lévő levegőt. A húrok minőségi tulajdonságai mellett a hangszer teste az, ami a legjobban jellemzi a lesugárzott zenei hang időtartamát, hangmagasságát, intenzitását illetve hangszínét. A rezgő test anyaga, kialakítása, minősége tesz érdemi különbséget jó és kevésbé jó hangszerek között. A gitár rezgő testének vizsgálata, elemzése tehát sok alternatívát nyújthat a hangszer fejlődése és működésének megértése szempontjából.

A dolgozat második fejezete a gitár hangkeltési mechanizmusát vázolja föl. Bemutatom benne a hangszer fejlődéstörténetét, felépítését, fizikáját, illetve fajtáit. Leírom a gitárt, mint komplex rezgő rendszert és kitűzöm a modellalkotás célját. A harmadik fejezetben a gitár testének hanglesugárzás-vizsgálatát készítem elő azzal, hogy bemutatom a móduselemzés módszerét és elméleti hátterét. Az eljárás segítségével lesznek meghatározhatók a fedlapra jellemző rezgések, vagyis a sajátrezgések alakjai és frekvenciái. A következő fejezetben numerikus technikák elméleti hátterét tárgyalom, melyek segítségével a hangszer légüregének számítógépes modelljét lehet létrehozni Matlab környezetben. A légüreg módusainak vizsgálatához a végelem és peremelem módszereket alkalmazom, melyek csatolásával a külső, végtelen hangtér szerepét is beépíthetem a modellbe.

Az ötödik fejezetben az elsajátított elméleti tudást ültetem át a gyakorlatba. Elsőként egy Fender CD-60 típusú folk-gitáron végrehajtott fedlap-móduselemzést mutatok be, amelyben arra a kérdésre keresem a választ, hogy mennyire változik az egyes részek hangkeltésben betöltött szerepe a frekvencia változásának függvényében, illetve, hogy milyen módusalakok jelennek meg a sajátfrekvenciákon. Ebben az esetben a hangszer testét teljes egészében vizsgálom, azaz nem különítem el a szerkezet egyes részeit. A továbbiakban kitérek a gitár részeinek elkülönítésére is. Ennek értelmében a hangszer testét összetett rendszernek tekintem, amit kisebb egységekre kell szétbontani, hogy széleskörű képet lehessen kapni a különálló részek tulajdonságairól. A két elkülöníthető rész a fából készült struktúra és az ez által körülzárt légüreg [5].

A fejezetben bemutatom a modell megépítésének lépéseit, majd leírom a végeelem szimuláció folyamatát és eredményeit. Ezek után a negyedik fejezetben leírt peremelem módszert is beépítem a modellbe, így minden addiginál részletesebb szimulációt fogok tudni elvégezni a légüreg valós térbe való lesugárzásáról. A fejezet során egy mérési eljárást is ismertetek, amelyben a fentebb említett folk-gitár légüregének gerjesztésével a módusfrekvenciákat határozom meg. A mérésekből kinyert valós adatokkal ezek után összevethetők a szimulált eredmények. Az ötödik részben minden eredmény tárgyalása során kitérek a szakirodalmakban olvasott eljárások megoldásaira is, melyekkel rendre összehasonlítom sajátjaimat és levonom a következtetéseket.

Az utolsó, hatodik fejezet képet ad az elvégzett munkáról és annak eredményességéről. Összefoglalja a kitűzött cél megvalósításának lépéseit és értékeli az elvégzett feladatokat, valamint kitekintést ad a továbbfejlesztés lehetőségeire.

2. fejezet

A gitár fizikája

2.1. Történelmi áttekintés

A gitár húros, pengetős hangszer, nyolcas formájú testtel és hajlított oldallal. Pengetővel vagy ujjal szólaltatható meg, általában hat húros, hangterjedelme három oktávot ölel fel. A hangszer alaphangolásában a húrok, és frekvenciáik sorban: E (82 Hz), A (110 Hz), d (147 Hz), g (196 Hz), h (247 Hz) és e' (330 Hz). Fontos még megemlíteni, hogy a gitárra írott művek *octavo basso*, azaz egy oktávval mélyebben szólnak meg a hangszeren [2].

A legkorábbi gitár, amely máig fennmaradt, a 16. század végéről származik. Alapvetően halk hangja miatt nem lehetett tagja a szimfonikus zenekar hangszereinek, ezért klasszikus zenei irodalma elszigeteltnek mondható. A közvélemény által legjobban elismert komponisták nem írtak műveket közvetlenül gitárra, viszont szerzeményeiknek számos átírata készült a pengetős hangszerre. A ma „klasszikus gitár” néven emlegetett hangszer a 19. század folyamán alakult ki, térhódítása pedig a 20. századra tehető. Ekkor indult meg az a folyamat, ami az elektromos gitár kialakulásához vezetett.

Zenészek, hangszerkészítők, mérnökök sorozatos kísérletezésének és együttműködésének eredményeképpen fejlődött ki az elektromos gitár, melynek célja a nagyobb hangerő elérése, és az akusztikus gitár hangjának pontos visszaadása volt. Adolph Rickenbacker volt az első, aki elektromágneses hangszedőkkel erősítette fel a hangot. Nem sokkal ezután – Les Paul és Leo Fender közreműködésével – a hangszer hagyományos testét tömör testtel helyettesítették, ami megindította a fejlődést a modern elektromos gitár felé.

A hangszer sokoldalúságát sokan felismerték: harmónia, dallam és ritmus egyaránt kifejezhető és lejátszható vele [1]. A gitár forradalmasította, és átírta a populáris zene történelemkönyvét.

2.2. Az akusztikus gitár

Jelen dolgozat az akusztikus gitár talán legfontosabb részével, a hangtesttel foglalkozik. A gitár további részeit ezért csak érintőlegesen említjük, alaposabb vizsgálatuktól eltekintünk.

2.2.1. Gitárfajták

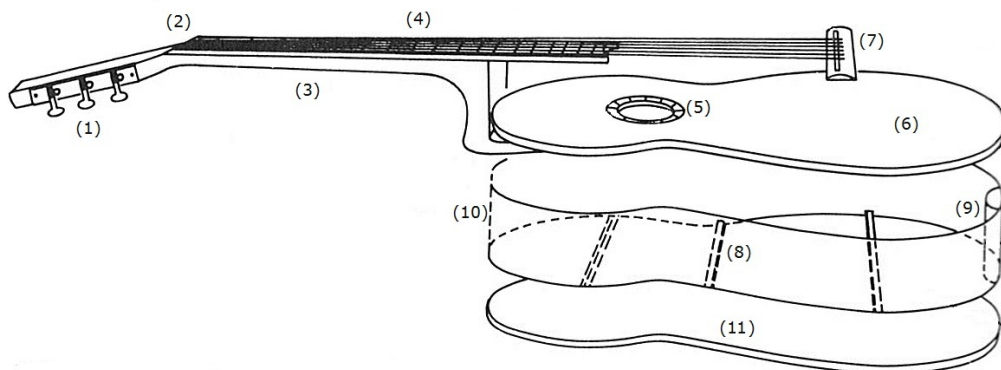
Az akusztikus jelzõt akkor kezdték használni a gitárookra, amikor már meg kellett különböztetni a pusztán mechanikai elveken mûködõ hangszereket az elektromosaktól. Többféle akusztikus elven mûködõ gitárt ismerünk, ezek a 2.1. ábrán láthatóak.



2.1. ábra. A gitár fajtái

2.2.2. Felépítés

Mindegyik fajtában közös, hogy a rezgõ testet a fedlap (vagy tetõlap) (2.2. ábra (6)), a káva (vagy oldallap) (10) és a hátlap (11) határolja. A fed- és hátlap 2–3 mm vastagságú.



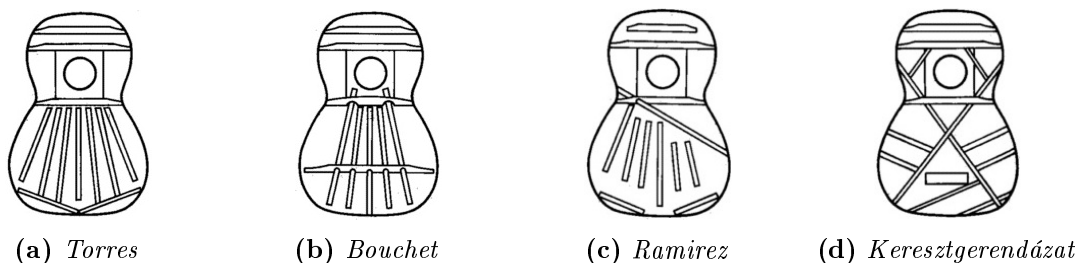
2.2. ábra. A gitár felépítése

A lapok által határolt térfogatot légüregnek nevezzük. Ez a közeg üregrezonátorként funkcionál, melynek nyílása a fedlapon található hanglyuk (5).

Az üreg-, vagy más néven Helmholtz-rezonátorok¹ esetén az üregben lévő levegő rugóként, a hanglyuknál lévő levegő pedig mint tömeg viselkedik, melyek egy lengő rendszert alkotnak [17].

Ezen kívül a testhez tartozik még a tőke (alsó és felső) (9), a húrláb (7) és a gerendázat (8). A tőke felelős azért, hogy az oldallapokat összekapcsolja. Az oldallapok 1,5–2 mm vastagok és gőzöléssel hajlíthatóak a kívánt formájúra. A felső tőke általában a nyak meghosszabbítása, a húrláb pedig rezgéseket továbbít a fedlapnak, illetve rögzíti a húrokat.

A gerendázat feladata a lapok stabilizálása, azok ugyanis a nagy statikai terhelést nem bírják ki. Kialakítása nagyban befolyásolja a gitár hangjának minőségét. A fontosabb gerendázatminták a 2.3. ábrán láthatóak. Az első három ábra (2.3a, 2.3b, 2.3c) legyezőbordás gerendázatokat, míg az utolsó (2.3d.) a folk gitároknál elterjedt keresztgerendázatot mutatja be.



2.3. ábra. Gerendázatminták

Egyéb, az 2.2. ábrán bejelölt részek, melyeket még fontos megemlíteni: fej a hangolókulcsokkal (1), a nyereg (2), a nyak (3) és a fogólap (4).

2.2.3. A komplex rezgő rendszer

A fentiek alapján megállapítható, hogy a gitár nem más, mint különböző rezgő rendszerek összessége, egy csatolt rezgő rendszer [10].

A megpengetett, rezgésbe hozott húr dipólsugárzóként működik, közvetlenül csak nagyon csekély hangot sugároz ki a térbe. Ezt akusztikus rövidzárnak nevezzük, mert a húr rezgése által keltett levegő-sűrűsödések és ritkulások kioltják egymást. A gitárt teste viszont elég nagy ahhoz, hogy ne lépjen fel rajta ez a jelenség [2].

A rezgő húr gerjeszti a húrlábat, amely közvetlen kapcsolódik egy rugalmas lemezhez, a fedlaphoz. A fedlap átadja rezgési energiáját a hangot továbbító közegnek, a levegőt tartalmazó üregrezonátornak, ami továbbítja az energiát az oldal- és hátlapoknak.

A húr energiája tehát így alakulhat át hallható hanggá, mely a közegben terjed. Ezek a rezgések a fül dobhártyáját megrezgetve jutnak a hallócsontocskákhoz, melyek a mechanikai rezgést az ember számára értelmezhetővé teszik.

A gitár esetében az üregrezonátor szerepe a húr hangjának felerősítése, mely megállapítás

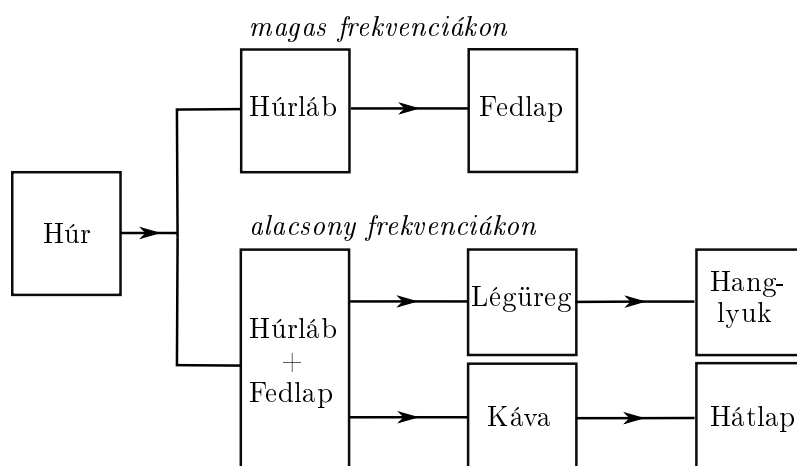
¹A Helmholtz-rezonátor működése a levegő rugalmasságán alapul. A hanglyuknál lévő levegőtömeg az üreg belseje felé haladva összenyomja a benti levegőt. Az összetömörült belső levegő nyomása megnő, ezért kifelé fogja nyomni a hanglyuk levegőtömegét, amely a lendülete miatt az eredeti pozíciójánál kintebb fog kerülni. Így a ritkult benti levegő visszazippantja a levegőtömeget a légüreg belsejébe [20].

nem technikai értelemben értendő. Az akusztikus gitár működése során az az energia alakul át hallható hanggá, amit a zenész a pengetéssel létrehoz a húrban. A gitártest legfontosabb feladata, hogy ezt az átalakítást hatékonyabbá tegye [20].

Az oldal- és hátlapok a legtöbb frekvencián nem játszanak fontos akusztikai szerepet. A hátlap esetében a zenész szinte teljesen eltakarja lesugárzó felületet, az oldallap pedig nem sok rezgést közvetít a fedlapra merőlegesen [2].

Magas frekvenciákon a fedlap rezgései által sugárzódik ki a hallható hang legnagyobb része. Ilyenkor a húrláb mechanikai tulajdonságai jelentőssé válhatnak a hang minősége szempontjából.

Alacsony frekvencián a fedlap továbbít energiát a hátlapnak, a káva és a légüreg segítségével. Ekkor a húrlábat a fedlap részének tekinthetjük és kijelenthetjük, hogy a légüreg szerepe a legfontosabb ezeken a frekvenciákon. A húrláb mechanikai tulajdonságai tehát elhanyagolhatóak a hangképzés szempontjából.



2.4. ábra. A hanglesugárzásban résztvevő szerkezeti elemek és kapcsolatok

2.3. Célkitűzés

A hangszer, mint komplex rezgő rendszer jobban megérthető a 2.4. ábra tanulmányozásával. Egy gitár akkor minőségi, hogyha az ábrán leírt csatolások jól vannak kivitelezve. A csatolás függ:

- az elrendezéstől (geometria),
- a hang frekvenciájától, illetve
- a felhasznált faanyagok minőségétől.

Azonban a túlságosan tökéletesen csatolt rendszer nyers hangokat kiadó hangszereket produkálhat. Ezért gyártás közben folyamatos ellenőrzés szükséges. A fedlap kialakítása nagyon fontos és tulajdonságai már akkor is vizsgálhatók, amikor még nincs a gitár teste

összeépítve. Chladni-féle porábrákkal² ki lehet rajzolni a módusalakokat különböző gerjesztő frekvenciákon.

A 20. század elején a gitárokat kizárólag kézzel készítették a hangszerkészítő mesterek. Ebből következik, hogy két hangszer nem sikerülhetett ugyanolyanra [4]. Azonban a későbbi, precíz gépek által futószalagon gyártott gitárok között is megfigyelhetők különbségek. Ez a változatosság igaz, hogy nagyon csekély, mégis számottevő. Az oka pedig a faanyagok eltérő viselkedése [11].

Bader szerint a hangszertest rezgésének mindenféle holtter nélkül olyan simának és egyenletesnek kell lennie, amennyire az lehetséges. Ez az egyensúly egyedül a jó minőségű faanyagok kiválasztásával érhető el [2]. A 2.1. táblázatban a gitár különböző részeinek tradicionális faanyag-típusai olvashatók.

Fedlap	lucfenyő cédrus vörösfenyő
Oldal- és hátlap	mahagóni rózsafa juharfa

2.1. táblázat. *A gitár részeinek faanyag-típusai*

Jelen dolgozat legfőbb célja a hangszer működésének pontos megismerése mellett a fedlap gyakorlati, és a légüreg szimulált móduselemzése. Az eredmények segítségével egy olyan modellezési megoldás alapjai tehetők le, melyekkel később komplexebb problémákra – mint például a gerendázatok helyzete, vagy a faanyag milyensége – is megoldás kereshető.

²Ernst Chladni ismerte fel, hogy a rezgésbe hozott, vízszintes helyzetű merev lemezre szórt finom por kirajzolja a test módusait. A lemez rezgése állóhullámokkal leírható, rajta tehát duzzadóhelyek és csomópontok alakulnak ki. A csomópontok adott frekvencián ugyanazon a helyen maradnak a lemezen. Így lehetséges, hogy a finom porszemek ezekre a csomóvonalakra rendeződve kirajzolják a lemez módusait [21].

3. fejezet

A hangtest módusainak meghatározása

3.1. Alapok

Ahogy az első fejezetben említettük, a fedlap a gitár azon része, amely a legtöbb hangteljesítményt sugározza ki a közegbe. A hangkeltési mechanizmus pontosabb megértése érdekében méréseket végezhetünk a fedlapon. A hangszer, mint mechanikai rendszer vizsgálatához először meg kell határoznunk néhány fogalmat, majd tárgyaljuk a móduselemzés lépéseit.

3.1.1. Rezgés

A rezgések periodikusan vagy véletlenszerűen oszcilláló mozgások egy egyensúlyi állapot körül. Két típusukat különböztetjük meg:

- szabad rezgés

Ha egy tömegből és egy rugóból álló rendszert nyugalmi állapotából kitérítünk, majd elengedünk, a tömeg szabad rezgést végez. A magára hagyott tömeg mozgásának amplitúdója a súrlódás hatására csillapodik, majd visszatér kezdeti, egyensúlyi helyzetébe. Egy adott rendszer rezgésének időtartama csak a rendszer fizikai tulajdonságaitól függ. Mivel a rezgés idejének reciproka a frekvencia, ezért az adott rendszer frekvenciáját *sajátfrekvenciának* nevezhetjük. Kijelenthetjük tehát, hogy minden lineáris rezgő rendszernek van *sajátfrekvenciája*, az összetett rendszereknek pedig akár több is lehet. (Ezekon a frekvenciákon a testek nagyobb mozgási amplitúdót vesznek fel, mint egyébként.)

- kényszerrezgés

Akkor beszélünk kényszerrezgésről, ha egy mechanikai rendszerre a súrlódáson kívül egyéb periodikusan változó erő (kényszererő) is hat.

3.1.2. Rezonancia

A rezonancia akkor lép fel, ha egy kényszerrezgésnél a gerjesztő frekvencia és a gerjesztett rendszer szabad rezgéseinek frekvenciája közel van egymáshoz. Ekkor – ha az energiaközlés hatékony, vagyis ha az energia betáplálása ütemesen történik – az energiaadagok összegződnek, nagy rezgésamplitúdót eredményezve. A rezgésre kényszerített rendszer amplitúdója függ a kényszer frekvenciájától és maximuma van a rendszer sajátfrekvenciája közelében [18]. Ekkor rezonanciáról beszélhetünk. Ha nincsen csillapító hatás, akkor az amplitúdó átlépheti a megengedett maximumot, ekkor rezonancia-katasztrófa történik. Amikor a gitár légürege erősebben válaszol bizonyos frekvenciás rezgésekre, tudhatjuk, hogy a hangszertestet sajátfrekvenciáihoz közeli frekvenciával gerjesztettük, ilyenkor tapasztaljuk a rezonanciát.

3.1.3. Módus

A rezgő rendszer egy módusa a rendszer egyik sajátrezgése, amely a hozzá tartozó sajátfrekvencián marad fenn a rendszerben. Minden módus egy állandó frekvenciájú és fázisviszonyú rezgésalakot határoz meg. Az ideális, csillapítatlan rendszerben a rezgés végtelen ideig, ugyanazon a frekvencián marad fenn. Valós esetben a spektrumban frekvenciacsúcsok jelennek meg, melyek nagy valószínűséggel a rendszer módusfrekvenciái lesznek.

Módusalakok ábrázolása

A gitár testén a módusokat (m, n) alakban jelöljük a továbbiakban, ahol m a transzverzális félhullámok, illetve n a longitudinális félhullámok száma a rezgő felületen [4].

3.2. A móduselemzés

Ebben a fejezetben nagyrészt a [9] jegyzetre támaszkodtam. A móduselemzés egy olyan mérési módszer, ami a hangszertestre jellemző sajátrezgések frekvenciáinak meghatározására alkalmazható. Alapja a rugalmas test rezgésbe hozása, amely történhet például impulzuskalapáccsal. Miután a testet magára hagyjuk, az csillapodó, egyéb hatásoktól független szabad rezgést végez, ami matematikailag is értelmezhető. Módusokról akkor beszélhetünk, ha a szabad rezgés egy exponenciális függvény és egy deformáció szorzataként leírható. A módus alakja az adott deformáció lesz [19].

A térben elosztott tömegű és merevségű valóságos rendszereknek végtelen számú szabadsági fokuk, ebből következően végtelen számú módusuk is van, melyek monoton növekvő frekvenciaértékeken jelennek meg. Azonban azt is kijelenthetjük, hogy egy adott folytonos rendszernek egy felső frekvenciakorlát alatt már véges számú módusa van [8].

Ha megvizsgáltuk az átviteli függvényeket, felismerhetjük, hogy azonos frekvenciákon ugyanolyan jellegű, de eltérő amplitúdójú csúcsok találhatók. A csúcsok a módusokat jelzik, a módusok alakját pedig az azonos frekvenciájú csúcsok komplex amplitúdójának aránya adja meg.

3.2.1. Az impulzusválasz mérése

A rendszer $h_i(t)$ erő-elmozdulás impulzusválaszait úgy értelmezhetjük, hogy a mért rendszer \mathbf{x}_0 pontjában pontszerű $\delta(t)$ erőimpulzussal hatunk, és mérjük a rendszer \mathbf{x}_i pontjaiban az elmozdulás $h_i(t)$ időfüggvényét [9].

A $H(j\omega)$ átviteli függvényt a frekvenciatartományban határozhatjuk meg. Ehhez Fourier-transzformálnunk kell a választ és a gerjesztést, majd venni a hányadosukat:

$$H(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{F(j\omega)}. \quad (3.1)$$

Ezután a $h(t)$ impulzusválaszt az átviteli függvény inverz Fourier-transzformálásával állítjuk elő.

3.2.2. Modális szuperpozíció

Az a feladatunk, hogy az előállított időtartománybeli $h(t)$ impulzusválaszok modális szuperpozíciója alapján megbecsüljük a lineáris rendszer paramétereit. A modális szuperpozíció felírható:

$$h(\mathbf{x}_i, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \psi_n(\mathbf{x}_i) \cos(\omega_n t + \phi_n) e^{-\alpha_n t}, \quad (3.2)$$

ahol $\psi_n = \sin k_n x$, U_n pedig az n -edik módus súlya. A \cos függvény exponenciális alakját felhasználva:

$$h_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (r_{ni} e^{\lambda_n t} + r_{ni}^* e^{\lambda_n^* t}), \quad i = 1 \dots S \quad (3.3)$$

ahol

$$\lambda_n = -\alpha_n + j\omega_n \quad (3.4)$$

a rendszer komplex pólusai, melyek megadják az ω_n sajátfrekvenciákat és az α_n csillapítási tényezőket, az

$$r_{ni} = \frac{U_n \psi_n(\mathbf{x}_i) e^{j\phi_n}}{2} \quad (3.5)$$

tagok pedig a módusokhoz tartozó reziduumok.

Észrevehetjük, hogy a komplex pólusok nem függenek a gerjesztés és válasz helyzetétől, vagyis az i indextől. A reziduumok tartalmazzák a helyfüggő módusalakokat, így más-más értékeket vesznek fel a különböző gerjesztés-válasz párok esetén.

3.2.3. A komplex pólusok meghatározása

Valóságos mérés esetén a modális szuperpozíciót le kell korlátoznunk D számú módusra. Ebben az esetben az időfüggvények Δt időközönként rögzített minták formájában ($t = k \Delta t$, $k = 1, 2, \dots, K$) állnak rendelkezésre. Ekkor (3.3) egyenlet alakja:

$$h_i[k] = \sum_{n=1}^D (r_{ni} z_n^k + r_{ni}^* z_n^{*k}) \quad (3.6)$$

ahol $z_n = e^{\lambda_n \delta t}$. Írjuk fel a rendszeregyenletet, ha $h_i[k]$ mintasorozat egy $2D$ -fokú diszkrét rendszer szabadválasza:

$$h_i[k] = a_1 h[k-1] + a_2 h[k-2] + \dots + a_{2D} h[k-2D]. \quad (3.7)$$

A mért $h_i[k]$ impulzusválasz minták alapján próbáljuk meghatározni a rendszeregyenlet a_n együtthatóit! Ehhez írjuk fel a rendszeregyenletet az i -edik impulzusválasz minden egymás melletti $2D + 1$ számú mért $h_i[k]$ mintaszakaszára:

$$\begin{bmatrix} h_i[1] & h_i[2] & \dots & h_i[2D] \\ h_i[2] & h_i[3] & \dots & h_i[2D+1] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_i[K-2D-1] & h_i[K-2D] & \dots & h_i[2D+1] \\ h_i[K-2D] & h_i[K-2D+1] & \dots & h_i[K-1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2D} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_i[2D+1] \\ h_i[2D+2] \\ \vdots \\ h_i[K-1] \\ h_i[K] \end{Bmatrix}. \quad (3.8)$$

Ugyanezt felírhatjuk mátrixformában is:

$$\mathbf{R}_i \mathbf{a} = \mathbf{h}_i \quad (3.9)$$

majd az összes impulzusválaszra felírva és közös mátrixba rendezve az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_N \end{bmatrix} \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_N \end{Bmatrix}. \quad (3.10)$$

A sokszorosan túlhatározott egyenletrendszer legkisebb négyzetes hibájú megoldása:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{h}. \quad (3.11)$$

Az \mathbf{a}_n együtthatókkal felírt egyenlet karakterisztikus polinomját kell még meghatároznunk, hogy a karakterisztikus polinom komplex konjugált gyökpárjai megadják a pólusokat. A két egyenlet:

$$A(z) = z^{2D} - a_1 z^{2D-1} - \dots - a_{2D-1} z - a_{2D}, \quad (3.12)$$

és

$$\lambda_n = -\alpha_n + j\omega_n = \frac{\log z_n}{\Delta t}. \quad (3.13)$$

3.2.4. A módusalakok meghatározása

Az utolsó fázisban az ismert pólusok alapján megbecsülhetjük az egyes impulzusválaszokhoz tartozó r_{ni} reziduumokat. A h_i minden mintájára:

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_D & z_1^* & \dots & z_D^* \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_D^2 & z_1^{*2} & \dots & z_D^{*2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^K & z_2^K & \dots & z_D^K & z_1^{*K} & \dots & z_D^{*K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{1i} \\ r_{2i} \\ \vdots \\ r_{Di} \\ r_{1i}^* \\ \vdots \\ r_{Di}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_i[1] \\ h_i[2] \\ \vdots \\ h_i[K] \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

A túlhatározott $\mathbf{Z}\mathbf{r}_i = \mathbf{h}_i$ egyenletrendszert impulzusválaszonként külön-külön megoldhatjuk:

$$\mathbf{r}_i = (\mathbf{Z}^H\mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^H\mathbf{h}_i \quad (3.15)$$

ahol \mathbf{H} a konjugált transzponáltat jelöli.

A reziduumok meghatározása után a $\psi_n(\mathbf{x}_i)$ módusalakok kinyerése egyszerű, ehhez az $\frac{r_{ni}}{r_{n1}}$ hányadost kell képeznünk, aminek értéke $\psi_n(\mathbf{x}_i)/\psi_n(\mathbf{x}_1)$. A módusalakok értékét egy kiválasztott referencia-csomópontához viszonyítva kapjuk meg. Ezek az értékek természetesen újraskálázhatóak.

4. fejezet

A légüreg módusainak meghatározása

A gitártest viselkedésének komplexebb megértéséhez a légüreg módusait is vizsgálunk kell. Ezt megtehetjük méréssel, melyben a testet kívülről gerjesztjük és a válasz spektrumát elemezzük. Emellett létrehozunk egy számítógépes modellt is, amiben először a belső térfogatot közelítjük végeelem módszerrel, majd a már meglévő modellt továbbfejlesztve a hangszert körülvevő teret is hozzáadjuk a rendszerhez, a peremelem módszer segítségével. A mérés által kapott eredményeket összehasonlíthatjuk a számítógépes megvalósítással, ami nem más mint a véges- és peremelem módszerek csatolásából megszületett modell, melyet a mért adatok alapján optimalizálhatunk.

4.1. Végeelem módszer

A végeelem módszer – Finite Element Method (FEM) – véges tartományon felírt parciális differenciálegyenletek peremérték-feladatainak általános, numerikus megoldási módja [6]. A vizsgált térrészt számos kisebb egységre bontva az eredeti probléma – az akusztikai változók térbeli eloszlásának meghatározása – leegyszerűsödik. Így csomópontok (*nodes*) és elemek (*elements*) alakulnak ki. Ezek egy hálót (*mesht*) határoznak meg, amely a numerikus számítások alapja lesz [12]. A gitártest belső térfogatának módusalakjait a végeelem módszer segítségével ábrázolhatjuk Matlab környezetben, a *NiHu* toolbox segítségével.

Ismernünk kell a vizsgált tartományt leíró differenciálegyenleteket, a peremfeltételeket, illetve a gerjesztést. Az előbbi kettőből előállítható a peremérték-feladat gyenge alakja, ami a diszkretizálás alapja. Ezután a nagy rendszámú lineáris egyenletrendszer megoldását véges számú ismert $N(x)$ alakfüggvény lineáris kombinációjával közelítjük. Ezeket a lépéseket nézzük meg részletesebben a következőkben. (A végeelem módszer tárgyalás során nagyrészt a [6] forrásra támaszkodtam.)

4.1.1. Alapok

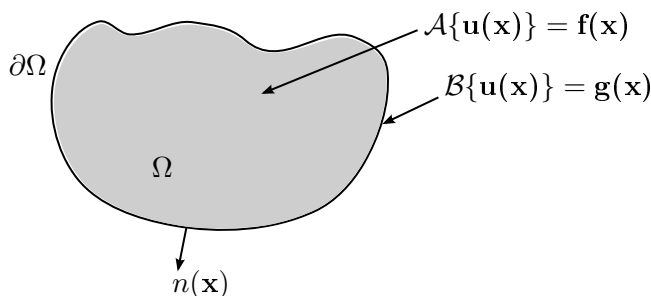
Keressük azt az $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ függvényt, ami a d -dimenziós tér egy zárt Ω tartományán kielégíti az

$$\mathcal{A}\{\mathbf{u}(\mathbf{x})\} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (4.1)$$

differenciálegyenletet, ahol \mathcal{A} tetszőleges differenciáloperátor, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ pedig az Ω tartományon megadott gerjesztés. Fontos továbbá, hogy az $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ függvény eleget tegyen az Ω tartomány $\partial\Omega$ peremére felírt feltételeknek is:

$$\mathcal{B}\{\mathbf{u}(\mathbf{x})\} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (4.2)$$

ahol \mathcal{B} szinten egy differenciáloperátor, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ pedig egy ismert függvény. A 4.1-es ábra ezt az elrendezést mutatja be.



4.1. ábra. Zárt tartományon felírt peremértékfeladat

A peremfeltétel-fajták közül kiemelendő a Dirichlet- és Neumann-típusú. Előbbinél az \mathbf{u} megoldásfüggvényt definiáljuk a peremen, tehát $\mathcal{B}\{\mathbf{u}(\mathbf{x})\} = \mathbf{u}$, utóbbinál pedig a függvény normális irányú deriváltját definiáljuk, tehát $\mathcal{B}\{\mathbf{u}(\mathbf{x})\} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}$, ahol \mathbf{n} a $\partial\Omega$ perem kifelé mutató normális vektora.

A dolgozatban az akusztikai hullámeqyenlet tekinthető kiindulási differenciálegyenletnek.

4.1.2. Az akusztikai hullámeqyenlet

A hullámeqyenlet a fizika két alapvető törvényéből, a tömegmegmaradás és az impulzusmegmaradás törvényeiből vezethető le [15]. Az akusztikai hullámeqyenlet időtartománybeli alakja \tilde{p} hangnyomásra:

$$\Delta \tilde{p}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (4.3)$$

ahol c a nyomáshullám terjedési sebessége a közegben és t az idő.

Akusztikai vizsgálatok esetében azonban állandósult állapotú hangtérben vizsgálódunk, tehát a differenciálegyenletek frekvencia-tartománybeli leírását kell megadnunk. Rendez-

zük át a (4.3) egyenletet és térjünk át frekvenciatartományba a Fourier-transzformáció segítségével. Az időbeli kétszeri differenciálás frekvenciatartományban $j\omega$ négyzetével való szorzást jelent. Néhány átalakítás után az egyenlet a következő alakot ölti:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = 0. \quad (4.4)$$

Ha $\Delta = \nabla^2$ és $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2$, ahol $k = \frac{\omega}{c}$ a hullámszám, akkor

$$(\nabla^2 + k^2)\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = \mathcal{H}\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = 0, \quad (4.5)$$

a Helmholtz-egyenlet, amelyben \mathcal{H} a Helmholtz-operátor.

4.1.3. Peremfeltétel-probléma a frekvenciatartományban

Egy differenciálegyenlet teljes megoldásához a használatkor meghatározott peremérték-és kezdeti feltételeket kell megadnunk. A vizsgált Ω tartománynak közös pereme van egy mechanikai struktúrával ($\Gamma_s \subseteq \Gamma$). A peremfeltételek Γ_s minden pontjára leírják az összefüggést a mechanikai struktúra (v_s) és a határoló anyag (v_f) sebessége között. A perem ($\Gamma \in \mathbb{R}^d$) két diszjunkt részre osztható fel: $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_v$, ahol Γ_p a Dirichlet-típusú, Γ_v pedig a Neumann-típusú feltételt jelzi.

Feltesszük, hogy az Ω tartomány minden pontján és minden ω frekvenciáján teljesül a Helmholtz-egyenlet (4.5). Mivel Dirichlet-típusú feltételt adtunk meg, Γ_p peremen a hangnyomás komplex amplitúdója van előírva:

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = \bar{p}(\mathbf{x}, \omega) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_p, \quad (4.6)$$

ahol $\bar{p}(\mathbf{x}, \omega)$ a peremen előírt hangnyomás a helykoordináták és a körfrekvencia függvényében.

A Γ_v peremen Neumann-típusú feltételnél használt normális irányú deriváltak adják meg a hangnyomás komplex amplitúdóját. Először írjuk fel a linearizált Euler-egyenletet:

$$\nabla \tilde{p} = -\varrho_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}, \quad (4.7)$$

melynek Fourier-transzformálásával megkapjuk a Neumann-feltételt:

$$\frac{\partial \hat{p}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \mathbf{n}} = -j\omega \varrho_0 \bar{v}(\mathbf{x}, \omega) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_v, \quad (4.8)$$

ahol $\bar{v}(\mathbf{x}, \omega)$ a peremen előírt normális irányú részecske sebesség a helykoordináták és a körfrekvencia függvényében, ϱ_0 a közeg átlagos sűrűsége, \mathbf{n} pedig a felület normálvektora, ami a tartományból kifelé mutat.

4.1.4. Gyenge alak

A peremérték-feltételek gyenge alakja a végeelem módszer diskretizációs technikájának alapja. Feltételezi, hogy a (4.5) Helmholtz-egyenlet csak abban az esetben teljesül, ha a differenciálegyenletet egy $\phi(\mathbf{x}, \omega)$ tesztfüggvénnyel beszorozzuk, majd Ω tartományon integráljuk:

$$\int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}, \omega) (\nabla^2 \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) + k^2 \hat{p}(\mathbf{x}, \omega)) d\mathbf{x} = 0. \quad (4.9)$$

A fenti képlet általánosabb alakja a Helmholtz-egyenletnek és olyan esetekben is érvényesül, amikor a differenciális alak nem. A (4.9) egyenlet átalakításokkal, beszorzásokkal és behelyettesítésekkel az alábbi alakra hozható:

$$\begin{aligned} \varrho_0 c^2 \int_{\Omega} \nabla \phi(\mathbf{x}) \nabla \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} - \omega^2 \varrho_0 \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} = \\ = -j\omega \varrho_0^2 c^2 \int_{\Gamma_v} \phi(\mathbf{x}) \bar{v}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

ami a gyenge alak a frekvenciatartományon. (A levezetés a [15] forrásban megtalálható.)

4.1.5. A gyenge alak diskretizálása

A frekvenciatartománybeli differenciálegyenlet az Ω tartományon véges számú ismert $N(x)$ alakfüggvény lineáris kombinációjával közelíthetjük.

$$\hat{p}(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) p_i, \quad (4.11)$$

ahol $N_i(\mathbf{x})$ az Ω tartományon definiált i -edik alakfüggvény, illetve p_i az i -edik nyomás-együttható. Ez az egyenlet tulajdonképpen egy n -dimenziós vektortérben keresi a közelítő megoldást az Ω tartományon. A közelítés tökéletlenségét a szabadsági fokok véges n száma adja. A (4.11) egyenlet vektoralakban felírva

$$\hat{p} \approx \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{p} = \begin{bmatrix} N_1(\mathbf{x}) & N_2(\mathbf{x}) & \dots & N_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

alakot ölt, ahol $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ az alakfüggvény vektora, \mathbf{p} pedig a keresett együtthatóvektor. A nyomás gradiensét

$$\nabla \hat{p}(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^n \nabla N_i(\mathbf{x}) p_i = \nabla \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \quad (4.13)$$

szerint közelítjük, ahol ∇N_i az alakfüggvény gradiense.

A Galerkin variációs módszert alkalmazva a tesztfüggvénnyel a fentiekhez hasonlóan járunk el. Az ismeretlen nyomásértékeken a helyfüggetlen vektor elhagyásával a rendszer-

egyenlet mátrixos felírását kapjuk:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{p} = -j\omega \mathbf{q}, \quad (4.14)$$

ahol

- \mathbf{K} az akusztikus merevségi (vagy rugalmassági) mátrix,
- \mathbf{M} az akusztikai tömegmátrix,
- $\mathbf{q} \approx \mathbf{A}\mathbf{v}_n$ a gerjesztési vektor, illetve
- \mathbf{A} az akusztikai gerjesztési mátrix.

A (4.14) egyenletben szereplő mátrixok kifejezve alább olvashatók:

$$\mathbf{K} = \varrho_0 c^2 \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{N}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{M} = \varrho_0 \int_{\Omega} \mathbf{N}(\mathbf{x})^T \mathbf{N}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{q} = \varrho_0^2 c^2 \int_{\Gamma_v} \mathbf{N}(\mathbf{x})^T \bar{v}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} \quad (4.17)$$

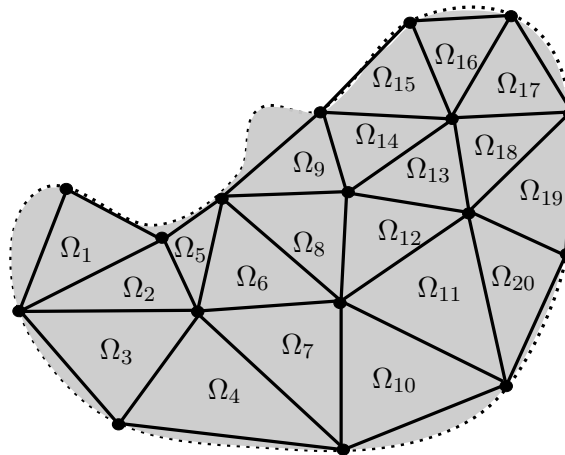
$$\mathbf{A} = \varrho_0^2 c^2 \int_{\Gamma_v} \mathbf{N}(\mathbf{x})^T \mathbf{N}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (4.18)$$

4.1.6. Tömeg- és merevségi mátrixok

Egy háromdimenziós közegben az alakfüggvények meghatározása nehéz feladat. A végelem módszer használatakor tehát arra is szükség van, hogy – a hangnyomás mellett – az Ω térrészt is diszkrétizáljuk, azaz véges számú diszjunkt elemre bontsuk:

$$\Omega \approx \bigcup_{e=1}^{N_e} \Omega_e, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = 0, \quad \text{ha } i \neq j. \quad (4.19)$$

Az elrendezésre egy példa a 4.2. ábrán látható.



4.2. ábra. Egy diszkrétizált felület

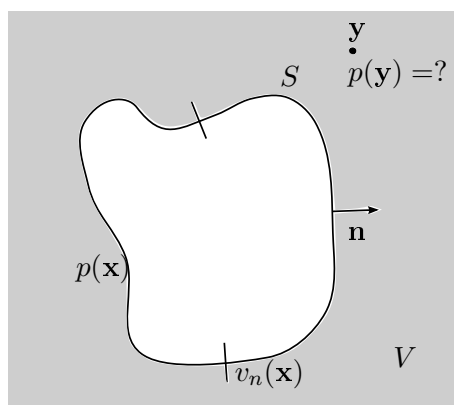
A feldolgozás elemenként történik, az alakfüggvények segítségével pedig közelíteni tudjuk a nyomást ezeken elemeken. Az egész tartományra összegzéssel írhatjuk fel a merevségi- (\mathbf{K}) és tömegmátrixokat (\mathbf{M}). Fontos továbbá, hogy az azonos típusú elemekre vett integrálokat ugyanazon az elemi tartományon kell kiértékelni.

4.2. Peremelem módszer

A végelem módszer segítségével megkapott modellünk még pontatlan, ugyanis a végtelen külső közegbe történő lesugárzás hatása nincs beleépítve. Jelen dolgozat tárgyát képező akusztikai probléma a gitár légüreg-módusainak meghatározása. A numerikus megoldáshoz szükségünk van a nyílt térben történő hullámterjedések leírására is. Ezeket a peremelem módszer segítségével modellezhetjük, melynek lényege, hogy az akusztikai változók kiszámíthatóak a térrész bármely pontjára, ha ismertek a határfelületen [15].

4.2.1. Alapok

Az akusztikai térszámítás feladatának leírásához a [7] forrást idézem. Adott egy zárt S felület, ami a V térfogatot határolja. A V térfogat egy nyílt, végtelen külső térfogat, azaz *kültéri* problémáról beszélünk. A felület a térfogat felé van irányítva, vagyis \mathbf{n} normális vektora a V térfogat felé néz. Az S felület minden \mathbf{x} pontjában ismerjük vagy a $p(\mathbf{x})$ hangnyomást, vagy a $v_n(\mathbf{x})$ normális irányú részecske sebességet. Célunk a V térfogaton belüli tetszőleges \mathbf{y} pontban kialakuló lesugárzott $p(\mathbf{y})$ hangnyomás meghatározása.



4.3. ábra. Kültéri lesugárzási probléma

A feladat megoldásához a hangtér egyenleteit kell kiszámítanunk a V térfogaton, úgy, hogy azok kielégítsék az S határoló-felületre felírt peremfeltételeket.

4.2.2. A probléma

Induljunk ki a vektoranalízis Green-tételéből, ami a közismertebb Gauss-Osztrogradszkij-tétel közvetlen következménye.

A Green-tétel kimondja, hogy ha $u(\mathbf{x})$ és $w(\mathbf{x})$ nemszinguláris függvények az S felület

által körbezárt, teljesen zárt V térfogaton belül, akkor:

$$\int_V \{u(\mathbf{x})\nabla^2 w(\mathbf{x}) - w(\mathbf{x})\nabla^2 u(\mathbf{x})\}dV = \int_S \{u(\mathbf{x})\nabla w(\mathbf{x}) - w(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})\}\mathbf{n}_k dS, \quad (4.20)$$

ahol \mathbf{n}_k az S felület kifelé mutató normális vektora. Legyen $u(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$ nyomásfüggvény, illetve $w(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ a megoldandó akusztikai probléma Green-függvénye. A Green-függvény a rögzített \mathbf{y} pontban elhelyezett pontforrás végtelen, homogén akusztikai térbe lesugárzott nyomásterét adja meg, vagyis megoldása a

$$(\nabla^2 + k^2)g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.21)$$

egyenletnek, amelyben $\delta(\mathbf{x})$ a háromdimenziós Dirac-delta függvényt jelöli. Alakítsuk át a (4.20) egyenletet a fenti adatok megadásával! Behelyettesítések és egyszerűsítések után az egyenlet a következő alakot ölti:

$$p(\mathbf{y}) = \int_S \{p(\mathbf{x})g'_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + j\omega\rho_0 v_n(\mathbf{x})g(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}dS \quad \text{ha } \mathbf{y} \in V. \quad (4.22)$$

A (4.22) egyenlet szerint, ha a V térfogat S határolófelületén ismert a p hangnyomás és a v_n részecske sebesség normális irányú összetevője, akkor egy bizonyos frekvencián, egy felületi integrál kiértékelésével meghatározható a hangnyomás a V térfogat egy tetszőlegesen kiválasztott belső \mathbf{y} pontján.

Az általunk vizsgált esetben az \mathbf{y} pont V térfogaton kívül van, tehát a (4.22) egyenlet bal oldalának értéke 0:

$$0 = \int_S \{p(\mathbf{x})g'_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + j\omega\rho_0 v_n(\mathbf{x})g(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}dS \quad \text{ha } \mathbf{y} \in V \bar{\cup} S. \quad (4.23)$$

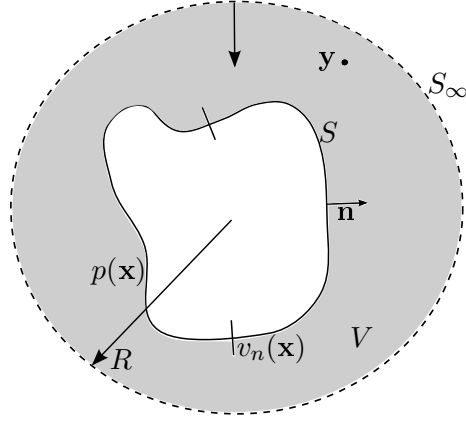
(A teljes levezetés a [7] forrásban található meg.)

4.2.3. Kültéri probléma

A gitár légüregének hanglesugárzását kültéri akusztikai problémaként kezeljük. Ahhoz, hogy a gitárt körülvevő térrészt is vizsgálni tudjuk, a végtelen nyílt térfogatot egy olyan zárt térfogat határhelyzeteként kell értelmeznünk, melyet belső oldalról az S sugárzó felület, külső oldalról pedig egy R sugarú S_∞ gömbfelület határol, melynek R sugara végtelen felé tart (4.4. ábra). Ezek alapján a (4.22) egyenletet az $S \cup S_\infty$ összetett felületre kell felírnunk:

$$p(\mathbf{y}) = \int_S \{p(\mathbf{x})g'_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + j\omega\rho_0 v_n(\mathbf{x})g(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}dS + \int_{S_\infty} \{p(\mathbf{x})g'_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + j\omega\rho_0 v_n(\mathbf{x})g(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}dS \quad \text{ha } \mathbf{y} \in V \quad (4.24)$$

Kültéri problémák esetén feltételezzük, hogy az S_∞ felületen végzett integrál határértéke zérus. Ez a *Sommerfeld-féle sugárzási feltétel*, ami tulajdonképpen azt jelenti, hogy a végtelen sugarú gömbfelület nem sugároz vissza hangnyomáshullámokat a V térfogatba.



4.4. ábra. A kültéri probléma visszavezetése beltéri problémára

4.2.4. Diszkretizálás

A végeelem módszerhez hasonlóan a felületet elemekre bontjuk, a keresett megoldást pedig alakfüggvényekkel közelítjük. Így a (4.22) egyenlet alakja:

$$p(\mathbf{y}) = \sum_{m=1}^{N_p} a_m(\mathbf{y})p_m - \sum_{m=1}^{N_p} b_m(\mathbf{y})v_m, \quad (4.25)$$

ahol az együtthatók:

$$a_m(\mathbf{y}) = \int_S N_m(\mathbf{x})g_n'(\mathbf{x}, \mathbf{y})dS \quad (4.26)$$

$$b_m(\mathbf{y}) = -j\omega\rho_0 \int_S N_m(\mathbf{x})g(\mathbf{x}, \mathbf{y})dS. \quad (4.27)$$

4.2.5. Az integrálegyenlet megoldása

A (4.25) egyenlet feldolgozásához ismernünk kell a p_m és v_m mintákat minden csomópontban. Ha már minden pontban ismerjük a felületi hangtérjellemzőket, akkor felírhatjuk az alábbi mátrixot:

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{B}\mathbf{v}, \quad (4.28)$$

ahol \mathbf{p} és \mathbf{v} oszlopvektorok a csomóponti nyomás- és sebességmintákat tartalmazzák, az \mathbf{A} és \mathbf{B} mátrixok elemei pedig:

$$A_{qm} = a_m(\mathbf{x}_q) - \frac{\delta_{qm}}{2} = \int_S N_m(\mathbf{x})g_n'(\mathbf{x}, \mathbf{y})dSp_m - \frac{\delta_{qm}}{2} \quad (4.29)$$

$$B_{qm} = b_m(\mathbf{x}_q) = -j\omega\rho_0 \int_S N_m(\mathbf{x})g(\mathbf{x}, \mathbf{y})dS, \quad (4.30)$$

ahol

$$\delta_{qm} = \begin{cases} 1, & \text{ha } q = m \\ 0, & \text{ha } q \neq m \end{cases} \quad (4.31)$$

a Kronecker-delta.

A (4.28) egyenletrendszer tetszőleges ismert hangtérjellemezőre megoldható. Így az összes csomópont nyomása és sebessége ismertté válik, tehát V térfogat bármely pontjára tudunk hangnyomást számítani. A nagy hátrány az, hogy az együtthatómátrixok frekvenciafüggő, telt mátrixok, tehát minden egyes frekvencián el kell végezni a numerikus integrálásokat.

4.3. Összekapcsolt véges- és peremelem módszer

Ennek a módszernek a segítségével azok a problémák is megoldhatóak, melyek a beltérbe és kültérbe egyaránt lesugároznak. A végelem módszer a beltéri feltételeket, míg a peremelem módszer a kültéri feltételeket elégíti ki. A rész tárgyalása során a [15] forrást idézem.

4.3.1. A probléma definiálása

Az általunk előállított számítógépes gitármodell légüregét egyelőre nem vizsgálhatjuk a kültéri lesugárzás szempontjából. Ahhoz, hogy ezt megtehesük, össze kell kapcsolnunk a végelem és peremelem módszereket. Ebben a részben a csatolás lépéseit adjuk meg általánosítva.

A rezonátort – ami nem más mint a gitártest – egy pontforrással ellátott szabad akusztikai közegbe helyezük. Az a feladatunk, hogy a létrejövő hangteret a rezonátor belsejében és külsejében egyaránt meghatározzuk. A vizsgált Ω tartomány a belső- (Ω_i) és a külső (Ω_o) tér uniója. A két térrész a rezonátor peremfelületén (Γ) lép kölcsönhatásba egymással. A peremfelület mechanikai struktúrája nagyban befolyásolja a hangnyomást, de jelen esetben a rezonátort merev falú testként kezeljük. A kialakult hangtér a belső- és külső tartományban is a beeső ($\hat{p}_i, \hat{\mathbf{v}}_i$) és a visszavert ($\hat{p}_r, \hat{\mathbf{v}}_r$) mezők szuperpozíciója, azaz

$$\begin{aligned}\hat{p}(\mathbf{x}) &= \hat{p}_i(\mathbf{x}) + \hat{p}_r(\mathbf{x}); \\ \hat{v}(\mathbf{x}) &= \hat{v}_i(\mathbf{x}) + \hat{v}_r(\mathbf{x});\end{aligned}\quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.32)$$

egyenletek érvényesek. A megoldást a következő lépésekben határozhatjuk meg:

1. A beeső hangtér kiszámítása.
2. A peremelem-mátrixok (**A** és **B**) előállítása
3. A beltéri problémák megoldása végelem módszerrel és a nyomásmező bármely kültéri pontjának meghatározása a peremelem módszerrel
4. Az előző lépéseket minden általunk vizsgált frekvencián meg kell ismételnünk.

4.3.2. A beeső mező

A beeső mező akusztikai változói az inhomogén Helmholtz-egyenlet megoldásával a pontforrásból számíthatóak. A hangnyomás mezeje:

$$\hat{p}_i(\mathbf{x}) = \frac{p_s e^{-ikr}}{4\pi r}, \quad (4.33)$$

ahol p_s a pontforrás amplitúdója. A részecskesebesség egyenlete pedig:

$$\hat{v}_i(\mathbf{x}) = -\frac{p_s e^{-ikr}}{4\pi \rho_0 c} \frac{1 + ikr}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (4.34)$$

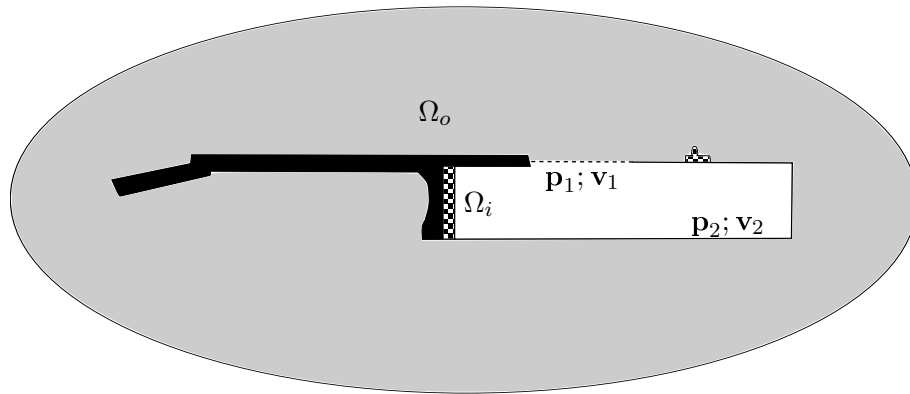
4.3.3. Peremérték-feltételek

Idézzük fel a peremelem módszer végső mátrixegyenletét, amely a felületi hangtérjellemzőket tartalmazza:

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_r = \mathbf{B}\mathbf{v}_r. \quad (4.35)$$

A rezonátor pereme két tartományra bontható:

1. Nyílás: ahol a külső és belső tartomány találkozik. Itt csatolási feltételeket kell megadnunk, hogy kiszámíthassuk az akusztikai változókat.
2. A test merev fala: azok a helyek, ahol a nyomás, vagy a részecskesebesség normálisa van megadva. Mivel nincs egyéb gerjesztés: $\hat{v}_n = 0$.



4.5. ábra. A gitártest metszete oldalnézetből

A 4.5. ábrán a gitár testének vázlata látható oldalnézetből. A szaggatott vonal jelzi a hanglyukat, a folytonos vonal pedig a fed-, oldal-, illetve hátlapokat. A hanglyuknál található az Ω_i belső térrész az Ω_o külső térrésszel.

A fentiek alapján a csomópontoknál a hangnyomás és részecskesebesség vektorok, illetve a peremelem mátrixok is felbonthatóak

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{r1} \\ \mathbf{p}_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{r1} \\ \mathbf{v}_{r2} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

formában. A (4.36) egyenlet második sora kifejezhető

$$\mathbf{p}_{r2} = \mathbf{A}_{22}^{-1}(-\mathbf{A}_{21}\mathbf{p}_{r1} + \mathbf{B}_{21}\mathbf{v}_{r1} + \mathbf{B}_{22}\mathbf{v}_{r2}) \quad (4.37)$$

alakban. Helyettesítsük be az így kapott értéket (4.36) egyenletbe:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})\mathbf{p}_{r1} &= (\mathbf{B}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_{21})\mathbf{v}_{r1} + \\ &+ (\mathbf{B}_{12} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_{22})\mathbf{v}_{r2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

A \mathbf{p}_{r1} együtthatómátrixa a bal oldalon nem más mint az \mathbf{A} mátrix *Schur-komplemente*, melyekre a következő jelöléseket alkalmazhatjuk:

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} \quad (4.39)$$

$$\mathbf{B}_{c1} = \mathbf{B}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_{21} \quad (4.40)$$

$$\mathbf{B}_{c2} = \mathbf{B}_{12} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_{22}. \quad (4.41)$$

Végezetül fejezzük ki \mathbf{v}_{r1} -et is:

$$\mathbf{v}_{r1} = \mathbf{B}_{c1}^{-1}(\mathbf{A}_c\mathbf{p}_{r1} - \mathbf{B}_{c2}\mathbf{v}_{r2}). \quad (4.42)$$

Ha a rezonátor fala tökéletesen merev, akkor \mathbf{v}_{r2} megegyezik $-\mathbf{v}_{i2}$ -vel.

4.3.4. A végeelem módszer egyenleteinek megoldása

A belső tartományban a Helmholtz-egyenletet kell megoldani a végeelem módszer segítségével:

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{p} = -j\omega\mathbf{A}\mathbf{v}. \quad (4.43)$$

Az egyszerűség kedvéért bevezetjük az

$$\mathbf{S} = \mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{Q} = -j\omega\mathbf{A} \quad (4.45)$$

jelöléseket. A belső tartomány diszkrétizált geometriája szintén két alrészre bontható, mint ahogy azt már a felszín esetében is tapasztalhattuk. További vizsgálódásainkhoz feltételezzük, hogy a belső tartományon nincs gerjesztő forrás, ami azt eredményezi, hogy $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Így a (4.43) mátrix-egyenlet

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{i1} + \mathbf{p}_{r1} \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i1} + \mathbf{v}_{r1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

alakra hozható. Bontsuk ki a mátrixokat! Így a

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{11}(\mathbf{p}_{i1} + \mathbf{p}_{r1}) + \mathbf{S}_{12}(\mathbf{p}_{i2} + \mathbf{p}_{r2}) &= \mathbf{Q}_{11}(\mathbf{v}_{i1} + \mathbf{v}_{r1}) \\ \mathbf{S}_{21}(\mathbf{p}_{i1} + \mathbf{p}_{r1}) + \mathbf{S}_{22}\mathbf{p}_2 &= \mathbf{Q}_{21}\mathbf{v}_1\end{aligned}\quad (4.47)$$

kifejezéseket kapjuk. Helyettesítsük be \mathbf{v}_{r1} -et a (4.42) egyenletből:

$$\mathbf{S}_{21}(\mathbf{p}_{i1} + \mathbf{p}_{r1}) + \mathbf{S}_{22}\mathbf{p}_2 = \mathbf{Q}_{21}[\mathbf{v}_{i1} + \mathbf{B}_{c1}^{-1}(\mathbf{A}_c\mathbf{p}_{r1} - \mathbf{B}_{c2}\mathbf{v}_{r2})]. \quad (4.48)$$

Ez alapján \mathbf{p}_2 :

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{S}_{22}^{-1}\{-\mathbf{S}_{21}(\mathbf{p}_{i1} + \mathbf{p}_{r1}) + \mathbf{Q}_{21}[\mathbf{v}_{i1} + \mathbf{B}_{c1}^{-1}(\mathbf{A}_c\mathbf{p}_{r1} - \mathbf{B}_{c2}\mathbf{v}_{r2})]\}. \quad (4.49)$$

A fenti kifejezés a (4.47) első egyenletébe helyettesítve:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{11}(\mathbf{p}_{i1} + \mathbf{p}_{r1}) + \mathbf{S}_{12}(\mathbf{S}_{22}^{-1}\{-\mathbf{S}_{21}(\mathbf{p}_{i1} + \mathbf{p}_{r1}) + \mathbf{Q}_{21}[\mathbf{v}_{i1} + \mathbf{B}_{c1}^{-1}(\mathbf{A}_c\mathbf{p}_{r1} - \mathbf{B}_{c2}\mathbf{v}_{r2})]\}) &= \\ &= \mathbf{Q}_{11}[\mathbf{v}_{i1} + \mathbf{B}_{c1}^{-1}(\mathbf{A}_c\mathbf{p}_{r1} - \mathbf{B}_{c2}\mathbf{v}_{r2})].\end{aligned}\quad (4.50)$$

Ha \mathbf{p}_{i1} , \mathbf{v}_{i1} és \mathbf{v}_{r2} is ismert, akkor \mathbf{p}_{r1} is kifejezhető. Így megkapjuk a hangnyomások értékeit a csomópontoknál. A belső tartomány maradék részére a hangnyomás kiszámítható a (4.47) kifejezés második egyenletének átrendezésével:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{S}_{22}^{-1}(-\mathbf{S}_{21}\mathbf{p}_1 + \mathbf{Q}_{21}\mathbf{v}_1). \quad (4.51)$$

Végezetül a külső tartomány nyomásmezőjét kell még kiszámolni, ami a peremelem módszerrel tehető meg.

A teljes megoldáshoz a nyomásmezőt a tartomány egész területén, minden kérdéses frekvencián meg kell határozni. Ez a folyamat nagy számításigényű, főként akkor, ha a modell nagyon részletes.

5. fejezet

Eredmények

Ebben a részben az előző fejezetek elméleti megfontolásainak gyakorlatba való átültetéséről lesz szó.

Elsőként egy Fender CD-60 típusú folk-gitár testének móduselemzését végeztem el, aminek eredményeképpen meghatároztam a rezgésalakokat és az azokhoz tartozó frekvenciaértékeket. A fejezet első részében ismertetem a szakirodalomban publikált mérések eredményeit és közlöm saját számításaimat is, melyeket összehasonlítottam a vonatkozó irodalomban publikáltakkal. A móduselemzés segítségével direkt módon nem lehet a hangszer minden részének hatását vizsgálni. Ehhez különböző numerikus technikákat kell alkalmazni [5].

A fejezet második részében az általam megvalósított légüreg-szimulációt elemzem. Az első alrészben a megépített gitármodell hálóját optimalizálom. Végül a folk-gitárokra jellemző, a fedlaphoz képest meredek hátlap is megjelenik a *mesh*-en. Ezután a végeselem-szimulációt értékelem ki, ahol a külső közeg és a belső légüreg még nincs kapcsolatban egymással. A modellt a csatolt szimulációban fejlesztettem tovább, ahol már a hanglyuk szerepe is jelentőssé válik. Erről a fejezet harmadik alrészében található leírás. A negyedik alrész a valós gitáron végrehajtott átviteli-karakterisztika méréséről, illetve az eredmények és a szimulált modell összevetéséről szól.

Végül a fejezet utolsó, harmadik részében a felhasznált programokról esik néhány szó.

5.1. Móduselemzés a fedlapon

Egy gitártest vizsgálatának talán legkézenfekvőbb módszere az, ha elsőként a legnagyobb hangteljesítményt lesugárzó részét, a fedlapját vizsgáljuk meg. Ezáltal képet kaphatunk a hangszert használat közben érő hatásokról és azok következményeiről.

A továbbiakban az általam Matlab környezetben elvégzett móduselemzés lépéseit és eredményeit kívánom összefoglalni, illetve összehasonlítani azokat más mérésekkel, melyekről szakirodalmakban olvastam.

5.1.1. Mérési összeállítás

Elsőként rögzíteni kellett a hangszeret, hogy a mérés elvégezhető legyen rajta. A fej alá szivacsot tettem, a testet pedig egy zsinór segítségével függesztettem fel úgy, hogy a fedlap vízszintesen álljon.

Ezután mérési pontokat vettem fel a gitáron, melyek helyzetét az 5.1a. ábra mutatja. Ezeken a helyeken kellett gerjeszteni a fedlapot úgy, hogy egy adott x_0 pontban pontszerű $\delta(t)$ erőimpulzussal hatottam és közben gyorsulás-érzékelők mérték a rendszer x_i pontjaiban az elmozdulás $h_i(t)$ impulzusválaszát.

A móduselemzés során húrok nincsenek a hangszeren. Az impulzus-szerű gerjesztő erőt tehát mással kell helyettesíteni. A valóságban a pontszerű impulzus kivitelezése lehetetlen, ezért kalapács-impulzust alkalmaztam. Az átviteli függvény meghatározásához elengedhetetlenül szükséges, hogy a kalapács fején lévő erőt, a gerjesztést mérni lehessen. Mivel a kalapács feje piezo elven működik – azaz egy erőérzékelő cella van beleépítve – a gerjesztő erő meghatározható.



(a) A fedlap mérőpontjai



(b) A fedlap mérése



(c) A fedlap gyorsulásérzékelője



(d) A hátlap gyorsulásérzékelője

5.1. ábra. Móduselemzés a gitáron

Van tehát két pontunk a testen, melyekből átviteli függvényt lehet számítani. Ezt az átviteli függvényt minél több ponton kell megmérni, hogy a lehető legpontosabb kép alakuljon ki a fedlap dinamikus viselkedéséről. A mérési elrendezés a 5.1b. ábrán látható. Szerencsére a gyorsulás-érzékelőkkel nem kell végigvándorolni a gitár egész felületén, ugyanis érvényesül a reciprocitás elve. Ez azt jelenti, hogy az x_0 pontban gerjesztett rendszer x_i pontban mért válasza megegyezik az x_i pontban gerjesztett rendszer x_0 pontban mért válaszával. Így elég csak a könnyen reprodukálható gerjesztés helyét változtatni.

A lapok válasza gyorsulás-érzékelőkkel vizsgálható, melyek tömegei a mért testhez viszonyítva elhanyagolhatók. Az érzékelőket viasszal gond nélkül rögzíteni tudtam, jelen mérés esetén a 5.1c. és 5.1d. ábrákon látható helyekre [4].

A móduselemzés során zajok léphetnek föl, melyek hatása átlagolással csökkenthető. Ebben az esetben adott x_i pontban a mérést N -szer kell megismételni, a mérésben négy átlagot vettem.

Miután minden pontot „végigkalapáltam”, az eredményeket Matlab környezetben mentettem le. Ezek után az adatok feldolgozása következett.

5.1.2. Analízis

Az elmentett mérési adatok beolvasása után rendelkezésemre állt az átviteli függvény és a frekvenciavektor. Ezekből az adatokból voltak megkaphatók a gitár módusalakjai és az azokhoz tartozó frekvenciaértékek.

A feldolgozás során az *EMA* toolbox `stabilization` függvényét használtam a rendszer komplex pólusainak (λ_n) meghatározására. Ehhez többek között elő kellett állítanom egy indikátor-függvényt, amely az átviteli karakterisztikát logaritmikusan ábrázolta a frekvencia függvényében. Ennek segítségével a frekvenciacsúcsok könnyebben leolvashatók, illetve a stabilizációs folyamat helyessége is ellenőrizhető volt. A mintavételi frekvencia segítségével megadtam az időnövekményt és inverz Fourier-transzformáltam az átviteli függvényt az `ifft` parancs használatával. Ezen kívül fontos volt még a szabadsági fokok mennyiségének megadása is, ami az illesztett lineáris rendszer maximális foksámát határozta meg.

A gitár fedlapjának móduselemzése során körülbelül 50 Hz és 800 Hz között volt érdemes vizsgáldni. Nagyjából ezek azok a frekvenciák, amelyeken a pengetős hangszer meg tud szólalni.

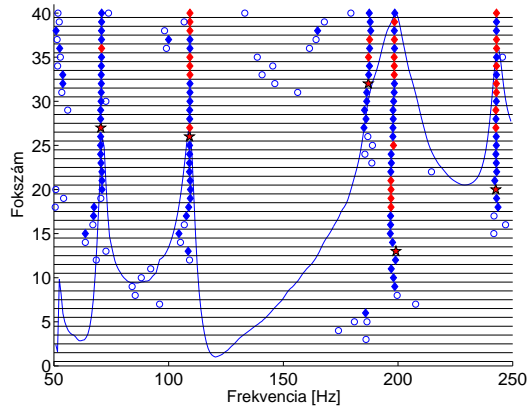
A stabilizációs folyamat során nem szabadott se túl nagy, se túl kicsi frekvenciasávot megadnom. Túl keskeny sávban a függvény nem biztos, hogy megtalálta a csúcsokat, túl nagy sávban pedig nem talált meg minden módusalakot.

A gitár testén elhelyezett két gyorsulásérzékelő használatakor észrevettem, hogy alacsonyabb frekvenciákon a hátlapon elhelyezett érzékelő szolgáltat jobb eredményeket, magasabb frekvenciákon pedig a fedlapra tapasztott műszer pontosabb.

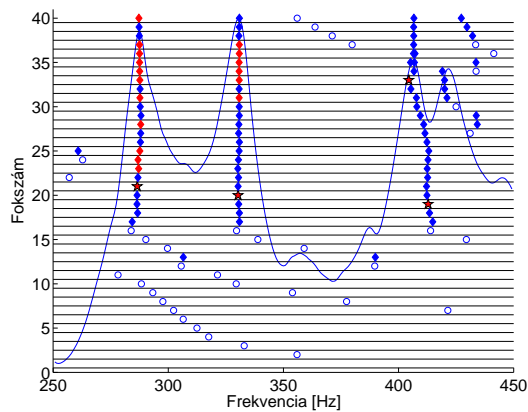
Szemléltetés céljából megtekinthetőek a stabilizációs diagramok az 5.2. ábrán, melyeken látható, hogy a kék pontok a frekvenciacsúcsok alá rendeződnek és néhány helyen piros színűre váltanak. A kék szín a megtalált módusfrekvenciát, a piros pedig ezen kívül a helyes csillapítást is jelöli. A piros pontok lesznek tehát a hangszer módusfrekvenciáihoz tartozó megfelelő módusalakok.

Lai és Burgess tanulmányukban egy klasszikus gitár móduselemzését írják le, úgy, hogy a húrok is a gitáron vannak. A méréseik karakterisztikája nagyon hasonló a 5.2. ábra diagramjaihoz, azzal az eltéréssel, hogy ők 265–425 Hz-ig nem találtak frekvenciacsúcsokat [13]. Tulajdonképpen ez is egybevág a mérési eredményekkel, ugyanis Rossing is két klasszikus gitárt analizált, és ő is csak az egyiknél talált egyetlen frekvenciacsúcsot 382 Hz-en [10].

A 5.2b. ábrát elemezve látható, hogy 100 Hz fölött kevéssel egy- és 200 Hz környékén két



(a) 50 és 250 Hz között



(b) 250 és 450 Hz között

5.2. ábra. Stabilizációs diagramok

(0, 0)-ás módusalakot talált a program. Ez egybeesik azzal a megállapítással, miszerint e három érték kombinációs módus, amikor a fed- és hátlap, illetve a légüreg azonos fázisban rezonál (Meyer 1980) [2].

A következő lépésben ki kellett választanom az általam ábrázolni kívánt módusalakokat. Ezen pontoknak a λ_n értékeit mentette le a Matlab egy vektorba, amellyel a továbbiakban dolgoztam.

Ahogy azt a harmadik fejezetben már említettem, a komplex pólusok nem függenek a gerjesztés és válasz helyzetétől. A reziduumok tartalmazzák a helyfüggő módusalakokat, melyek meghatározása látványos eredményeket produkált. Az `lstd` függvény a legkisebb négyzetek módszerével számította ki a komplex pólusok reziduumait az időtartományban.

Ezen kívül meg kellett még határozni a csillapítási tényezőket és a sajátfrekvenciákat, ami a $\lambda_n = -\alpha_n + j\omega_n$ egyenlet valós-, illetve képzetes részre való felbontását jelentette.

Az értékek ábrázolása során egy, a fedlapról készült képet alapul véve, a `ginput` függvény segítségével csak be kellett vinni a gitáron felvett pontok x és y koordinátáját, melyek alapján a `deLaunay` parancs háromszögekből felépülő hálót határozott meg úgy, hogy három-három pontot összekötött.

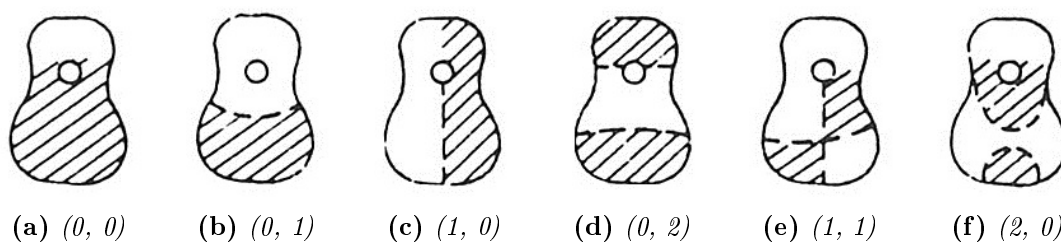
Így azonban olyan helyeken is ábrázolva lettek eredmények, ahol egyébként nem volt felvéve mérő-, illetve gerjesztőpont. Ilyen volt például a hanglyuk teljes felülete, vagy az

érintőkkel ellátott fogólap, és a nyolcas formájú fedlap hajlataiban létrejövő néhány háromszög. Ezen kívül a húrlábon sem tudtam pontokat felvenni, ennek pedig az volt az oka, hogy a felület nem volt teljesen sík.

A nem kívánt háromszögeket egy többszörösen összetett ciklussal távolítottam el, mely egy előre megadott vektort hasonlított össze minden háromszög három alkotópontjával. A vektorban azon pontok indexei voltak felsorolva, melyeket nem szabadott egymással összekötni. (Így a perem, a hanglyuk és a húrláb határolópontjai.) Ha három ilyen pontot talált a ciklus, akkor a háromszöget kitörölte az ábrázolásból.

5.1.3. Eredmények

Ismert, hogy a mérési eredmények nagyban függenek az akusztikai környezettől. A legelterjedtebb módszer a gitár teste köré homokot szórni, hogy mozdulatlan legyen a mérés ideje alatt, miközben a hanglyuk is le van zárva. Ilyen körülmények között végezte Rossing 1985-ben a méréseit, melyek során két folk-gitár fedlapjának móduselemzését hajtotta végre [10]. A módusalakok az 5.3. ábrán tekinthető meg.



5.3. ábra. A fedlap módusalakjai

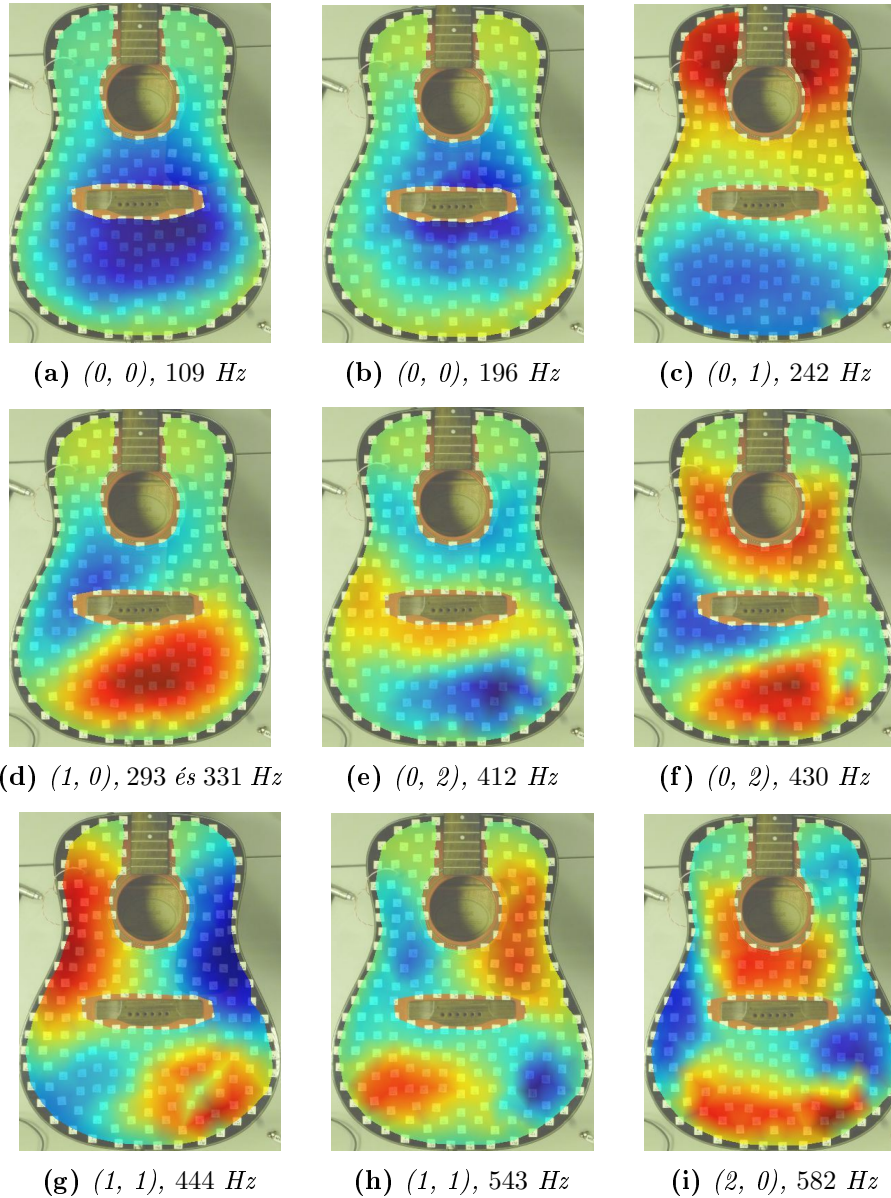
Ezen kívül megismerkedtem Dan Russel méréseivel is, aki szintén móduselemzést hajtott végre egy Gibson Hummingbird típusú folk-gitáron [16]. Russel a móduselemzést a húrokkal együtt végezte el és a hangszert gumiszalagokkal rögzítette. Ezen kívül a hanglyuknál egy mikrofon segítségével a levegő mozgását is vizsgálta, amely összeállítás a 5.1b. ábrán szintén látható.

Az általam elvégzett mérések során a homokágyat nem tudtam biztosítani, így azok összehasonlítása a Rossing-féle eredményekkel nem feltétlenül egyértelmű, de mégis támpontot adhat. Ugyanez igaz a Russel-féle mérésre is, ugyanis más eredmények jönnek ki a húrokkal együtt, mint azok nélkül. Ettől függetlenül a módusalakok és frekvenciaértékeik közel esnek az általam elvégzett mérés eredményeivel.

Az 5.4. ábrán tehát a Fender CD-60 néhány módusalakját láthatjuk, a mérések összesített eredményei pedig az 5.1 táblázatban olvashatók.

Típus	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 2)	(1, 1)	(2, 0)
Martin D-28	163	326	390	431	643, 685	756
Martin D-35	135	219	313	397	576	648
Gibson Hummingbird	188	262	315	385	481	-
Fender CD-60	109, 196	242	293, 331	412, 430	444, 543	582

5.1. táblázat. A fedlap módusalakjainak frekvenciái Hz-ben, különböző gitártípusokra



5.4. ábra. A Fender CD-60 módusalakjai

Látható, hogy ezzel a móduselemzési eljárással több azonos módusalakot találtam eltérő frekvenciákon. Nagyobb eltérések a magasabb frekvenciákon előforduló módusalakoknál tapasztalhatóak, gyakorlatilag 580 Hz felett nem is találtam értékelhető eredményeket.

5.2. A légüreg módusai

Az előző részben a fedlap módusalakjait határoztam meg, melynek során a gitár hanglesugárzási mechanizmusa ismertté vált számomra. A következőkben a hangszer működésének pontosabb, átfogóbb megértéséhez külön vizsgálatnak vettem alá a gitár légüregét is.

Ehhez először egy modellt kellett létrehoznom, melyet a végeelem módszer alkalmazásával tettem meg. A modell segítségével megkerestem a légüreg módusalakjait és az azokhoz

tartozó frekvenciaértékeket. Miután összehasonlítottam a megkapott eredményeket a szakirodalommal, némi eltérésre lettem figyelmes, amely abból adódhatott, hogy a létrehozott végeelem-szimuláció a hanglyukat is zártnak feltételezi. Ezért a továbbiakban a modell fejlesztésről is szó esik, ahol a végeelem-szimulációt a peremelem módszer segítségével csatolt szimulációvá bővítettem. A lesugárzással együtt már hatékonyabban szimulálható a hangszer légürege, alacsonytól egészen magas frekvenciáig. Ezen értékek valódiságát egy mérés ellenőriztem, melynek kiértékelése szintén ebben a részben olvasható.

5.2.1. A modell létrehozása

A hangszer, melynek modelljét létrehoztam, megegyezik azzal a Fender CD-60 típusú folk-gitárral, amit móduselemzésnek is alávettem.

A hangszertest paramétereit a valósághoz híven adtam meg: $L_y = 50$ cm és $L_z = 9,3$ cm, ahol L_y a test magassága, L_z pedig a légüreg mélysége a gitár nyak felőli végén. A test húrlábhhoz közelebbi oldalán a mélység nagyobb, ez a folk-gitárokra jellemző tulajdonság. A hátlap meredeksége az egyenes egyenletének megváltoztatásával hozható létre, melyről a későbbiekben esik majd szó.

A fedlap további méreteit nem kellett megadni. Elég volt egy, a gitárt ábrázoló fényképet Bezier-görbékkel, *Inkscape* program segítségével körberajzolni (5.5a). A vektorgrafikus `.eps` fájlokat a Matlab képes feldolgozni. A *NiHu* toolbox `read_epspath` nevű függvénye mátrix formába tudja alakítani az ilyen típusú fájlokat. Ezután kezdődhetett el a *mesh* megépítése. Ehhez a `mespath` nevű függvényt kellett meghívni, melynek két bemeneti paramétere a körvonalmátrix és az elemméret. A skálázást is beállítva (a `scale_mesh` függvény segítségével), a létrejövő ábra az 5.5b. képen látható.

A következő lépés az volt, hogy a körvonalat kétdimenziós és háromszögletű elemekkel töltssem ki. Ezt a `fill_polygon` függvény végezte el. Az ábrázolt kimenet az 5.5c. képen látható. A határoló elemek méretét előzőleg megadtam, ettől függ a *mesh* finomsága. Észrevehető, hogy a hanglyuk peremének felbontása nagyobb. Itt az elemek oldalhossza körülbelül fele akkora, mint a fedlap egyéb pontjain.

Ezután a gitár hálóját ki kellett terjeszteni a térben, amely az `extrude_mesh` parancs kiadására történt meg. A kimenetet az 5.5d. ábrán tekinthető meg. Ahogy fentebb már említettem, a folk-gitárokra jellemző, hogy a hátlap nem párhuzamos a fedlappal, hanem valamekkora meredeksége van. Ez a jellemző úgy volt beépíthető a légüreg modelljébe, hogy a z -tengely egyenesének egyenletét átalakítottam. Az így létrejövő légüreg modelljét az 5.5e. ábra oldalnézetből mutatja.

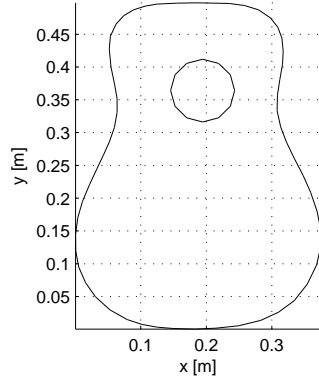
A *mesh* struktúrája

A légüreg szimulációja során a *NiHu* toolboxot használtam, melyben a létrehozott hálók *mesh* struktúrákba menthetőek el. A struktúrák négy adatmezeje töltődik föl:

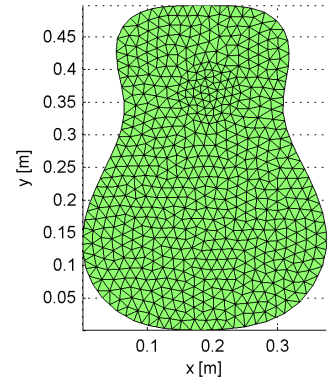
- `mesh.Nodes`: a csomópontok koordinátáit tartalmazza
- `mesh.Elements`: a *mesh* elemeit tárolja



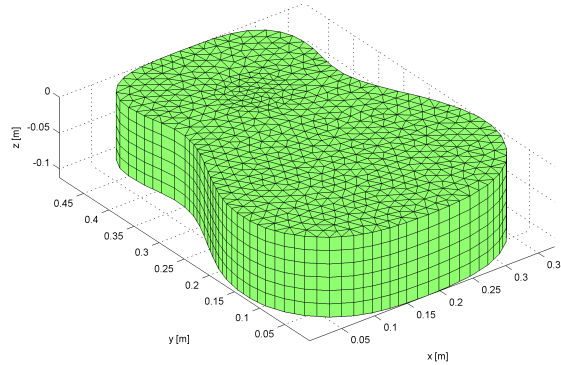
(a) A körülrajzolt fedlap



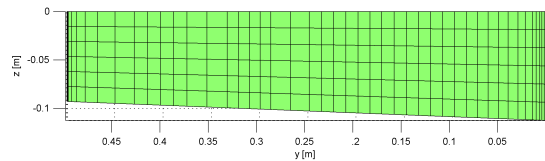
(b) A skálázott körvonal



(c) A fedlap hálója



(d) A térbeli mesh



(e) A hátlap meredeksége

5.5. ábra. A mesh megépítésének lépései

- `mesh.Properties`: a struktúra jellemzőit tartalmazza, alap esetben nincs használatban
- `mesh.Materials`: az anyagjellemzők, melyek tárolják az anyag típus-azonosítóját, átlagos sűrűségét (ρ) és a hang közegbeli terjedési sebességét (c). Esetünkben a gitár légüregét a levegő tölti ki, melyre igaz, hogy:

$$\rho_l = 1,225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (5.1)$$

$$c_l = 343 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (5.2)$$

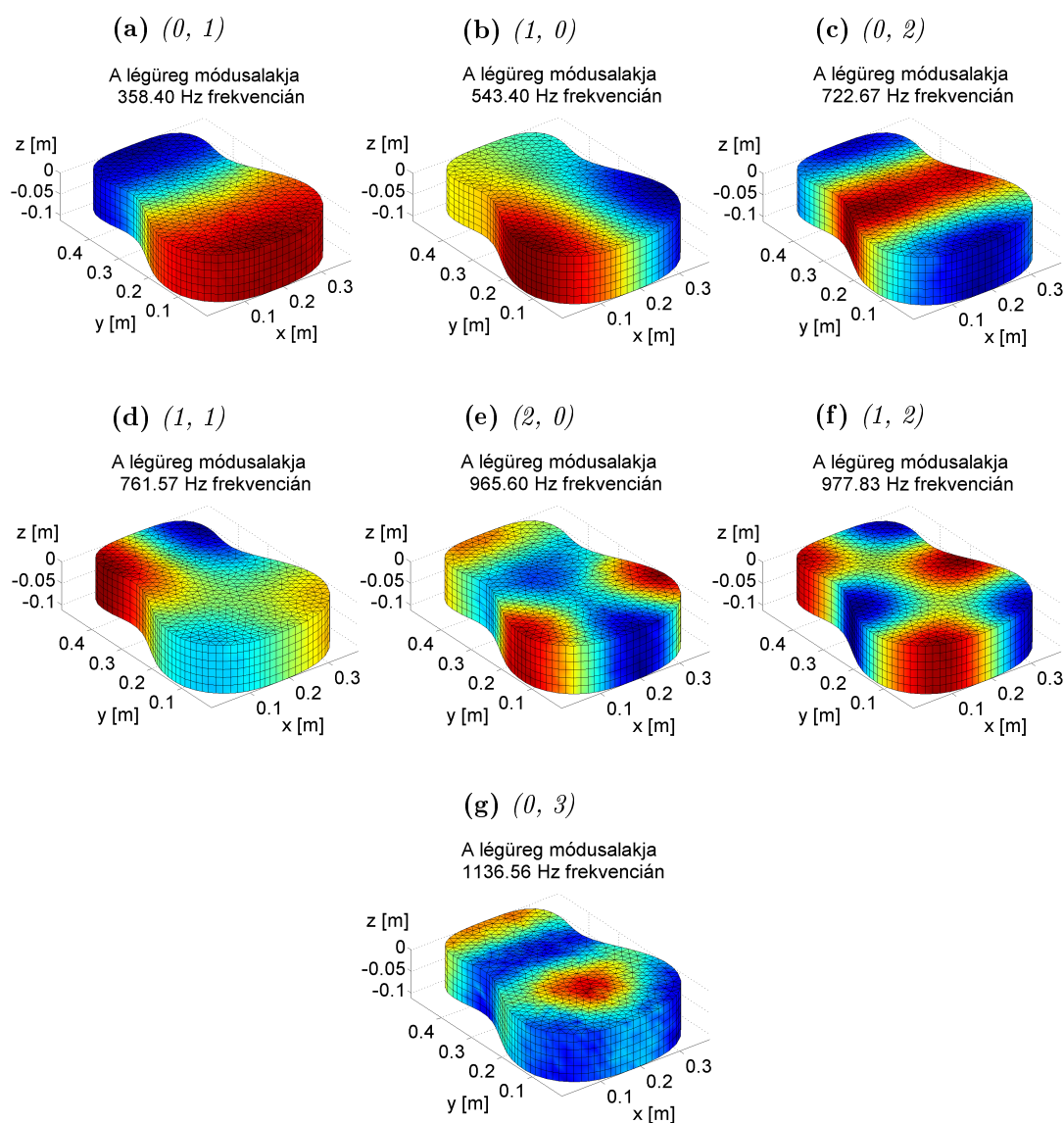
A modellalkotás során fontos volt a `mesh.Materials` mező kitöltése, hiszen csak így lehetett valós körülményeket modellezni. (Ezt a részt a [14] forrásból vettem át.)

5.2.2. Végeselem szimuláció

Miután a hangszer testét kitöltő légüreg modellje elkészült, analízisnek lehetett alávetni. A végeselem módszert alkalmaztam, hogy a rezgő levegő módusfrekvenciáit megállapítsam a gitár belsejében.

A szimuláció megvalósítása

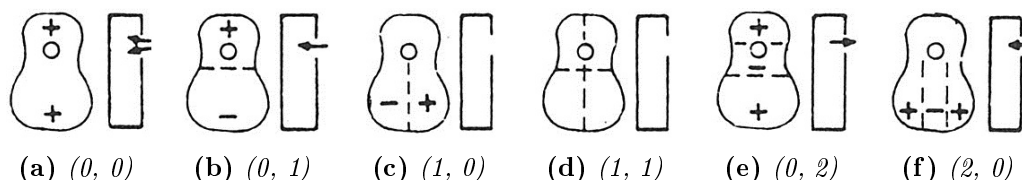
A *NiHu* toolbox `model_mk` függvényét használtam fel arra, hogy a légüreg tömeg- (\mathbf{M}) és merevségi mátrixait (\mathbf{K}) megkapjam. Ezután már csak a módusalakok megkeresése volt hátra. Ezt a `fe_modes` függvény hajtotta végre, amely kiszámította a legalacsonyabb sajátfrekvencia-értékeket, illetve ábrázolta a hozzájuk tartozó módusalakokat. Az 5.6. ábrán az eredményeket tekinthetjük meg.



5.6. ábra. Szimulált eredmények végeselem módszert alkalmazva

Eredmények

Hasonlítsuk össze ezeket az eredményeket a [10]-os forrás 215. oldalán található mérési adatokkal! Ezeket a méréseket speciális körülmények között végezték. A hangszerek oldalait úgy rögzítették, hogy homokágyba tették őket, így biztosítva a határfelületek merevségét. A hanglyuk eközben egy vékony lappal volt lezárva. A végeselem szimuláció során a modell határoló felületei is merevként vannak definiálva és a hanglyuk is zártnak van feltételezve. Mindent összevetve tehát van összehasonlítási alapunk.



5.7. ábra. A légüreg módusalakjai

Az 5.7. számú sematikus ábrákon a gitár légüregének módusai vannak lerajzolva, a hozzájuk tartozó megmért adatok pedig az 5.2. táblázatban találhatóak.

Típus	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(0, 2)	(2, 0)
Martin D-28	121	383	504	652	722	956
Martin D-35	118	392	512	666	730	975
Szimuláció [3]	155	418	545	718	771	981
Fender CD-60 (FE)	–	359	545	765	721	969

5.2. táblázat. Valós és szimulált légüreg-módusok frekvenciáértékei Hz-ben I.

A táblázat első két sorában lévő adatok Rossing 1985-ös mérésének eredményei [10], a harmadik sorban a [3] tanulmány végeselem szimulációjának adatai olvashatóak, illetve a legelső sorban az általam szimulált légüreg ugyanazon módusalakjainak frekvenciaértékei olvashatók.

Az adatokat Rossing eredményeivel összevetve látható, hogy kirívó eltérés az (0, 0) és az (1, 1)-es módusalaknál van. Utóbbinál körülbelül 100 Hz-cel nagyobb frekvenciaértéket állapítottam meg. A Helmholtz-módus (0, 0) megtalálása sem sikerült, de ezeken kívül elmondható, hogy a szimuláció valószerű értékeket produkált.

Az eltérések adódhatnak abból, hogy a modellben eltekintettem a gerendázatok szerepétől, illetve, hogy a külső közeg nincs összekapcsolva a hangszer légüregével. A gerendázatok a légüreg esetében csak térfogatcsökkentő hatásúak, kialakításuk a fedlap módusalakjait befolyásolja döntően. Jelen modellben tehát megvalósításuktól eltekintettem.

A külső közegbe történő lesugárzás beépítése feltételezéseim szerint az eredményeket nagy mértékben befolyásolhatja. A különbséget a csatolt véges- és peremelem szimuláció mutathatja ki.

Elejabarrieta, Ezcurra és Santamaría szintén végeselem-szimulált modellje hasonló eredményeket hozott [3]. A különbségek a modellek nyilvánvaló eltéréséből adódhatnak. A legszembetűnőbb, hogy az (1, 1)-es és a (0, 2)-es módusalakok szinte felcserélődtek frekvenciájukat tekintve.

5.2.3. Csatolt szimuláció

A cél tehát az volt, hogy a külső közegtől teljesen elzárt modell kültéri problémák megoldására is használható legyen. Ehhez a negyedik fejezetben leírt csatolt eljárást kellett megvalósítani Matlab környezetben.

A csatolás megvalósítása

A végeelem mátrixok (\mathbf{M} és \mathbf{K}) az előző alrészben ismertetett módon, a `model_mk` függvénnyel számíthatók ki. Fontosabb most, hogy a peremelem módszer rendszermátrixait (\mathbf{A} és \mathbf{B}) hogyan kaptam meg. A `mesh`-ből csak a burkoló elemeket tartottam meg (`get_boundary`) és a nem használt belső csomópontokat kivettem a modelltől. Így ismeretek lettek a felületi hangtérjellemzők, tehát kiszámíthatóvá vált a rendszermátrix. Ehhez a `bemHG` függvényt kellett meghívni, ami egy adott frekvenciára meghatározta \mathbf{A} és \mathbf{B} mátrixokat. A frekvenciafüggés miatt a k hullámszámot is bemenő paraméterként kellett megadni.

A `node_normals` függvénnyel meghatározható a burkoló csomópontjainak normálvektora. Ez azért kellett, hogy megállapíthassam a beeső hangnyomást és a normális irányú részecske sebességet, az `incident` függvény segítségével.

A következő lépés a peremen lévő csatolt és nem csatolt pontok meghatározása volt. A 4.5. ábrán jól látható, de egyébként is egyértelműnek vehető, hogy a gitár légürege egyetlen helyen, a hanglyuknál érintkezik a külső közeggel. A `mesh` azon pontjait kell tehát csatoláshoz használni, amelyek a $z = 0$ síkon vannak, illetve a lyuk peremén belül esnek. A kör egyenletét felhasználva tudtam kiválasztani ezeket a csomópontokat, amelyek egy meghatározott r sugáron belül helyezkednek el:

$$\begin{aligned}(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &< r^2 + \varepsilon^2, \\ -\varepsilon &< z < \varepsilon.\end{aligned}\tag{5.3}$$

A viszonyítási pont természetesen a hanglyuk középpontja, melynek x_0 és y_0 koordinátáit a térbeli hálót ábrázolva tudtam leolvasni (5.5d. ábra). Az (5.3) képletek tehát a hanglyuk pontos helyét adják meg a háromdimenziós térben, ahol ε tolerancia, ami a z -tengely pontos behatárolása miatt érdekes. (A gitár fedlapja $z = 0$ síkban helyezkedik el.)

Ezek után már fel lehetett építeni a peremelem részmatrixait, a következőképpen:

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}(\text{csatolt_pont}, \text{csatolt_pont}),\tag{5.4}$$

$$\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}(\text{csatolt_pont}, \text{nem_csatolt_pont}),\tag{5.5}$$

$$\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}(\text{nem_csatolt_pont}, \text{csatolt_pont}),\tag{5.6}$$

$$\mathbf{A}_{22} = \mathbf{A}(\text{nem_csatolt_pont}, \text{nem_csatolt_pont}).\tag{5.7}$$

(A fentiek a \mathbf{B} mátrixokra is érvényesek.) Az így meghatározott mátrixokból a *Schur-komplementek* kiszámíthatók (4.39).

A következő lépés a beltéri problémák esetében használt Helmholtz-egyenlet (4.43) rész-

mátrixainak felírása volt. A `model_a` hívásával a perem hálójának akusztikai gerjesztőmátrixát határoztam meg. (Így a \mathbf{Q} mátrix is ismertté vált.) A részmatrixok meghatározása során a (5.4) képletekben használt módszert és a *Schur*-féle származtatást követtem.

Miután minden mátrixot megkaptam, fel lehetett írni a megoldás végső lépéseit. A negyedik fejezetben feltételeztük, hogy a belső tartományon nincsen gerjesztő forrás, azaz $\mathbf{v}_2 = 0$ lett. Ezért elsőként a \mathbf{p}_{i1} -et, a \mathbf{v}_{i1} -et, illetve a merev feltételt (azaz $\mathbf{v}_{i1} = -\mathbf{v}_{r2}$) lehetett kiszámítani.

Meghatároztam a reflektált nyomást (\mathbf{p}_{r1}), illetve (4.42) a reflektált sebességet a csatláznál (\mathbf{v}_{r1}). Így

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{teljes1} &= \mathbf{p}_{i1} + \mathbf{p}_{r1}, \\ \mathbf{v}_{teljes1} &= \mathbf{v}_{i1} + \mathbf{v}_{r1} \end{aligned} \quad (5.8)$$

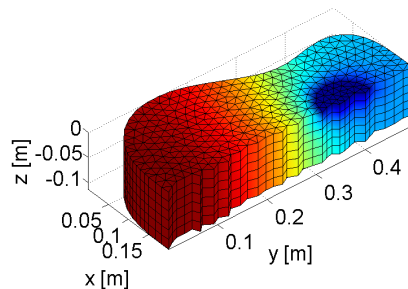
egyenletek megoldhatóak lettek. Az utolsó lépés a (4.51) egyenlet megoldása volt, melyben \mathbf{p}_2 -t számítottam ki. Ezáltal megkaptam a hangnyomást és részecske sebességet a modell minden csomópontjára egy bizonyos, előre meghatározott frekvencián.

A modellen egy ciklus alkalmazásával teljeskörű szimuláció volt lefuttatható. Ebben az esetben azonban néhány egyszerűsítési lehetőséget szem előtt kellett tartanom.

A merevségi- (\mathbf{K}) és tömegmátrix (\mathbf{M}) frekvenciától független mennyiség, tehát a vizsgált frekvenciatartomány nagyságától függetlenül csak egyszer kellett kiszámítani. Az \mathbf{S} mátrix frekvenciafüggő, de könnyen létrehozható egyszerű mátrixműveletekkel. Az előbbi mátrixok ritkák, ebből következik, hogy gazdaságosan tárolhatók és különböző mátrixinverziós algoritmusok alkalmazásával gyorsan feldolgozhatók.

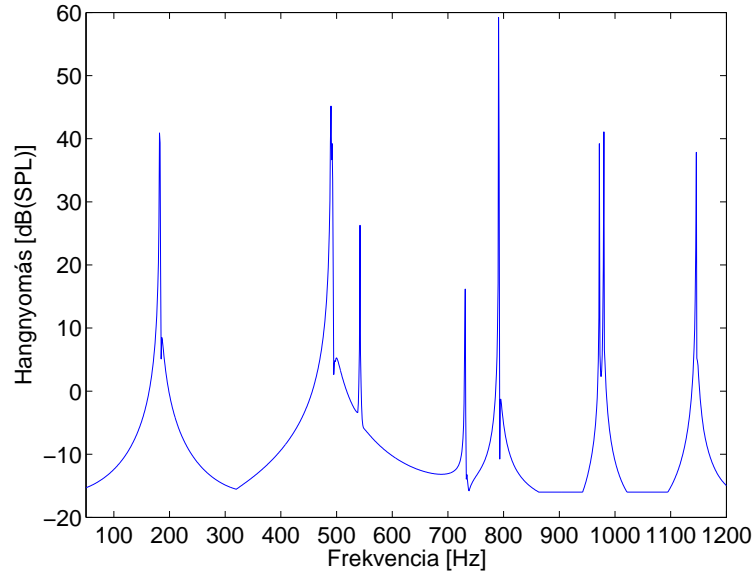
Eredmények

A csatolt módszer tehát figyelembe veszi a légüreg szerepét. Erre láthatunk példát az 5.8. ábrán.



5.8. ábra. A hanglyuk beépítésének hatása a csatolt szimulációra

A modell segítségével egy 50 Hz-től 1200 Hz-ig terjedő skálán futtattam le a szimulációt, 1 Hz-es felbontással. (Ezt a műveletet egy átlagos teljesítményű számítógép körülbelül tíz óra alatt végezte el.) Minden egyes frekvenciaértékhez lementettem a hozzátartozó nyomás- és sebességvektor-értékeket. A hangnyomás abszolútértékének maximumát a frekvencia függvényében logaritmikusan ábrázoltam, így kaptam meg az 5.9. ábrán látható



5.9. ábra. A szimulált karakterisztika

karakterisztikát.

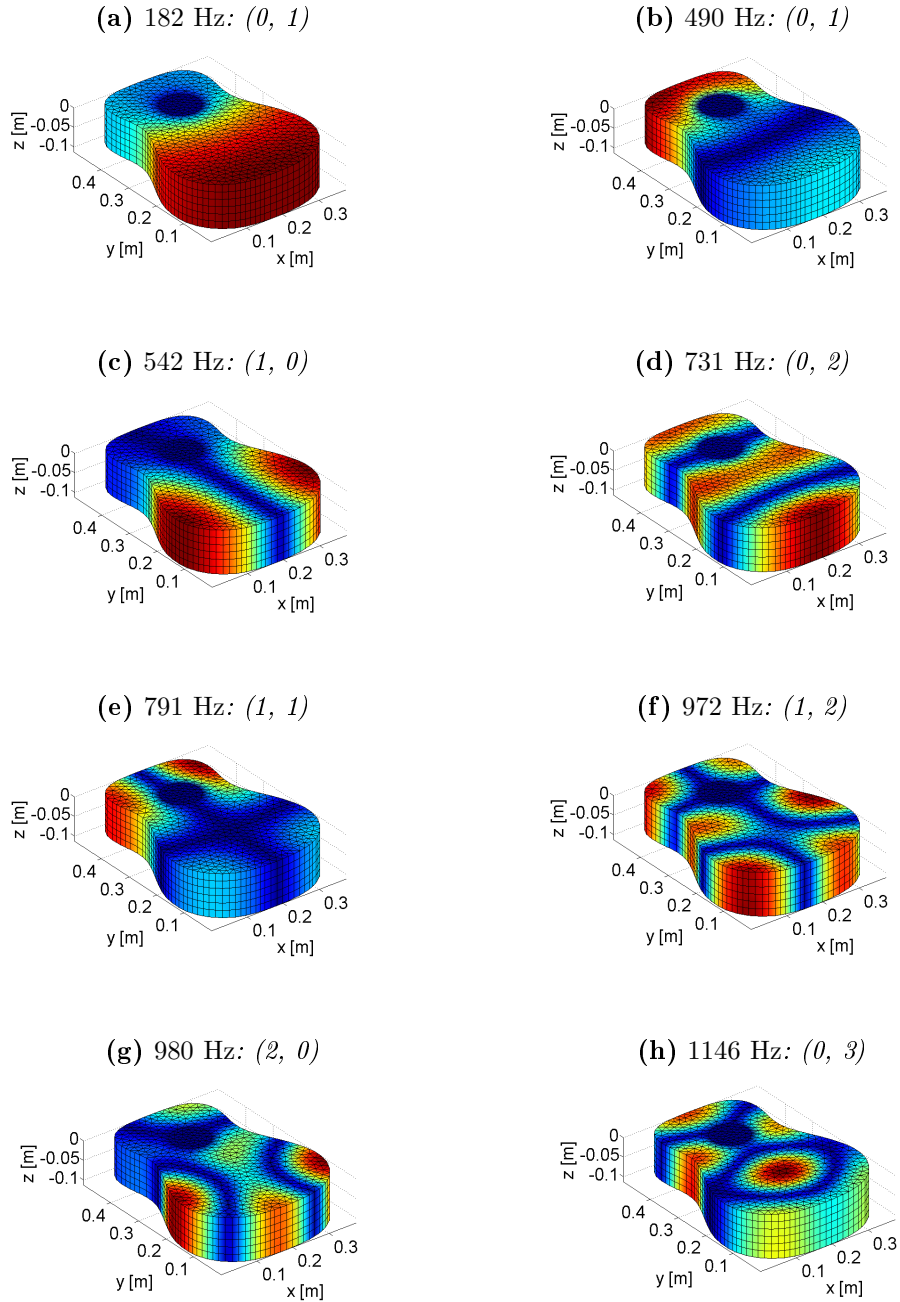
A grafikonon jól látszik, hogy néhány frekvenciaértéken kiemelkedő nyomásértékek jöttek létre. Állandósult állapotban a légüreg ezeken a frekvenciákon a leghatékonyabb rezonátor, tehát kijelenthető, hogy a csúcsok a szimulált légüreg módusfrekvenciái. A csúcsok azért ilyen élesek, mert a modellben a lapok tökéletesen merevek, a csillapítás nincs beépítve. A 900 és 1050 Hz környékén látható konstans értékek nem a reflektált hangnyomást mutatják. A karakterisztika a hangnyomás maximumát ábrázolja, ezekben az esetekben tehát a beeső hangnyomás nagyobb mint a reflektált. A modellben a pontforrás konstansként van definiálva és ez az 5.9. ábrán is jól látszik. Az 5.10. ábrán megtekinthetők a módusalakok a kicsúcsosodó frekvenciaértékeken.

Hasonlítsuk most össze az új módusalakok frekvenciaértékeit a Rossing-féle [10] mérésekkel és a modell eddigi eredményeivel! A végeselem szimuláció során előállított táblázat egy új sorral bővíthető. Ez látható a 5.3. táblázatban.

Típus	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(0, 2)	(2, 0)	(0, 3)
Martin D-28	121	383	504	652	722	956	–
Martin D-35	118	392	512	666	730	975	–
Szimuláció [3]	155	418	545	718	771	981	–
Fender CD-60 (FE)	–	359	545	765	721	969	1137
Fender CD-60 (FEM/BEM)	–	182, 490	542	791	731	980	1146

5.3. táblázat. Valós és szimulált légüreg-módusok frekvenciértékei Hz-ben II.

A csatolt szimuláció sem talált eredményt a Helmholtz módusra. De eltérést tapasztaltam a (0, 1)-es módusalaknál is: két frekvenciaérték is kiemelkedett ezzel a módusalakkal és mindegyik körülbelül 100 Hz távolságra van az eddig megkapott eredményektől. Viszonylag nagy változás, hogy az (1, 1)-es módusnál még feljebb került a módusalak frekvenciája. A többi eredmény megfelel az elvárásoknak.



5.10. ábra. Szimulált eredmények végelem módszert alkalmazva

5.2.4. Átviteli-karakterisztika mérése

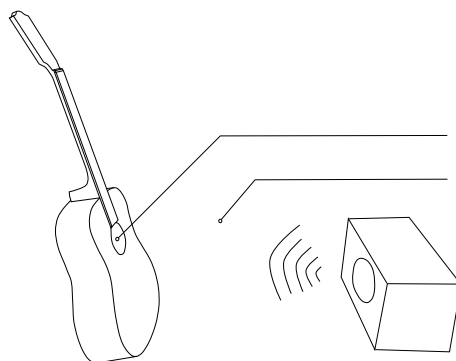
A csatolt szimulációval kapott karakterisztika ellenőrzésére elvégeztem egy mérést a Fender CD-60 típusú folk-gitáron, hogy leellenőrizzem a szimuláció helyességét, illetve pontosságát.

Mérési összeállítás

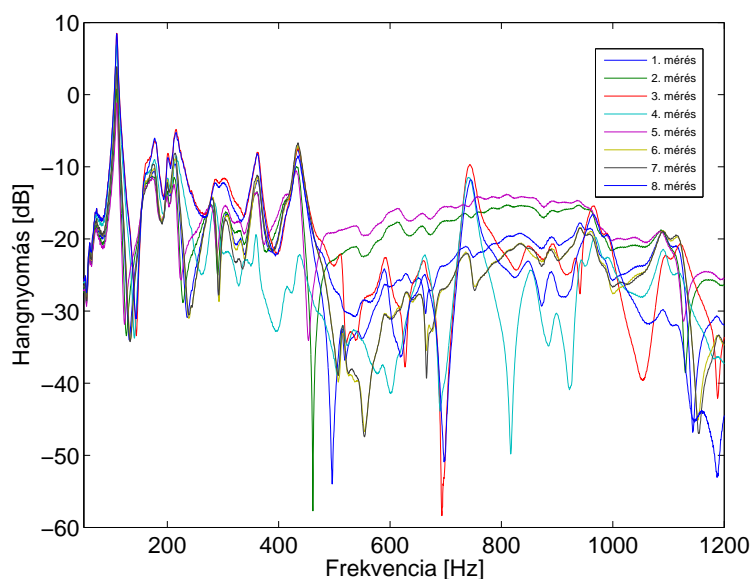
A kísérlet során a hangszer átviteli függvényét határoztam meg két mikrofon segítségével. A méréseket süketszobában végeztem, ahol 1 Hz-től 5100 Hz-ig, exponenciálisan növekvő frekvenciájú mérőjellel (*sweep*) gerjesztettem a hangszeret, amin nem voltak hú-

rok. (A kiértékelés azonban csak 50 és 1200 Hz között lesz fontos, ugyanis körülbelül ezeken a frekvenciákon rezeg egy valós gitár.) Egy mérést nyolc próba átlagolásából számította ki a *NiHu* toolbox. A gitár körülbelül egy méter távolságra volt a hangszórótól.

Az egyik mikrofon vagy a hanglyuk síkjában, vagy a gitár belsejében volt és a légüreg választ mérte a gerjesztésre. A másik mikrofon, a referencia szerepét betöltve, a hangszer testétől fél méter távolságban mérte a gerjesztést. Mindkét mikrofon az analizátorhoz volt vezetve. A mérés összeállítása a 5.11a. ábrán tekinthető meg.



(a) A mérési elrendezés



(b) A mérések eredményei

5.11. ábra. Gerjesztés-válasz mérése

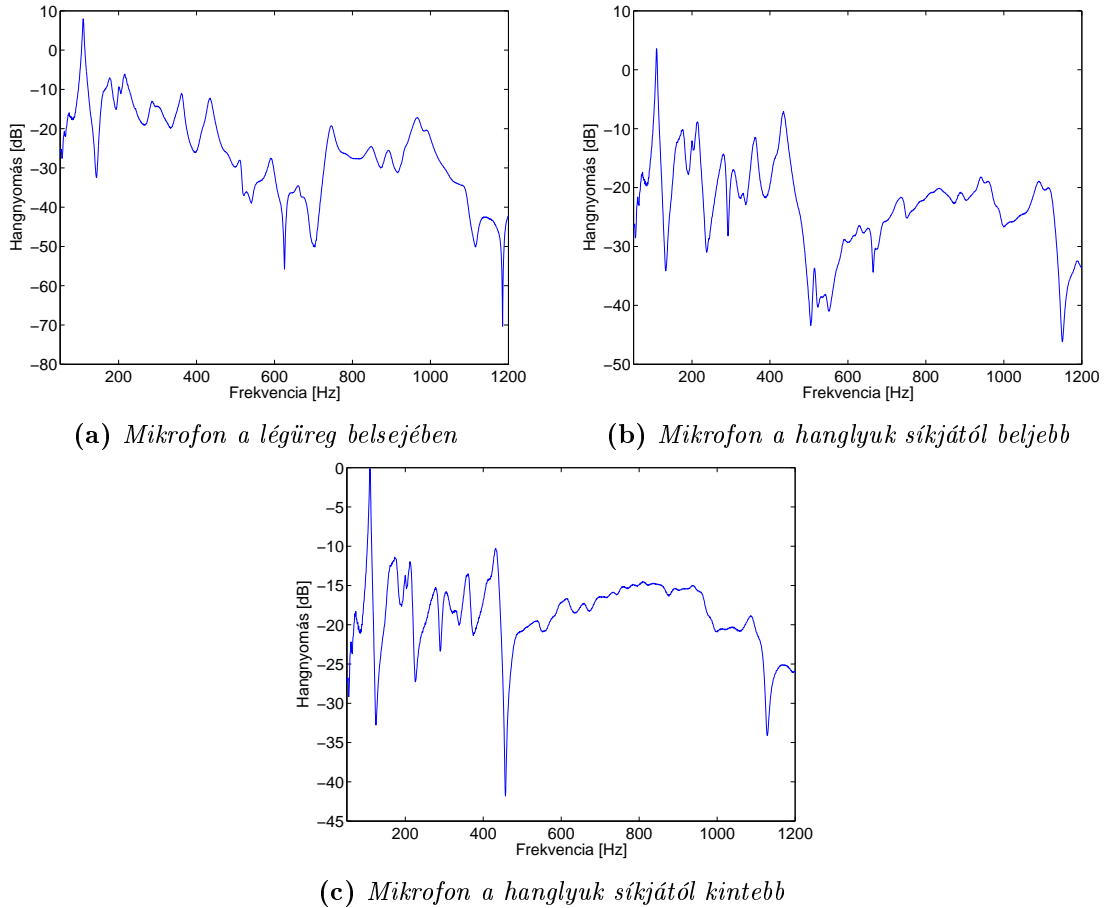
Eredmények

Összesen nyolc mérést végeztem el, ezeknek az eredményeit az 5.11b. ábra mutatja be. A függvények áttekintése ilyen formában nehéz, a karakterisztikákat csoportosítani kell.

Látható, hogy a 3., 4. és 8. mérés hasonló eredményt hozott: mind a három esetben a mikrofon a légüreg belsejében volt elhelyezve, három különböző helyzetben, vagy a gitár legaljára engedve, vagy nagyjából középen. Ezen kívül észrevehető, hogy az 1., 6. és 7. mérés is közel megegyező karakterisztikákat eredményezett: ekkor a mikrofon a hanglyuk

síkjánál 1 cm-rel beljebb volt, a hanglyuk középpontjában, vagy a jobb oldali széléhez közel. A 2. és 5. mérés esetében a mikrofon a hanglyuktól 1–1,5 cm távolságban volt kifelé.

Az azonos típusú méréseket átlagoltam, így született meg az 5.12. ábrán látható három karakterisztika.



5.12. ábra. Csoportosított eredmények, átlagolás után

A grafikonokból látszik, hogy alacsonyabb frekvenciákon, nagyjából 500 Hz-ig azonos frekvenciaértékeken helyezkednek el a csúcsok. Amikor a mikrofon nem a légüreg belsejében van, akkor 500 Hz felett elég zajos a válaszfüggvény, nem olvasható le módusfrekvencia (5.12c. ábra). Az 5.12a. és 5.12b. karakterisztikák esetében az egész frekvenciatartományon értékelhető eredményeket kaptam. A legkiugróbb csúcs 109,1 Hz-en található, de ezen kívül markánsan látszanak például a 176, 215, 363, 435, 590, 740, 967 és 1117 Hz-en kialakuló légüregmódusok is.

A mérés és a modell eredményeinek összehasonlítása

Az összehasonlítás szempontjából a hangnyomás mértéke nem fontos, ugyanis ez a hangforrás helyétől, amplitúdójának nagyságától, illetve hangerejétől függ. A mérésekből objektíven csak a csúcsok frekvenciaértékei hasonlíthatóak össze a szimulált eredményekkel.

Bár a frekvenciacsúcsok módusalakjait nem tudtam meghatározni a mérések során, azokra mégis lehet következtetni. Az eddigi eredmények táblázatát a különböző módusalakok

feltételezett értékeivel bővíttem ki (lásd 5.4. táblázat).

Típus	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(0, 2)	(2, 0)	(0, 3)
Martin D-28	121	383	504	652	722	956	–
Martin D-35	118	392	512	666	730	975	–
Szimuláció [3]	155	418	545	718	771	981	–
Fender CD-60 (FE)	–	359	545	765	721	969	1137
Fender CD-60 (FEM/BEM)	–	182, 490	542	791	731	980	1146
Fender CD-60 (mérés)	109	363	514	–	736	967	1117

5.4. táblázat. Az összesített légüreg-módusok frekvenciértékei Hz-ben

A legszembetűnőbb különbség a modell hiányosságára hívja fel a figyelmet: sem a végeelem, sem pedig a csatolt szimuláció nem találta meg a (0, 0)-ás módusokat, melyek a legszembetűnőbb csúcsok a mérések során, 109 Hz frekvencián.

Ezen kívül észrevehető, hogy az (1, 1)-es módus (kb. 790 Hz-nél) egyedül a 5.12c. ábrán jelenik meg a mérési eredmények között, de ott is csak egy nagyon elhanyagolható frekvenciacsúcsot hozva létre.

Összességében elmondható, hogy a mérés hasznos és sikeres volt. A végeelem-szimulált és a csatolt-szimulált légüregmódusok rendre megjelentek a Fender CD 60 *sweep*-re adott válasz-karakterisztikájában.

5.3. Felhasznált programok

A szimulációkat Matlab környezetben végeztem, a móduselemzéshez az *EMA*, a légüreg-szimulációhoz pedig a *NiHu* toolboxot használtam. A vektorgrafikus képeket Inkscape segítségével rajzoltam meg.

6. fejezet

Összefoglalás

Munkám során a gitárral, mint összetett rezgő rendszerrel foglalkoztam. Megismertem a hangszer fizikai felépítését és hangképzésének folyamatát. Megértettem, hogy a gitár húrjai csak nagyon csekély hangot sugároznak ki a közegbe, valamint, hogy ennek a csekély hangnak a felerősítéséért a fedlap, illetve a gitár légürege felelős.

Ezek alapján irodalomkutatásba fogtam, ami alapján világossá vált számomra, hogy a hangszertestet egyben, a fedlapon végzett móduselemzéssel, illetve a rezgő rendszerekre való tekintettel különválasztva is lehet analizálni, különböző numerikus technikák alkalmazásával.

Elsajátítottam egy móduselemzési eljárást, amellyel egy Fender CD-60 típusú folk-gitár fedlapjának módusalakjait és a hozzájuk tartozó frekvenciaértékeket határoztam meg. A mérés során impulzuskalapáccsal, pontszerű erőimpulzussal gerjesztettem a húrok nélküli hangszer fedlapját, ezzel egy időben pedig gyorsulásérzékelők mérték a test választát. A pontok között átviteli karakterisztikákat lehetett kiszámítani, melyek kiértékelése során a rendszer komplex pólusai szolgáltatották a kívánt eredményt.

Az eljárás megvalósítása során a szakirodalomban olvasott eredményeket sikerült megközelíteni.

A dolgozat másik részében a numerikus módszerek alkalmazásáról volt szó, melyek ismerete a gitár légüregének modellezésében elengedhetetlenül fontos volt. Megismertem a végeselem-, illetve peremelem módszereket, melyek segítségével egy jól használható, háromdimenziós modellt tudtam megalkotni Matlab környezetben. A modell beváltotta a hozzá fűzött reményeket, ugyanis a rajta elvégzett szimulációk a szakirodalomban olvasott való mérésekhez nagyon hasonlóak lettek. A szimuláció helyességét később egy méréssel is igazoltam, ahol a Fender CD-60 válaszána frekvenciacsúcsait állapítottam meg egy exponenciálisan növekvő frekvenciájú mérőjellel.

Összességében elmondható, hogy a dolgozat elkészítése alatt sikerült elmélyednem az akusztika alapjaiban illetve a numerikus módszerek alkalmazásában.

A jövőben a modell továbbfejlesztésén szeretnék dolgozni. A következő feladat a gitár határolólapjainak megvalósítása és a gerendázatok beépítése lehet. Ezen kívül a húrok szerepét is szeretném vizsgálni, illetve az eddigi modellhez kapcsolni.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni mindenkinek, akik támogattak és segítettek eddigi egyetemi tanulmányaim során. Külön szeretnék köszönetet mondani a szüleimnek és Lillának, akik mindig mellettem álltak és biztattak. Különösképpen hálával tartozom konzulensemnek, Rucz Péternek, aki fáradhatatlanul segített a téma kidolgozásában és a dolgozat létrejöttében, mind a tartalmat, mind a L^AT_EX-beli szövegszerkesztést illetően. Végül, de nem utolsó sorban szeretném megemlíteni gitártanáromat, Roth Edét, akinek kísérletező természete és precizitása mindig inspiráló lesz számomra.

Irodalomjegyzék

- [1] Tony Bacon. *The ultimate guitar book*. Dorling Kindersley Ltd, 1991.
- [2] Rolf Bader. *Computational Mechanics of the Classical Guitar*. Springer Verlag, 2005.
- [3] M.J. Elejabarrieta, A. Ezcurra, and C. Santamaría. Air cavity modes in the resonance box of the guitar: the effect of the sound hole. *Journal of Sound and Vibration*.
- [4] M.J. Elejabarrieta, A. Ezcurra, and C. Santamaría. Evolution of the vibrational behavior of a guitar soundboard along successive construction phases by means of the modal analysis technique. *Acoustical Society of America*, March 2000.
- [5] M.J. Elejabarrieta, A. Ezcurra, and C. Santamaría. Coupled modes of the resonance box of the guitar. *Acoustical Society of America*, February 2002.
- [6] Péter Fiala. Bevezetés a végeelem módszer alkalmazásába, 2006. Mérési segédlet.
- [7] Péter Fiala. Az akusztikai peremelem módszer, 2007. Mérési segédlet.
- [8] Péter Fiala. Móduselemzés, 2008. Mérési segédlet.
- [9] Péter Fiala. A hangszerek fizikája, 2009. Előadásjegyzet.
- [10] N. H. Fletcher and T. D. Rossing. *The physics of musical instruments*. Springer-Verlag, 1st edition, 1991.
- [11] Mark French. Response variation in a group of acoustic guitars. <http://www.sandv.com/downloads/0801fren.pdf>. Megtekintve: 2012. november 28., 23:55.
- [12] Krisztián Gulyás, Tamás Mócsai, and Attila Balázs Nagy. Mérési leírás - végeelem módszer.
- [13] J. C. S. Lai and M. A. Burgess. Radiation efficiency of acoustic guitars, 1990.
- [14] Bence Olteán. Akusztikai térszámítás pml módszerrel, 2011. TDK dolgozat, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Villamosmérnöki Kar.
- [15] Péter Rucz. Determination of acoustic parameters of organ pipes by means of numerical techniques. Master's thesis, Budapest University of Technology and Economics, 2009.

- [16] Dan Russell. Modal analysis of an acoustic folk guitar. <http://www.acs.psu.edu/drussell/guitars/hummingbird.html>. Megtekintve: 2012. szeptember 28., 20:15.
- [17] István Szirtes. Akusztika - misztikum és tudomány. http://www.diskronika.hu/pdf/Akusztika_1-4.pdf. Megtekintve: 2012. december 3., 14:38.
- [18] András Tóth. Kísérleti fizika i. <http://mono.eik.bme.hu/~vanko/labor/kisfiz/tananyag/KiserletiFizika1.pdf>. Megtekintve: 2012. november 29., 19:11.
- [19] TMIT Távközlési laboratórium. Móduselemzés. <http://alpha.tmit.bme.hu/Num7/lab4.htm>. Megtekintve: 2012. szeptember 27., 22:22.
- [20] Joe Wolfe. Guitar acoustics. <http://www.phys.unsw.edu.au/~jw/guitar/>. Megtekintve: 2012. december 1., 10:05.
- [21] WWW.KÍSÉRLETEK.HU. Hullámfajták: Chladni-ábrák. <http://www.tests.hu/show/159/F-C-C>. Megtekintve: 2012. november 2., 18:04.