



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Hálózati Rendszerek és Szolgáltatások Tanszék

Xilofon rezgésakusztikai modellezése

DIPLOMATERV

Készítette
Ulveczki Mihály Ádám

Konzulens
dr. Rucz Péter

2020. május 22.

Tartalomjegyzék

Kivonat	i
Abstract	ii
1. Bevezetés	1
1.1. Motiváció és célkitűzés	1
1.2. A dolgozat felépítése	1
2. A xilofon részei és hangkeltése	3
2.1. A hanglap	4
2.1.1. A hanglap anyaga	4
2.1.2. A hanglap hangolása	4
2.1.3. Méreتي megfontolások	6
2.1.4. A hanglap felfüggesztése	6
2.2. A rezonátor	7
2.2.1. Helmholtz-rezonátor	7
2.2.2. A rezonátor hangolása	7
2.2.3. Nehézségek a rezonátor tervezésénél	8
2.3. A kalapács	8
2.4. Eddigi publikációk a témában	9
3. Modellezés	10
3.1. A hanglap modellezése mechanikai végeelem-módszerrel	10
3.1.1. Koncentrált paraméteres rendszer	11
3.1.2. A Navier–Cauchy egyenlet	12
3.1.3. Elosztott paraméteres rendszer egydimenzióban	13
3.1.4. Csillapítás figyelembe vétele	14
3.1.5. Elosztott paraméteres rendszer háromdimenzióban	14
3.1.6. Módusok számítása	15
3.1.7. Modális szuperpozíció alkalmazása	16
3.1.8. A hanglapmodell	17
3.1.9. Válasz számítása impulzusszerű gerjesztés esetén	19
3.2. A rezonátor modellezése akusztikai végeelem-módszerrel	20

3.2.1.	Az akusztikai végeselem-módszer mátrixegyenlete	20
3.2.2.	Fali viszkózus veszteség számítása	21
3.2.3.	A rezonátormodell	22
3.2.4.	Rezonanciafrekvencia vizsgálata	24
3.2.5.	Viszkózus veszteség szimulációja	26
3.2.6.	Hanglap hatása a rezonátorra	26
3.2.7.	Rezonátor hatása a hanglapra	27
3.3.	A kalapácsütés	29
3.3.1.	A kalapács alapegyenletei	30
3.3.2.	A kalapács mozgásegyenlete	31
3.3.3.	A hanglap és a kalapács kölcsönhatása	32
3.3.4.	Módusok használata a válasz számításához	33
3.3.5.	Csillapítás figyelembe vétele	35
3.3.6.	Csillapítás alkalmazása a módusokon	36
3.3.7.	Teljes csatolt modell	37
4.	Eredmények	39
4.1.	A hanglapok modellezése	40
4.2.	Rezonátorok sajátfrekvenciái	41
4.3.	A teljes modell összefüggései	43
4.3.1.	Kezdősebesség és az erő kapcsolata	43
4.3.2.	Ütési pozíció változtatása	44
4.3.3.	A rendszer energiája	45
4.3.4.	Rezonátor hangolásának hatása	47
5.	Optimalizálás	49
5.1.	Optimalizálás egydimenzióban	49
5.2.	Az iteratív módszer	50
5.3.	Optimalizálás kész függvények segítségével	51
5.3.1.	fminsearch()	51
5.3.2.	solvopt()	52
5.4.	Egydimenziós optimalizálás eredmények	52
5.5.	A módszerek kiterjesztése háromdimenzióba	55
5.6.	Háromdimenziós optimalizálás eredmények	55
6.	Összefoglalás	58
	Irodalomjegyzék	60

HALLGATÓI NYILATKOZAT

Alulírott *Ulveczki Mihály Ádám*, szigorló hallgató kijelentem, hogy ezt a diplomatervet meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, csak a megadott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Hozzájárulok, hogy a jelen munkám alapadatait (szerző(k), cím, angol és magyar nyelvű tartalmi kivonat, készítés éve, konzulens(ek) neve) a BME VIK nyilvánosan hozzáférhető elektronikus formában, a munka teljes szövegét pedig az egyetem belső hálózatán keresztül (vagy autentikált felhasználók számára) közzétegye. Kijelentem, hogy a benyújtott munka és annak elektronikus verziója megegyezik. Dékáni engedéllyel titkosított diplomatervek esetén a dolgozat szövege csak 3 év eltelte után válik hozzáférhetővé.

Budapest, 2020. május 22.

Ulveczki Mihály Ádám
hallgató

Kivonat

Új hangszermodellek tervezése, optimalizálása során egyre fontosabb szerepet kap a számítógéppel segített tervezés, szimulációkon alapuló virtuális prototípuskészítés. E módszerek segítséget nyújtanak a precízen behangolt, minőségi termékek hatékony kialakításában és megkönnyítik a sorozatgyártás előkészítését is.

A xilofon esetében a hangszer hanglesugárzásában két elem játszik döntő szerepet: a hanglap és a rezonátor, melyek egymással illetve az őket gerjesztő kalapáccsal is kölcsönhatásban vannak. Ezen elemek lesugárzott hangterét és mechanikai rezgéseit a hangszer valós geometriája mellett nincs lehetőségünk analitikusan kiszámítani. Ezért valószerű elrendezések (szabálytalan hanglapkivágások, különböző alakú rezonátorok) modellezéséhez érdemes valamilyen közelítő módszerrel – például a végeelem-módszerrel – végezni a számításokat.

Dolgozatomban egy xilofon hanglapjainak és rezonátorainak rezgésakusztikai viselkedését vizsgálom először egymástól függetlenül, majd csatolt modellben az egymásra gyakorolt kétirányú kölcsönhatások figyelembevételével. E hatások elemzéséhez a modell bemenetén mind pontszerű, mind modális gerjesztést, mind pedig a kalapács dinamikáját leíró nemlineáris gerjesztést is megvizsgáltam. A vizsgált hangszerről rendelkezésre állnak mérések is, így eredményeimet a mérési adatokkal is össze tudtam hasonlítani.

Eredményeim, amellet, hogy a hangszer tervezése során virtuális prototípuskészítéshez alkalmazhatóak, használhatóak xilofonhang szintetizálására is, ugyanis a hanglapon bármilyen pozícióban elhelyezett, tetszőleges nagyságú kalapácsgerjesztés esetén meghallgatható a hangszermodell által szimulált lesugárzott hang. Dolgozatomban azt is bemutatom, hogy a hangszer egyes elemeinek változtatása hogyan befolyásolja a megszólaló hangot.

Abstract

Computer-aided design and simulation-based virtual prototyping play an increasingly important role in the design and optimization of new musical instrument models. These methods help to create precisely tuned, high-quality products and also facilitate the preparation of series production.

In the case of the xylophone, two elements have a decisive role in the sound emission of the instrument: the sound bar and the resonator, which interact with each other and with the excitation produced by the mallet. The radiated sound field and mechanical vibrations of these elements cannot be calculated analytically with the actual geometry of the instrument. Therefore, for modeling realistic layouts (irregular bar cuts, resonators of various shapes), it is worthwhile to perform calculations using approximative techniques, such as the finite element method.

In this contribution the vibroacoustic behavior of the sound bars and resonators of a xylophone are investigated, first independently, and then in a coupled model considering the two-way interactions of these elements. To analyze these effects, point, modal, and nonlinear hammer excitations are all examined as the input of the model. As measurements were already available for the instrument at hand, the simulation results were also compared with the measured data.

My results, can be utilized for virtual prototyping in musical instrument design, and in addition, can also be used for synthesizing xylophone sounds. One can listen to the simulated sound produced by the instrument model excited by arbitrary mallet actions at any position of the sound bars. In my paper it is also shown how the perceived sound is influenced by the changing certain elements of the instrument.

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Motiváció és célkitűzés

A számítógéppel segített tervezés és a szimulációkon alapuló virtuális prototípus-készítés egyre fontosabb szerepet játszanak új hangszermodellek tervezése, optimalizálása során. E módszerek segítséget nyújtanak a precízen behangolt, minőségi termékek hatékony kialakításában és megkönnyítik a sorozatgyártás előkészítését is.

Dolgozatommal egy nagy hangszergyártó cég tervezési folyamatába tudtam bekapcsolódni, mely során egy új xilofon tervezése, szimulálása és gyártásának előkészítése volt a cél. Lehetőségem volt a meglévő tervek és méretek alapján a tervezett hangszert számítógépes módszerekkel modellezni. A szimuláció segített rávilágítani egyes tervezési problémákra, támpontot adott a tervezés javításához, illetve eredményként meg lehet hallgatni a hangszer által lesugárzott hangot is. A munka során megismerkedtem a rezgésakusztikai numerikus modellezés technikáival, ezeken belül is az akusztikai és mechanikai végeselem-módszerrel. Dolgozatomban bemutatom ezeknek a szimulációs eljárásoknak az alkalmazását, illetve az akusztikai és mechanikai elemek összekapcsolásával a hangszer csatolt fizikai modelljének megalkotását. A fizikai modellezés előnye, hogy közvetlenül megvizsgálható az egyes tervezési (geometriai, anyagjellemző stb.) paraméterek hatása a hangszer viselkedésére.

A stuttgarti Fraunhofer Épületfizikai Kutatóintézet Akusztikai Osztályának köszönhetően rendelkezésre állnak mérések is az általam szimulált hangszerről, így a szimulált eredmények összevethetők voltak a tényleges mérésekkel. A validáció és a szimuláció helyességének belátása után lehetőségem volt a méretek változtatásával finomhangolni is a hangszert.

1.2. A dolgozat felépítése

Dolgozatomban először a xilofon egyes részeivel ismertetem meg az olvasót. Tárnyalom, milyen problémák merülhetnek fel ezen elemek méretezésénél, illetve milyen kérdésekre érdemes odafigyelni a tervezés során. A második nagyobb fejezetben a

modellezése és a szimulációé a főszerep, továbbra is a xilofon egyes moduljait külön-külön tekintve. A fejezet első részében a hanglapok mechanikai modelljét mutatom be, bevezetve a mechanikai végelem-módszer mátrixegyenletét. Ezt követően az akusztikai végelem-modellt tárgyalom. A külön álló rendszerek után a hanglap és kalapács közötti, illetve a teljes modellben megjelenő rezgésakusztikai kölcsönhatásokat vizsgálom. A modellt bemutató fejezetben szemléltető eredményeket is közlök. Ezzel a teljes csatolt modellel elvégezhető egy már megtervezett hangszer hangsugárzásának fizikai elvű szimulációja, illetve meghallgatható, hogy milyen hangon fog megszólalni az e tervek alapján legyártott xilofon. Az eredményeket ismertető fejezetben összehasonlítom a modellezés és mérések eredményeit, illetve szimulációk segítségével rámutatok, milyen paraméterek befolyásolják döntően a hangszer lesugárzott hangját. Végezetül a hanglapok optimalizációjáról esik szó, amely során azokat a tökéletes hangzás érdekében a megfelelő frekvenciákra lehet hangolni. A dolgozatot rövid diszkusszió zárja, a legfontosabb eredmények kiemelésével.

2. fejezet

A xilofon részei és hangkeltése

A xilofon az ütős hangszerek családjába, az idiofonok csoportjába tartozik, neve a görög *xülon* (fa) és *phóné* (hang) szavakból tevődik össze [12]. Olyan hangszerekről van szó, amelyek rugalmas, szilárd testük rezgése révén hoznak létre hangokat. Vanak köztük hangra hangoltak, mint például a xilofon, a vibrafon és a harangjáték, illetve nem hangoltak, például a triangulum, vagy a cintányér. A xilofon egyik legközelebbi rokona a marimba, azonban e két hangszer több jelentős aspektusban különbözik egymástól. Más alakú és működésű rezonátorokkal készítik őket, és a hangolás módjában, technikájában is különböznek. Az újabb hangszerek készülhetnek például kompozit műanyagokból is, köszönhetően az anyagtechnológiai modellezésnek és a precíziós gyártási folyamatnak.

Ahhoz, hogy a xilofon működését megértsük, tekintsük egyelőre a részeit külön-külön. Egy xilofon három nagyobb részből áll: a hanglap, a rezonátor és az ütő (vagy kalapács), ami az előző kettőt gerjeszti. A 2.1. ábrán egy manapság használatos, megvásárolható xilofon látható. Megfigyelhetőek a hangszer tetején a hanglapok, amelyből jelen esetben tizenhárom található. A hanglapok a diatonikus (hétfokú) skála szerint vannak behangolva, a hangszer hangterjedelme pedig a C4 (262 Hz) hangtól az A5 (880 Hz) hangig terjed. Megfigyelhető az ábrán további három hanglap is, melyek a F#4, A#4 és F#5 hangokhoz tartoznak. Rendre az F4, H4 és F5 hanglapokat lehet ezekre kicserélni, így változtatható meg a hangszer skálája.



2.1. ábra. A xilofon [20]



2.2. ábra. A xilofon egy hanglapja

A hanglapok alatt található doboz nem pusztán a hanglapok rögzítéséért felelős, hanem belsejében több üreg található, melyek a rezonátorokat képzik. A hangszer mellett látható az azt gerjesztő ütő. A zenész ezeket használja játék közben a hanglapok megszólaltatásához.

2.1. A hanglap

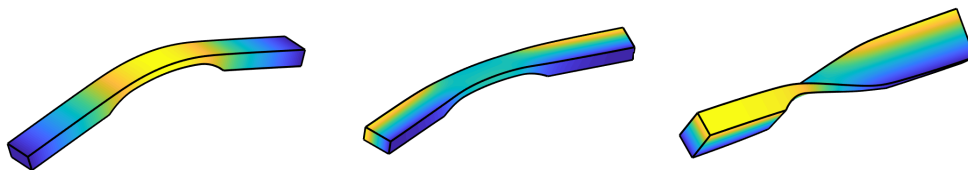
A xilofon egyik fő eleme a hanglap. Egy tipikus xilofon hanglap látható a 2.2. ábrán. A hanglap a hangszer azon része, amelyik a gerjesztés hatására rezgésbe kezd, és ezáltal itt kezdődik el a hang lesugárzása. A hanglapok tervezésénél több tényezőt is figyelembe kell vennünk a tökéletes hangszer elkészítésének érdekében. Ahogyan a 2.2. ábra is mutatja, a hanglap keresztmetszete a hossz mentén változik, mely elengedhetetlen a lap felhangjainak konszonáns frekvenciaarányokra történő hangolásához. Ezzel a kérdéssel a 2.1.2. szakaszban foglalkozom részletesebben. Megfigyelhető emellett a hanglap rögzítéséhez használt furat is. Az apró furat a hangolást nem befolyásolja lényegileg, viszont a nem megfelelő pozícióban történő rögzítés nemkívánatos veszteséggel járhat, ami rontja a hanglap hangminőségét.

2.1.1. A hanglap anyaga

A xilofon esetében a hanglap anyaga jellemzően fa, ahogyan fent említettem, innen ered a hangszer neve is. Újabban kezdenek elterjedni a szintetikus, műanyag hanglapok is, a 2.1. ábrán "Palisono" nevű, szálas műanyagból készült hanglapok láthatóak a hangszeren. A fa hanglapok a modellezés szempontjából is kihívást jelentenek, ezzel a 3. fejezetben foglalkozom, illetve további problémát okozhat, hogy a faanyag minősége nehezen reprodukálható, az anyagparaméterek szórása jelentős lehet, mivel két ugyanolyan szerkezetű fát is közel lehetetlen találni. Még a gondosan, direkt hangszerkészítéshez válogatott faanyagok (tone wood) is jelentősen különbözhetnek egymástól, pl. más-más erezzel rendelkeznek, lehetnek bennük görcsök. Ezek mind-mind megnehezítik a tervezést és a precíz kivitelezést.

2.1.2. A hanglap hangolása

Egy másik érdekes kérdés, hogy ha megütünk – az ütővel való mechanikai kölcsönhatás útján rezgésbe hozunk – egy hanglapot, az mitől fog "jól" szólni, mit kell tenni annak érdekében, hogy az egyes felhangok zeneileg tiszta frekvenciaarányba kerül-

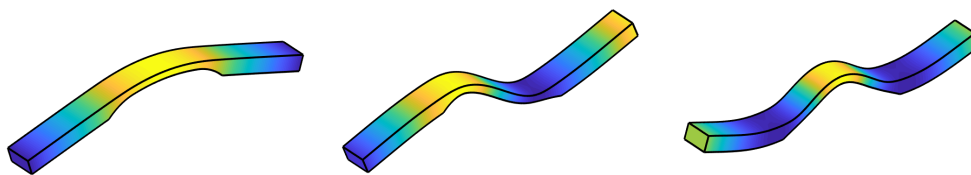


2.3. ábra. Elsőrendű hajlító (vertikális, horizontális) és torziós módusalakok. A színezés a hanglap függőleges irány szerinti kitérését szemlélteti.

jenek az alaphanggal. A xilofon hanglapja – mint minden más rezgő tárgy – csak bizonyos frekvenciákon rezeg szabadrezgésben, ezeket hívjuk sajátfrekvenciáknak, e frekvenciákhoz tartozó jellemző rezgésalakokat pedig módusalakoknak. A hanglap rezgésének tetszőleges időfüggvénye kifejezhető ezen módusok szuperpozíciójaként, természetesen a gerjesztés függvényében. Szabadrezgésben, vagyis esetünkben a rövid hanglap–ütő kölcsönhatás lezajlása után az egyes módusalakok a sajátfrekvenciájukon harmonikus rezgést végeznek, így a sajátfrekvenciák egyúttal meghatározzák a lesugárzott hang jellemző komponenseit is.

A hanglapok esetében a módusalakokhoz többféle mechanikai hullámalak tartozhat, megjelennek a hanglapban terjedő hajlító és longitudinális rezgésalakok is. A megszólaló hang szempontjából a hajlító rezgések a döntő szerep, mivel az ütővel ezek a rezgésalakok gerjeszthetőek. A hajlító rezgésalakok tovább osztályozhatóak: a hanglap longitudinális iránya mentén hajlító vertikális módusokat (2.3. ábra bal oldal), szintén a hosszirány menti horizontális módusokat (2.3. ábra középső diagram), illetve a hanglap hossz tengely menti csavarásával jellemezhető torziós módusokat (2.3. ábra jobb oldal) különböztethetünk meg. A hanglesugárzásban főként a vertikális módusok játszanak szerepet. A torziós módusok lényegesen gyengébben sugároznak el hangteljesítményt, ellenben, az ütős gerjesztés hatására jelentős energiát képesek eldisszipálni, így e módusok gerjesztése a hangszeres játék során kerülendő. Xilofon esetében érdemes az első három vertikális módust (2.4. ábra) 1 : 4 : 10 arányra hangolni (a köztük lévő torziósakat pedig tőlük távolabb tartani), így érhető el, hogy szép hangja legyen a gerjesztett hanglapnak, az 1 : 4 arány ugyanis zeneileg a két tiszta oktáv, míg az 1 : 10 arány két oktáv és egy tiszta nagyterc hangköznek felel meg. Ezzel a hangolással konszonánsan szólaltatható meg a hanglapokon egy dúr hármashangzat.

A hanglap hangolását például a következő módon is el lehet végezni. Az alapfrekvenciát a hanglap alpméretei adják: szélesség, hosszúság, magasság. Változtatásukkal az alapfrekvencia növelhető, illetve csökkenthető. A következő vertikális módus hangolása egyszerű méretváltoztatással már nem hangolható, ugyanis az az alapfrekvenciát is állítaná. Viszont ha bevágásokat ejtünk azokon a pontokon, ahol az első módusnak nullhelyei vannak, akkor azzal ő nem hangolódik csak a nagyobb frekvenciás társai. Ezzel az 1 : 4 arányt már el is lehet érni. Elméleti síkon az 1 : 10-es arányt is hasonlóképpen lehet előállítani, ott kell bevágásokat ejteni, ahol az előző



2.4. ábra. Első három vertikális módusalak

két módusnak nullhelye van, ami a valóságban azért kevésbé megoldható, mert az első két módusnak nem ugyanott vannak nullhelyei, ellenben ügyeskedéssel mégis el lehet érni a kívánt arányokat a bevágások alkalmazásával.

Gyakorlatban a kis kivágás nehézkes kivitelezése, illetve a külalak és dizájn miatt inkább a 2.2. ábrán látható kivágással készítenek hanglapokat [6]. Esetünkben a hangolóvázat (a hanglap alján a hossz mentén középre helyezett bemélyedés) két szélé egy hengerre illeszthető, míg a közepe egyenes rész. A későbbi fejezetekben bemutatott szimulációim során is ilyen alakú kivágásokat alkalmaztam.

2.1.3. Méreti megfontolások

Amint a tökéletes hanglap megalkotása és behangolása megtörtént, legegyszerűbb a hanglap arányos zsugorítása, illetve nagyítása lenne, ezzel elő is állna az összes hanglap a megfelelő sajátfrekvencia-arányokkal. Habár ez a megoldás nem rossz, a gyakorlatban mégsem használható, ugyanis túl nagy lenne a méretbeli különbség a legnagyobb és legkisebb hanglap között, ami nagyon megnehezítené a hangszeres játékot. Játéktechnikai megfontolások miatt úgy érdemes a lapokat gyártani, hogy a szélességük és vastagságuk (közel) azonos legyen, és inkább a kivágás kidolgozását kell változtatni a skálán haladva [3]. A kivágás változtatásának eredményeként a vertikális módusok jól behangolhatóak a kívánt $1 : 4 : 10$, vagy más hangszerek esetén a szintén szokásos $1 : 3 : 9$ frekvenciaarányokra, ugyanakkor a szélesség és vastagság megtartása miatt a torziós módusok alaphanghoz viszonyított sajátfrekvencia-arányai a skála mentén jelentősen változhatnak [4], ahogy azt a dolgozatban később be is mutatom. Ez szintén kihívást jelent a hanglapok méretezése során.

2.1.4. A hanglap felfüggesztése

A xilofon egy Orff-hangszer, ebből adódik a hanglapok felfüggesztésének módja is. A hanglap alatt, ahol fával érintkezne, filc található a kisebb csillapítás érdekében. A hanglap egyik végén át van fúrva, amibe a hangszer testén lévő pöcök belefűródik, meggátolva a hanglap hosszanti irányú elmozdulását. Ez a lyuk némileg megváltoztatja a hanglap frekvenciáit, de ez a hatás a hangolóvázatok mellett egyrészt elhanyagolható, másrészt ezt a furatot az alaphangfrekvenciához tartozó első vertikális módusalak nullhelyénél érdemes elhelyezni, így még kevésbé érzékelhető a hatása.

Az oldalirányú elmozdulást a lap másik vége mellett két oldalon található pöckök gátolják meg.

2.2. A rezonátor

A hanglap önmagában nem elég ahhoz, hogy megfelelő teljesítménnyel sugározza le a hangot, mivel a magára hagyott hanglap dipólsugárzóként viselkedik az akusztikai rövidzár jelensége miatt. Ezt a hatást célszerű csökkenteni, vagy teljesen megszüntetni, akár csak a hangszórók esetében azok dobozolásával. Az említett okok miatt van szükség tehát a rezonátorra, ami amellet, hogy megfelelő hangolással erősítőként működik, az akusztikai rövidzár jelenségét hivatott meggátolni. Ütős hangszerek esetében, például a marimbánál éppen ezt a hatást küszöböli ki az ott alkalmazott csőrezonátor. A marimbával ellentétben, a dolgozatban bemutatott xilofonok Helmholtz-rezonátorokkal készülnek.

2.2.1. Helmholtz-rezonátor

A hanglapok alatt található egy nagyobb fa vagy műanyag test, melyben több üreg van kialakítva. Ezen üregek egy-egy nyílással kapcsolódnak a szabad hangtérhez, ahol a hanglapok is elhelyezkednek. Az ilyen módon kialakított üregek Helmholtz-rezonátorként viselkednek. Ennek megfelelően a hangszer ezen része egy bizonyos átviteli függvény szerint erősíti, vagy gyengíti a hozzá érkező, a hanglapok által keltett hullámokat, azok frekvenciájának függvényében. A rezonátor sajátfrekvenciáját az üreg térfogata, a nyílás (effektív) felülete és a nyílás mint „nyak” effektív hosszúsága határozza meg. Utóbbi effektív hossz tartalmazza a nyílt térrel való kölcsönhatásból adódó úgynevezett hossz-korrekción is.

2.2.2. A rezonátor hangolása

Célszerű úgy hangolni a rezonátort, hogy a legnagyobb erősítése a hozzá tartozó hanglap alapfrekvenciájával essen egybe. A hangolást a térfogat, illetve a lyukméretek változtatásával tudjuk megtenni. A legyártott rezonátor további hangolása nehézkes feladat, tekintve, hogy egy kivágott üregről beszélünk. Ugyanakkor léteznek olyan kialakítások is, ahol a fedlapon a fő lyukon kívül még kisebb fix, vagy eltakarható lyukak is találhatóak, amivel kisebb hangolás még utólag is végezhető. Az utóhangolás lehetősége azért is szükséges, mert a rezonátor sajátfrekvenciája a környezet (pl. hőmérséklet, páratartalom) változásával megváltozhat.

Az általam vizsgált elrendezésben a rezonátorok kialakításában hátrányos, hogy egy rezonátorhoz nem egy, hanem több (kettő vagy három) hanglap is tartozik. Ebből adódóan az egyes rezonátoroknak nem csak egy bizonyos frekvenciát kell erősíteniük, hanem egy véges szélességű frekvenciasávot. Amellet, hogy a rezonancia görbének (a rezonátor átviteli függvényének) még egyhanglapos esetben sem túl

kedvező, ha nagyon éles csúcsa van – inkább célszerű kicsit szélesebb kiemelést tervezni a könnyebb hangolhatóság érdekében –, több hanglap esetén már problémát okoz, hogy a szélesebb csúcshoz szükségszerűen kisebb kiemelés (erősítés) tartozik. E két tényező között szükséges a megfelelő egyensúlyt megtalálni.

2.2.3. Nehézségek a rezonátor tervezésénél

A rezonátor tervezéséhez nem elegendő a rezonátort önmagában vizsgálni, mert a rezonátor nyílása elé helyezett hanglap is megváltoztatja a rezonátor sajátfrekvenciáját, az átviteli függvény frekvenciamenetét [6]. A rezonátor nyílása fölött lévő hanglap ugyanis a rezonátor nyílásának egy részét kitakarja, így kisebb felületen érintkezik a rezonátor a külső hangtérrel, ahol a hanglap, mint akadály jelenik meg. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a nyílás előtt elhelyezett akadályok – jelen esetben hanglapok – jelentősen befolyásolják a nyílás sugárzási impedanciáját.

Ugyanúgy problémát jelent, hogy a rezonátorok nyílása a hanglapok geometriájához viszonyítva különböző pozíciókba esik az egyes hanglapok esetén. Például előfordulhat az, hogy egy bizonyos rezonátorhoz tartozó egyik hanglap főmódusának valamely nullhelyének közelében van a nyílás, míg egyik másik hanglap nullhelye távolabb helyezkedik el tőle. Ez nyilvánvalóan problémát okoz, ugyanis kisebb nullhely–nyílás távolság esetén kevésbé tudja a hanglap a rezonátort meggerjeszteni.

2.3. A kalapács

A teljes rendszerből már csak a gerjesztés hiányzik. Ezt az ütő, vagy kalapács szolgáltatja. A kalapács tervezési kérdéseivel nem foglalkoztam részletesen, modellemben az ütőt és a játékos mozdulatát pusztán koncentrált paraméterek jellemzik, melyek közül a kalapács effektív rugómerevsége a fő paraméter. Ez a mérőszám azt mutatja meg, hogy az ütő feje mennyire puha vagy kemény. Amennyiben az ütő feje kemény, akkor a kölcsönhatás jellemző ideje rövidebb, így a gerjesztésben jelentős amplitúdóval lesznek jelen nagyfrekvenciájú komponensek is, melyek a lesugárzott hangban is megjelenhetnek. Ezzel szemben a puha kalapács kisebb amplitúdójú és hosszabb ideig tartó gerjesztést tud produkálni, kisebb vágási frekvenciával. Ennek megfelelően itt a hanglap is jellemzően kisebb frekvenciákon gerjeszthető, ami a nagyfrekvenciás komponensek eltűnésével, a hangszín jelentős megváltozásával jár. Utóbbi jelenség a skála magasabb hangjaihoz tartozó hanglapok esetén problémás is lehet. A kalapács kiválasztásánál az jelenti a kihívást tehát, hogy olyat használjunk, ami megfelelően tudja gerjeszteni a legkisebb és a legmagasabb frekvenciájú hanglapot egyaránt. Az ütők paramétereinek kísérleti vizsgálatát részletesebben tárgyalja az [5], vagy a [8] irodalom.

2.4. Eddigi publikációk a témában

Több irodalom is szól különféle rúd modellezésekről, melyek segítségemre voltak a saját modellem felépítésében. Chaigne 1997-es cikkében [8] egydimenzióban modellezi a hanglapot. Természetesen ő így csak vertikális módusokkal dolgozik, sőt modelljében a rezonátor visszahatásával sem foglalkozik. Leírja ellenben a hanglap és kalapács között fellépő kölcsönhatást, amin a modellemben fellépő hanglap-kalapács kölcsönhatás alapszik. Ezt a modellt egészíti ki Doutaut 1998-ban [9] a rezonátor hozzáadásával, de egydimenzióban maradva. Írásában a hanglap és a rezonátor által lesugárzott hangnyomást vizsgálja.

Borke 1990-es publikációjában [5] a kalapács tulajdonságairól ír, azt vizsgálja hogy milyen spektrumképek alakulnak ki a hanglap megütésekor és mennyiben befolyásolja azokat a kalapács fejének keménysége. Öt évvel később [6] már a hanglapok és rezonátorok hangolásával foglalkozik. A módusalakok segítségével vizsgálja, hol érdemes a hanglapokon bevágásokat ejteni, azok sajátfrekvenciáinak megfelelő irányba történő hangolásához. Problémaként vázolja fel a háromdimenzióban megjelenő torziós módusokat, amik gerjesztésének elkerülése érdekében a hanglap közepén való megütését javasolja. Ír a rezonátorok kialakításáról, illetve hangolásáról is, melyek, a xilofon esetében, a (kisfrekvenciás) hanglapok kedvezőtlen hanglesugárzását nagymértékben javítja.

Optimalizációval foglalkozik Beaton 2019-es cikke [4]. Két módszert vizsgál: a többdimenziós Newton-Rapson iterációs módszert, amelyhez hasonlóval én is foglalkozom a későbbi fejezetekben, illetve a genetikus algoritmust. Utóbbinak előnye, hogy van benne egy véletlenszerűen változtató faktor, aminek köszönhetően a lokális minimumok elkerülhetőek az optimalizálás során. Eredményei látványos hanglapmódosításokat mutatnak, ám ezeknek a tényleges megvalósítása, a felület folyamatos változásai miatt, nehézkesnek tűnnek. Beaton az elméleti szimulációk mellett méréseket is végzett a hanglapokon. [3] cikkében különböző gyártók által készített hanglapokat vet össze egymással azok modális vizsgálata alapján.

3. fejezet

Modellezés

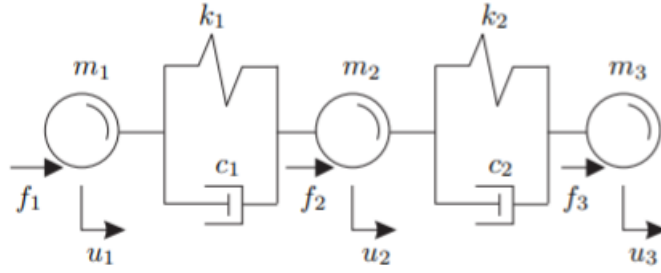
Ebben a fejezetben az egyes hangszerelemek szimulációjáról, modellezéséről és a modellalkotás matematikai hátteréről esik szó. Bemutatom az általam felállított modelleket és az ezeken végzett számításaimat, majd az egyes szekciók végén megosztom a szimulált eredményeket és a konklúzióimat.

A fejezet további szakaszaiban a hangszer fő alkotóelemeit külön-külön tárgyalom. Mind a mechanikai, mind az akusztikai hullámterjedés szimulációjához a végelem-módszert alkalmaztam, mely általános módszer parciális differenciálegyenletek peremértékfeladatainak közelítő megoldására. A hanglap és a rezonátor modelljének bemutatása során ezért kitérek a mechanikai és akusztikai végelem eljárásokra is.

3.1. A hanglap modellezése mechanikai végelem-módszerrel

Első lépésben tekintsük pusztán a hanglapot. Feladatunk a geometria kialakítása, az anyagjellemzők megadása és a gerjesztés és egyéb peremfeltételek bevitele után a hanglap elmozdulásainak kiszámítása a hanglapra ható felületi erőeloszlás ismeretében. A számításban a már érintőlegesen említett módusok lehetnek segítségünkre, melyek megfelelő súlyozásával adódik a hely- és időfüggő elmozdulásfüggvény.

A következő szakaszokban bemutatom a mechanikai végelem-módszer alapösszefüggéseit és az ezekből származtatott mátrixegyenletet. Rámutatok a koncentrált paraméteres rendszer állapotváltozós leírásával való analógiára. Ismertetem a hanglapban terjedő mechanikai rezgések leíró egyenleteit egy- és háromdimenziós esetben. Végül a végelem mátrixegyenlet alapján a módusalakok és sajátfrekvenciák számításának módját tárgyalom, és egy példán szemléltetem a válasz számítását a módusok segítségével tetszőleges gerjesztés mellett.



3.1. ábra. Háromszabadságfokú koncentrált paraméteres rezgő rendszer

3.1.1. Koncentrált paraméteres rendszer

Mechanikai rendszer esetén a rendszer időfüggő állapotát a tömegpontok elmozdulása (kitérése) és az elmozdulás időbeli változása (a tömegpontok sebessége) határozza meg [11]. Koncentrált paraméteres esetben a tömegpontok – vagy más szóval szabadsági fokok – száma véges, diszkrét pontokba sűrített tömegek és a köztük kifeszített rugó- és csillapításelemek alkotják a rendszert reprezentáló hálózatot. Feladatunk a mozgásegyenlet felhasználásával meghatározni a rendszer állapotának időfüggvényét ismert gerjesztés mellett. A kapcsolatot az elmozdulás, sebesség, gyorsulás és erő között rendre a merevség, csillapítás és tömeg adja. Például ha elképzeljük a 3.1. ábrán szereplő elrendezést, az f_3 erőre felírt egyenlet a következőképpen alakul:

$$k_2[u_3(t) + u_2(t)] + c_2[\dot{u}_3(t) + \dot{u}_2(t)] + m_3\ddot{u}_3(t) = f_3(t). \quad (3.1)$$

Az egyenletben k a rugómerevség, c a csillapítás, m a tömeg, u az elmozdulás és f az erő. Itt és a továbbiakban a t az idő jele, a változó feletti pont pedig az idő szerinti deriválást jelenti. Hasonló módon a többi (másik két) egyenlet is felírható, majd ezeket összevonhatjuk egy mátrixegyenletté:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (3.2)$$

ahol \mathbf{K} a merevségmátrix, \mathbf{C} a csillapításmátrix, \mathbf{M} pedig a tömegmátrix. A (3.2) egyenletrendszer frekvenciatartományban:

$$(\mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{f}(\omega). \quad (3.3)$$

Esetünkben ebben az egyenletben a koncentrált paraméterértékekből kiszámíthatóak a mátrixok, az ω körfrekvencia és az \mathbf{f} erő ismertek, az \mathbf{u} elmozdulás pedig ismeretlen, mely a mátrixegyenlet megoldásával adódik. Más esetben lehetne az is kérdés, hogy ismert elmozduláshoz milyen erők tartoznak.

3.1.2. A Navier–Cauchy egyenlet

A xilofon hanglapjának modellezése során koncentrált paraméterek helyett elosztott paraméterekről beszélhetünk, ugyanis a hanglap kitérését a geometrián belül tetszőleges pontban értelmezhetjük. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a hanglapot folytonos mechanikai rendszerként, kontinuumként modellezzük [15]. Ebből kifolyólag a matematikai háttér kicsit bonyolódik, bár a megoldandó egyenletrendszer alakját tekintve a koncentrált paraméteres esettel azonos eredményre jutunk.

A hanglap mozgását, lineáris, rugalmas deformációt feltételezve a Navier–Cauchy-egyenletek írják le. A mozgásegyenlet folytonos rendszer esetén az alábbi alakot ölti:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.4)$$

ahol ρ az anyag sűrűsége, $\boldsymbol{\sigma}$ pedig a mechanikai feszültség. Ebben az egyenletben ismeretlenek az \mathbf{u} elmozdulásfüggvény és a $\boldsymbol{\sigma}$ feszültségtenzor, melyek az x tér- (az adott tértartomány fölött) és t időkoordináták folytonos függvényei. Az egyenlet felírásakor feltételeztük azt is, hogy a testre nem hatnak térfogati erők (pl. gravitáció vagy Coriolis erő). Ezzel a feltételezéssel a továbbiakban is végig élni fogunk. Az ismeretlenek számának csökkentéséhez és a mozgásegyenlet megoldásához szükségünk van további összefüggésekre is.

Az általános Hooke-törvény a feszültségtenzor és a deformáció közötti kapcsolatot adja meg az anyag mechanikai tulajdonságait figyelembe véve:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.5)$$

\mathbf{D} az anyagra jellemző merevségtenzor, mely tartalmazza a rugalmassági modulusokat és Poisson-arányokat. A merevségtenzor negyedrendű tenzor, a kettőspont jelölés a tenzorszorzatot jelenti. Az $\boldsymbol{\varepsilon}$ másodrendű tenzor a deformációt jelöli, melyet az alábbi összefüggés definiál:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (3.6)$$

A (3.6) egyenlet a deformáció és az elmozdulás viszonyát fejezi ki, így a (3.4)–(3.6) egyenleteket egyesítve kaphatunk egy olyan egyenletet, amelyben ismeretlenként már csak az elmozdulás szerepel. E három egyenlet együttes neve Navier–Cauchy egyenlet.

3.1.3. Elosztott paraméteres rendszer egydimenzióban

Egydimenzióban a (3.6) egyenletnek megfelelően a deformáció egyszerűen $\frac{du}{dx}$ alakot ölt. Ezt behelyettesítve a Hooke-törvénybe a (3.7) egyenlet adódik:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (3.7)$$

A merevségtenzor tehát egydimenzióban az E Young-modulussá alakul. A Young-modulus és a feszültség dimenziója felületegységre vett erő, így ezeket a mennyiségeket általában Pa mértékegységben adjuk meg. Ahogy a (3.6) definícióból is látszik, a deformáció dimenziótlan mennyiség. A továbbiakban, ha behelyettesítjük a (3.4) csak x koordinátától függő alakjába a (3.7) összefüggést, és feltételezzük, hogy az anyagjellemző ρ és E paraméterek konstansok, a következő alakot kapjuk:

$$\rho\ddot{u} = E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.8)$$

A (3.8) egyenlet tehát az egydimenziós mozgásegyenlet, aminek már csak a diszkretizálása van hátra. A diszkretizálás alatt a végelem-módszer esetében két műveletet értünk. Először is a vizsgált térrészt véges számú és véges méretű, jellemzően egyszerű alakú (pl. tetraéder, gúla, háromszög alapú hasáb stb.) elemre bontjuk fel. Másrészt az elemek felett úgynevezett alakfüggvényeket veszünk fel, mely alakfüggvények szuperpozíciójával közelítjük a térben folytonos változóink helyfügghését. A szuperpozícióban szereplő lineáris kombináció súlyai lesznek a megoldandó mátrixegyenlet ismeretlenek. Ezzel a (3.9) egyenlet adódik, mely alakilag azonos a koncentrált paraméteres eset (3.2) egyenletéhez. Egyedül a csillapítás hiányzik, amit a következő részben tárgyalok.

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (3.9)$$

Érdekes még megjegyezni a következőket. A (3.8) egyenletből a (3.9) egyenletre való átalakítás során az \mathbf{f} erő az egyenlet gyenge alakjának integrál-átalakításaiból adódik, ezért a (3.8) egyenletben közvetlenül még nem szerepel. A hanglapra bizonyos elhanyagolásokkal egydimenziós rendszerként is tekinthetnénk, ekkor viszont nem a (3.8) összefüggésből érdemes kiindulni, hiszen az a hanglap vastagságát nem veszi figyelembe, így a hangkeltés során az elsődlegesen fontos hajlító mechanikai hullámok leírására nem alkalmas. A hajlító rezgések terjedését egydimenzióban térben negyedrendű, időben másodrendű parciális differenciálegyenlet írja le, melyet dolgozatomban nem tárgyalok. Az egydimenziós modell itt pusztán szemléltetésként szerepel, a háromdimenziós leírás előkészítése érdekében.

3.1.4. Csillapítás figyelembe vétele

Az elosztott paraméterű lineáris, rugalmas rendszer csillapítását az η viszkozitás fejezi ki. A viszkózus modell szerint az anyagban a feszültségtenzor nem pusztán a pillanatnyi deformációtól függ, hanem a deformáció időbeli megváltozásától is. A viszkoelasztikus veszteség a mechanikai alakváltozás hatására keletkező hő és sűrűlási veszteségeket írja le. A legegyszerűbb lineáris, viszkoelasztikus modell figyelembevételével a (3.7) Hooke-törvénybe egy újabb tag kerül be:

$$\boldsymbol{\sigma} = E \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \eta \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} \right). \quad (3.10)$$

Ezt behelyettesítve a megfelelő egyenletekbe, akárcsak a veszteségmentes esetben, diszkretizálás után a tömeg- és merevségmátrixos tag mellett megjelenik a csillapításmátrix is:

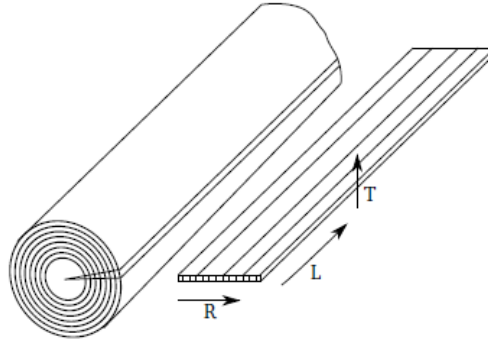
$$(\mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (3.11)$$

Így a koncentrált paraméteres esettel azonos alakú mátrixegyenlet adódott. Természetesen a két egyenlet mögött más-más számítási háttér és gondolatmenet van, mégis a diszkretizálás és alakfüggvények használatával az általános végeelem mátrixegyenlettel szimulálhatunk a következőkben is. A lineáris, viszkoelasztikus veszteségmodell alkalmazása esetén a \mathbf{C} csillapításmátrix a \mathbf{K} merevségmátrix η -szorosaként adódik, így arányos vagy más néven proporcionális csillapításról beszélhetünk. Ezt a tulajdonságot a módusok számításánál az alábbiakban ki is használjuk.

3.1.5. Elosztott paraméteres rendszer háromdimenzióban

Háromdimenziós modell esetén a különbséget az eddigiekhez képest az adja, hogy a deformáció és feszültség viszonyát nem pusztán egy skalár fejezi ki, sőt már maga a feszültség és deformáció sem egy egyszerű skalárok. Térben az egyszerű egydimenziós húzó hatás mellett nyíró erőkkel is számolnunk kell, vagyis az erőhatásnak normális és tangenciális irányú komponensei is vannak. Emellett normális irányú húzófeszültség alkalmazása esetén megfigyelhetjük, hogy míg a feszültség irányában a test nyúlik (a relatív alakváltozás pozitív), addig keresztirányokban a test összehúzódik (a relatív alakváltozás negatív). Ezt a hatást számszerűsítik a ν_{ij} Poisson-számok, ami a j irányban ható húzófeszültség hatására az i irányú relatív összehúzódást fejezik ki. Segítségükkel a relatív alakváltozás kifejezhető, pl. x-irányú komponense a következő formát ölti:

$$\frac{\Delta L_x}{L_x} = \frac{1}{E_x} (\sigma_{xx} - \nu_{xy}\sigma_{xy} - \nu_{xz}\sigma_{xz}). \quad (3.12)$$



3.2. ábra. Ortotrop falemezek longitudinális, radiális és transzverzális irányainak definíciója [10]

Az y és z komponens hasonló alakban írható, majd ezeket ismét behelyettesítve az eddigi egyenletekbe, és diszkretizálva azokat, visszakapjuk a már jól ismert mátrixegyenletet.

Dolgozatomban kétféle anyagmodellt használok: izotrop és ortotrop modelleket. Az izotrop anyagmodell sajátossága, hogy az anyagban nincsenek kijelölt irányok, a deformáció mértéke nem függ pl. a húzófeszültség irányától. Ebben az esetben az anyagparaméterek a skalár E Young-modulus és a ν Poisson-szám. Az izotrop modell előnye egyszerűsége, ez az egyszerűsített modell jól közelíti pl. homogén fémek viselkedését. Faanyagok esetében azonban bonyolultabb anyagmodellre van szükség, ugyanis a faanyagok mechanikai viselkedése nagyon eltérő a fa szálirányában és az arra merőleges irányokban. Bár a faanyagok jellemzően nem homogének, viszonylag jó közelítéssel modellezhetők homogén, de ortotrop, irányfüggő viselkedésű anyagként. A faanyagban a szálirányt általában longitudinális (L) iránynak, az évgyűrűk normális irányát radiális (R) iránynak, az évgyűrűk érintőinek irányát pedig tangenciális (T) iránynak (3.2. ábra) szokás nevezni. Az anyagparaméterek száma ekkor az izotrop eset két paraméterével szemben kilencre növekszik: a három irányú Young-modulus, a három független Poisson-szám és három nyíró modulus. Ezeket az anyagparamétereket nem triviális megmérni sem, közelítő értékeiket a [16] adatbázis alapján határoztam meg. Jellemző viszont, hogy az $E_L : E_R$ arány a hangszerek faanyagainál nagyjából 10 : 1 körüli érték, ami jól indokolja az izotrópnál lényegesen bonyolultabb anyagmodell használatát.

3.1.6. Módusok számítása

A végeselem-módszer (3.3) vagy (3.11) alakú mátrixegyenletét többféleképpen is meg lehet oldani. Egyik megoldási módja a modális leírás használata. A modális leírás több szempontból is hatékony eszköz a rendszer válaszána meghatározására. Egyrészt a módusalakok lineárisan függetlenek, így bármely rezgésalak megadható a módusalakok egyértelműen kiszámítható lineáris szuperpozíciójaként. Másrészt, a rendszermátrixok matematikai tulajdonságainak (\mathbf{K} szimmetrikus, pozitív szemide-

finit, \mathbf{M} szimmetrikus, pozitív definit) köszönhetően a módusalakok ortogonálisak, így a módusalakok koordináta-rendszerében a részesedési tényezők (modális koordináták) csatolatlanok, így egymástól függetlenül kiszámíthatók. Végül, a módusalakokhoz tartozó sajátfrekvenciák meghatározzák a szabadrezgés során az egyes módusalakokhoz tartozó rezgés frekvenciáját. Így könnyen meghatározható, hogy például a hanglap rezgése során mely módusok fognak a hallható tartományban rezegni és melyeket lehet a hanglesugárzás frekvenciatartományát tekintve elhanyagolni. A modális bázis alkalmazásával illetve az utóbbi elhanyagolással jelentősen csökkenthető a megoldandó egyenletrendszer mérete.

A modális bázisba történő áttéréshez először ki kell számítani a rendszer sajátfrekvenciáit és a hozzájuk tartozó módusalakokat, majd ezeket a gerjesztésnek megfelelően súlyozva a válasz már könnyedén meghatározható. Első lépésben zérus gerjesztést és csillapítatlan rendszert feltételezünk és a frekvenciatartományban írjuk fel egyenletünket. Ekkor a (3.3) egyenletrendszer a következőképpen alakul:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = 0. \quad (3.13)$$

A (3.13) egyenlet egy általánosított sajátérték feladat, melyben ω a sajátfrekvenciákat jelöli (a sajátértékek ω^2 -ként adódnak), $\boldsymbol{\phi}$ pedig a sajátvektorokat. Ezt úgy tudjuk értelmezni, hogy az eredeti geometria tetszőleges gerjesztéssel elindítva, majd további gerjesztés nélkül magára hagyva (szabadrezgésben) az ω körfrekvenciákon $\boldsymbol{\phi}$ alakokban tud rezegni. Ahogy a következő szakaszban bemutatom, a különböző rezgésalakok súlyozása (részesedési tényezője vagy modális koordinátája) a gerjesztéstől függ.

3.1.7. Modális szuperpozíció alkalmazása

A rendszer elmozdulásválasza tetszőleges gerjesztésre a módusalakok és a hozzájuk tartozó részesedési tényezők segítségével adható meg:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N q_i \boldsymbol{\Phi}_i, \quad (3.14)$$

ahol a q_i a $\boldsymbol{\Phi}_i$ módusalak részesedési tényezője, N pedig a módusok száma. A megoldásban az elmozdulásválasz időfüggését a részesedési tényezők időfüggése írja le, a helyfüggést pedig a módusalakok határozzák meg. Az egyenlőség helyett korlátozott frekvenciatartományon érdemes redukált modális bázist alkalmazni, például esetemben feleslegesek a 20 kHz alatti (azaz a hallható tartományban történő) számítások az a fölötti módusok, elegendő a Rubin-kritériumnak megfelelően 30 kHz frekvenciáig figyelembe venni őket, így csökkentve a megoldandó egyenletrendszer méretét és a szimuláció számítási igényét. A (3.14) összefüggés segítségével felírható

a csillapítás nélküli mátrixegyenlet:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \Phi \mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (3.15)$$

ahol Φ jelöli a módusalakokat a mátrix oszlopaiba rendezve. Ezt az egyenletet Φ^T -tal beszorozva a következő alakot kapjuk:

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q} - \omega^2 \Phi^T \mathbf{M} \Phi \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{f}. \quad (3.16)$$

Ebben az egyenletben a baloldalon diagonális mátrixokat kapunk, így (3.15)-ban egymástól független egyenletek szerepelnek. Ezt átrendezve bármelyik q_i modális koordináta kiszámítható a következő összefüggéssel:

$$q_i = \frac{\Phi_i^T \mathbf{f}}{\omega_i^2 - \omega^2}, \quad (3.17)$$

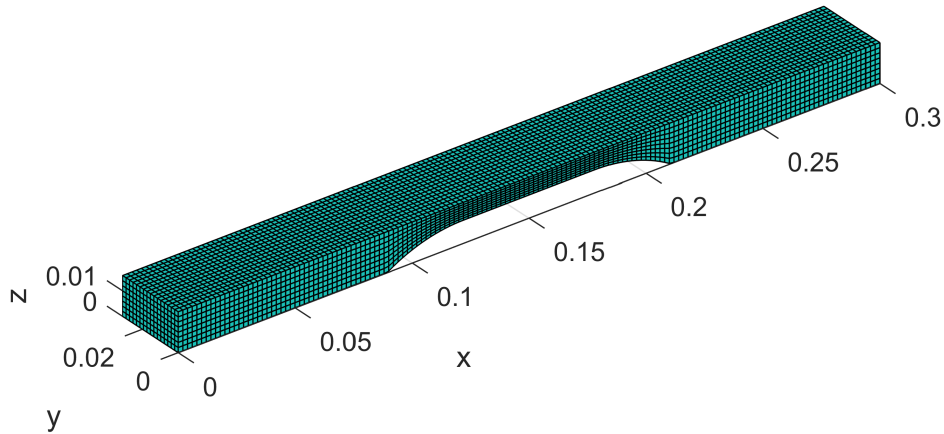
ahol ω_i a Φ_i módusalakhoz tartozó sajátfrekvencia, ω pedig a vizsgált frekvencia. Az összefüggésben kihasználtuk, hogy a módusalakok a tömegmátrixra ortonormáltak, vagyis $\Phi^T \mathbf{M} \Phi$ egységmátrix. A (3.17) formula alapján látszik, hogy ha ismertek a sajátfrekvenciák és a hozzájuk tartozó módusalakok, akkor tetszőleges gerjesztés esetén számíthatóak a súlyok és segítségével (3.14) alapján a válasz is.

Ahogy a 3.1.4. szakaszban említettem, a viszkoelasztikus csillapításmodell arányos csillapításhoz vezet. Arányos csillapítás esetén a \mathbf{C} csillapításmátrix $\mathbf{C} = a\mathbf{K} + b\mathbf{M}$ alakban írható fel, és a csillapítással a (3.16) összefüggésben megjelenő $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ mátrix szintén diagonális lesz. A csillapítás hatására a sajátfrekvenciákhoz $\xi_i = \frac{1}{2} \left(a\omega_i + \frac{b}{\omega_i} \right)$ csillapítási tényező fog tartozni, szabadrezgés esetén pedig ennek megfelelően exponenciális burkolóval lecsengő harmonikus függvények lesznek a modális koordináták.

3.1.8. A hanglapmodell

A hanglap tényleges geometriáját geometriai transzformációval alakítottam ki meglévő, valós xilofon hanglap méretek alapján. Első lépésben felvettem egy téglatest alapot, amit felosztottam sok kisebb részre (a végelemeknek megfelelően), majd bizonyos elemeket eltoltam és deformáltam a hangolóját méreteinek megfelelően, így kialakítva a 3.3. ábrán látható kivágást is tartalmazó hanglapot. Az általam vizsgált hangszer esetében a hanglapok magassága 16 mm, szélességük 31 mm, hosszuk viszont eltérő, 24 és 32 cm között változik. A kivágás hossza és annak magassága (körülbelül az eredeti magasság fele) is különbözik, viszont a kivágás szélén lévő kör átmérője (125 mm) megegyezik.

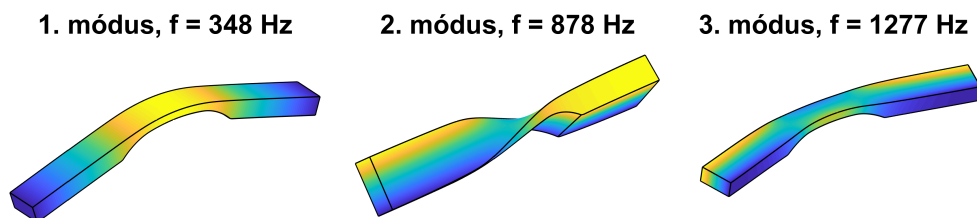
A hanglapot szimuláció előtt még fel kellett ruháznom az anyagjellemzőkkel is, mint például a már említett Poisson-számok és Young-modulusok, ezzel a lépéssel lesz a pusztán geometriai hálóból végeelem modell. A modellt Matlab környezet-



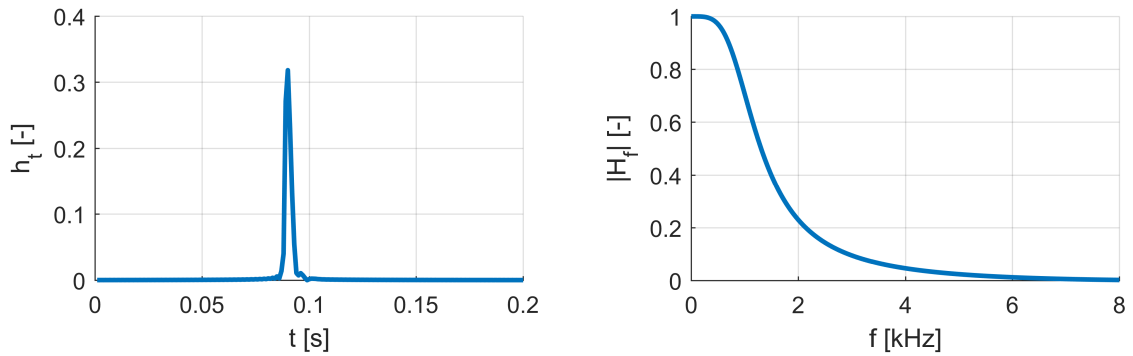
3.3. ábra. Egy hanglap a megfelelő kivágással. (A tengelyek skálázása méterben adott.)

ben alkottam meg, itt ugyanis rendelkezésemre állt a tanszéki fejlesztésű végeselem könyvtár (toolbox), mely beépített függvényeket tartalmaz például egyszerű geometriák hálózására, illetve a rendszermatrixok összeállítására. A számításhoz használt fontosabb függvényeket a következőkben említeni fogom, a függvények nevét dőlt betűvel írva.

A tömeg- és merevségmátrix az *elastic_mk()* függvény segítségével számíthatók, a sajátfrekvenciák és módusalakok pedig a Matlab beépített sajátérték-feladatot megoldó *eigs()* függvényével adódtak. A 3.4. ábrán megfigyelhető az F4 hang első három sajátfrekvenciájához tartozó módusalak. Ahogy ez az ábrán is látszik, az első módus a számunkra legfontosabb vertikális módus, amit egy torziós, majd egy horizontális rezgésalak követ. Érdeemes még megjegyezni, hogy mivel a mechanikai rendszert befogási kényszerek (alátámasztás vagy merev rögzítés) nélkül vizsgáljuk, a móduselemezés során megkapjuk a test úgynevezett merevtestmódusait is, melyekhez mind a zérus sajátfrekvencia tartozik, a módusalakok pedig a három térkoordináta szerinti merev testként való elmozdulások és a három tengely körüli, szintén merev testként való elfordulások lineáris szuperpozíciójaként adódnak. Mivel a merevtestmódusok a hanglesugárzás szempontjából jelentéktelenek, a hangszeres játék



3.4. ábra. Az F4 hanglap első három sajátfrekvenciája és módusalakja



3.5. ábra. A pontgerjesztés idő-, és átviteli függvénye

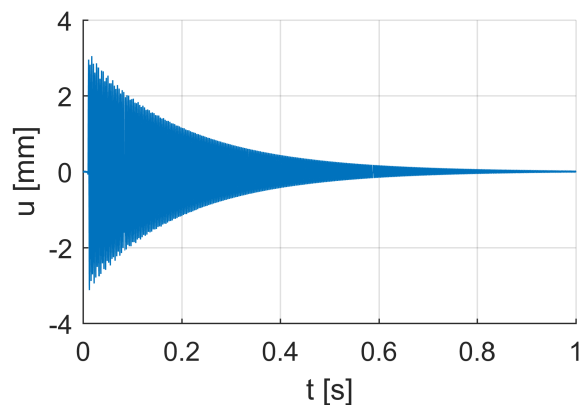
során pedig a hanglap alátámasztása meggátolja kialakulásukat, a továbbiakban ezekkel nem foglalkozom.

3.1.9. Válasz számítása impulzusszerű gerjesztés esetén

Szemléltetésként tekintünk azt az egyszerűsített esetet, amikor a hanglap gerjesztése egy tetszőleges pontban ható időben pillanatszerű, frekvenciatartományban pedig egységnyi spektrumú erőeloszlás. A valóságos gerjesztést jobban modellezhetjük, ha az ideális impulzus helyett annak egy aluláteresztő szűrőn átengedett verziójával gerjesztjük a hanglapot. Egy ilyen impulzust mutat a 3.5. ábra az idő- és frekvenciatartományban.

A fenti gerjesztéshez tartozó részesedési tényezőket (q_i súlyokat) a frekvenciatartományban számítottam ki, melyet aztán a Matlab *ifft()* függvényével transzformáltam vissza időtartományba. Így tehát a már meglévő módusalakokkal és a most kiszámított modális koordinátákkal már tetszőleges pontban számítható a fentebb leírt gerjesztés által keltett elmozdulás. A módszer előnye, hogy a gerjesztés megváltoztatása esetén csak a részesedési tényezőket kell újra kiértékelni.

A bemutatott számítási lépések elvégzésével ismertté vált az elmozdulás a geometria bármely pontjában bármely gerjesztés utáni időpillanatban. Ha kiválasztunk



3.6. ábra. z irányú elmozdulás időfüggése

egy tetszőleges pontot és ott rögzítjük a kitérésértékeket a gerjesztés után, a 3.6. ábrához hasonló időfüggvényt kaphatunk. A hanglap egy pontjában az elmozdulás időfüggvénye akár hangként is meghallgatható. Ez a hang, habár az akusztikai lesugárzást nem tartalmazza, jellegében már nagyon hasonlít a xilofon hangjához.

A mechanikai végeelem-módszer és a modális leírás segítségével tetszőleges gerjesztésre ki tudjuk számítani a hanglap rezgését. A továbbiakban látni fogjuk, hogyan vizsgálható a hanglap az időtartományban is a módusok segítségével, illetve azt is, hogy a hanglap elmozdulása hogyan fogja tovább gerjeszteni az őt körülvevő hangteret és az ebben elhelyezkedő akusztikai rezonátort.

3.2. A rezonátor modellezése akusztikai végeelem-módszerrel

A rezonátor, ahogy ez már szóba is került, két fontos feladatot lát el a hangszeres játék során. Egyrészt az akusztikai rövidzárat szünteti meg, ami az önmagában rezgő hanglap körül alakul ki, illetve a hanglap által keltett hangnyomáshullámok egy részét felerősíti, azok frekvenciájától függően. Ebben az alfejezetben a hangszer e részéről lesz szó, először csak önmagában, később a hanglapokkal együtt vizsgálom viselkedését, különböző gerjesztések esetén.

3.2.1. Az akusztikai végeelem-módszer mátrixegyenlete

A hullámegyenlet a klasszikus mechanikában és elektrodinamikában egy olyan idő- és térkoordinátában is másodrendű parciális differenciálegyenlet, amely leírja a hullám terjedését az anyagon (közvetítő közegen) keresztül. Jelen esetben (időben harmonikus függvényeket feltételezve) a hullámegyenlet a Helmholtz-egyenletre egyszerűsödik:

$$\nabla^2 \mathbf{p} + k^2 \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad (3.18)$$

ahol k a hullámszám, \mathbf{p} pedig a hangnyomás.

A Helmholtz-egyenlet mellett az akusztikai végeelem-módszer levezetésében az Euler-egyenletet használjuk fel az alábbi alakban:

$$\nabla \mathbf{p} + j\omega \rho_0 \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (3.19)$$

ahol ω a körfrekvencia, ρ_0 a közeg egyensúlyi (átlagos) sűrűsége, \mathbf{v} pedig a részecskesebesség. A (3.19) egyenlőség a teljes hangtérben fennáll, viszont a peremeken kiemelt jelentőséggel bír, ugyanis ott esetenként ismert a részecskesebesség (például ismert a hanglap rezgése sebessége), így az Euler-egyenletet a peremfeltételek megadásához használhatjuk.

A peremfeltételekről az eddigieknél részletesebben is érdemes szót ejteni az akusztikai rendszer esetében. A hanglapokkal ellentétben, a rezonátor szimulációjánál nem zárt, véges térrészt vizsgálunk, hanem a rezonátor a nyílt térrel van kapcsolatban a nyílásán keresztül. Mivel a végeelem-módszer számításához véges sok elemre kell felbontanunk a teret, így a végtelen tartomány modellezése külön kihívást jelent. A nyílt problémák megoldásához többféle közelítő módszer is ismert [18], ezek közül az úgynevezett végtelen elem módszert alkalmazom a továbbiakban. A végtelen elemek a hagyományos háromdimenziós végelemekhez hasonlóan viselkednek, azzal a különbséggel, hogy geometriai vetítéssel az egyik dimenzió mentén valóban végtelen a kiterjedésük. Abban az irányban, melyben az elemek mérete végtelen, az elemen belül az alakfüggvények a geometriai csillapítást és az adott hullámszámmal történő oszcillációt tökéletesen leírják [2][1]. Így a véges térrész peremére a végtelen elemeket illesztve reflexiómentes peremfeltételt kapunk, ami a nyílt tér viselkedését közelíti. A közelítés pontosságát egy fokszám paraméterrel lehet befolyásolni, mely azt adja meg, hogy a végtelen irányban hány szabadságfokkal írjuk le az oszcilláló alakfüggvényt. A végtelen elemeket esetünkben az akusztikai számítási tartomány peremének egy része mentén helyezük el, ezzel modellezve azt, hogy a rezonátor szabad térbe vagy féltérbe sugároz, ahonnan nem érkeznek visszaverődő hullámok.

A geometriai diszkretizáció és az alakfüggvények felhasználása után a mechanikaihoz hasonló akusztikai végeelem mátrixegyenlet adódik:

$$(\mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{p} = -j\omega\mathbf{A}\mathbf{v}. \quad (3.20)$$

A jobboldalon megjelenő \mathbf{A} mátrix a felületen értelmezett alakfüggvények felhasználásával adódik, ez kapcsolja össze a felületen diszkretizált részecske sebességet a hangnyomás felületi szabadságfokaival. A mechanikai rendszerhez képest különbséget jelent a gerjesztés és a keresett megoldás értelmezése: mechanikai esetben a felépő erőket vagy erőeloszlást tekintettük a rendszer gerjesztésének és az elmozdulást kerestük, mint válasz, ezzel szemben az akusztikai modellben a peremen vett normális irányú részecske sebességgel gerjesztünk, és a nyomásteret keressük. Szintén különbséget jelent, hogy míg a mechanikai esetben arányos csillapítással számolhattunk, addig az akusztikai rendszerben a \mathbf{C} csillapításmátrix a végtelen elemek geometriájából adódik és az adódó mátrix nem arányos a \mathbf{K} és \mathbf{M} mátrixokkal.

3.2.2. Fali viszkózus veszteség számítása

Az előző pontban úgy tekintettünk a modellre, mintha a levegőt határoló falak közvetlen környezetében is nemzérus tangenciális irányú sebességgel mozognának a részecskék. Ez természetes nem igaz, a realisztikus modellben és a valóságban közvetlenül a fal mellett a közeg viszkozitása miatt zérus a sebesség, attól távolodva pedig egy vékony határrétegben a részecske sebesség nagysága folyamatosan exponenciálisan nő. A fali veszteség figyelembe vételéhez olyan formalizmust használhatunk,

mely a viszkózus veszteséget a falon megadott admittancia peremfeltétellé alakítja át [7]. A végeelem egyenletrendszerbe ezt a peremfeltételt az \mathbf{Y} admittanciamátrix segítségével tudjuk beépíteni, melynek Y elemeit az alábbi módon tudjuk számítani [17]:

$$Y = \frac{v_n}{p} = \frac{1}{\rho_0 c} \sqrt{jk l_v \left[(1 - \xi^2) + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}} \right]}, \xi = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{v}|}, l_v = \frac{\mu}{\rho_0 c}. \quad (3.21)$$

(3.21)-ben a ξ a részecskesebesség-vektor és a fal bezárt szögét jellemzi, l_v a viszkózus skálahossz, γ az adiabatikus kitevő, Pr a Prandtl-szám, μ a közeg dinamikus viszkozitása. Az így adódó admittanciamátrix diagonális és csak a fali peremekhez tartozó csomópontokban van nemzérus értéke. Amint a (3.21) összefüggésből látható, az akusztikai admittancia a normális irányú részecskesebesség és a hangnyomás közötti összefüggést írja le.

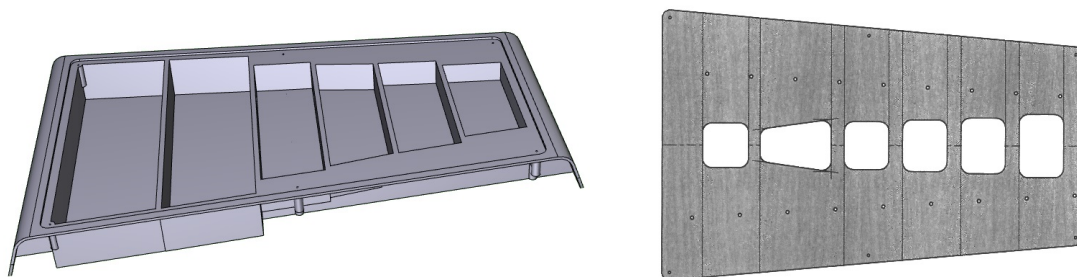
Az \mathbf{Y} mátrix kiszámítása után, azt be lehet illeszteni a már jól ismert (3.20) mátrixegyenletbe, melyben, várakozásunknak megfelelően, a fali veszteséget leíró tag további csillapításként jelenik meg. Így a következő kiegészített, fali veszteséget is figyelembe vevő mátrixegyenletet kapjuk:

$$[\mathbf{K} + j\omega(\mathbf{C} + \mathbf{A}\mathbf{Y}) - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{p} = -j\omega\mathbf{A}\mathbf{v}. \quad (3.22)$$

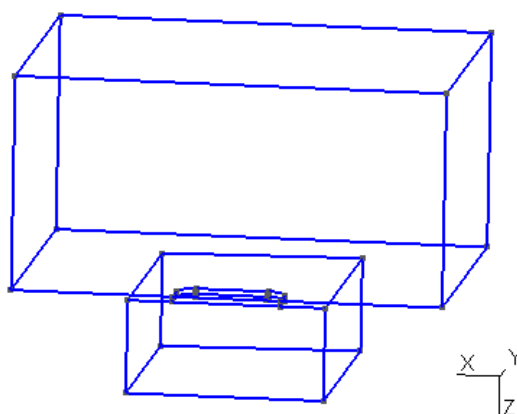
Annak ellenére, hogy a különbség az eredeti (3.20) egyenlethez képest pusztán az $\mathbf{A}\mathbf{Y}$ tag, a (3.22) egyenlet megoldása korántsem olyan egyszerű, mint amilyennek látszik, ugyanis ahhoz, hogy ki tudjuk számítani az \mathbf{Y} mátrixot szükség van a \mathbf{p} nyomásterre, és fordítva. Ezt az ellentmondást úgy lehet feloldani, ha az egyenletrendszert több iterációban oldjuk meg. Első lépésben vesszük a (3.20), \mathbf{Y} nélküli mátrixegyenletet és megoldjuk. Ezzel adódik egy \mathbf{p} nyomáster, aminek segítségével számolunk egy \mathbf{Y} mátrixot, amit ezúttal már fel tudunk használni a (3.22) egyenlet megoldásánál. Ekkor egy pontosabb, korrigált nyomásteret kapunk, amit ismét be tudunk helyettesíteni \mathbf{Y} képletébe. Ezt az iterációt tetszőlegesen sok lépésen át lehet folytatni, lépésről lépésre pontosítva a megoldást, ám a gyakorlat azt mutatja, hogy 2-3 iteráció után a nyomáster már nem változik számottevően, a korrekciók relatív nagyságrendje eléri a számítógépes számábrázolás kerekítési pontosságát.

3.2.3. A rezonátormodell

A rezonátorok, ahogy azt a 2.2. fejezetben is említettem, egy fa, vagy műanyag testben kialakított vájatok. A 3.7. ábrán láthatóak az általam szimulált rezonátorok. A bal oldalon megfigyelhető a rezonátor teste, amiben elhelyezkednek a vájatok, erre kerül a jobb oldalon található fedlap. Ezek együttese alakítja ki a rezonátorüregeket. A lapon minden rezonátorhoz tartozik egy lyuk, amin keresztül lehet gerjeszteni



3.7. ábra. Az általam szimulált rezonátorok teste és fedlapja

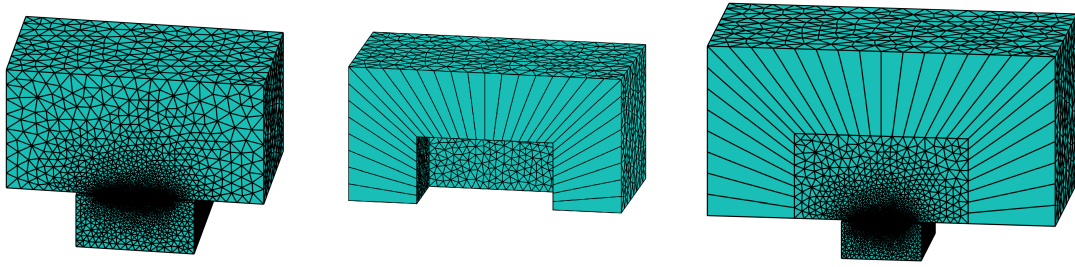


3.8. ábra. Egy rezonátormodell geometriája a Gmsh programban

az egyes rezonátorokat. A fedlap fölött találhatóak a már tárgyalt hanglapok, első lépésben azonban a hanglap nélküli esetet tekintjük.

Az elkészítendő geometria nem csak a rezonátor által körülhatárolt trapéz alapú hasázból áll, hanem tartalmazza a lyuk által körülhatárolt lekerekített téglalap alapú hasábot is, sőt a lyukat körülvevő szabad térnek egy bizonyos részét is. Azért szükséges ezeket az elemeket is belevenni a teljes geometriába, mert nem egy véges test szimulációját végezzük, hanem egy részben határok közé zárt, de ugyanakkor a szabad térben lévő levegő viselkedését vizsgáljuk. A rezonátor szimulációjához szükséges geometria tehát meglehetősen szabálytalan alakú, így a modellt célszerűbb valamely erre specializálódott programban létrehozni. A rezonátorok végeelem-modelljének elkészítéséhez a Gmsh programot [13][14] használtam. Ebben először pontokat jelöltem ki, majd azok összekötésével alakultak ki a szimulált teret határoló élek, sík- és görbült felületek és végül a végeelemekkel behálózott térfogat.

A 3.8. ábrán az általam modellezett egyik rezonátor látható. Megfigyelhető maga a rezonátor rész az ábra alsó részén. A felül található nagyobb téglatest a rezonátort körülvevő végtelen akusztikai térnek egy része. E térrész méreteinek megválasztásánál figyelni kell arra, hogy egy bizonyos térfogat alatt kevésbé megfigyelhetőek a sugárzás vizsgálandó paraméterei, ellenben a túl nagy térfogat pedig a szükséges számítási kapacitást növeli meg. Szembeötlő az is, hogy a teljes rezonátornak csak a



3.9. ábra. A behálózott mesh, a vetített végtelen elemek és a teljes modell Matlab-ban

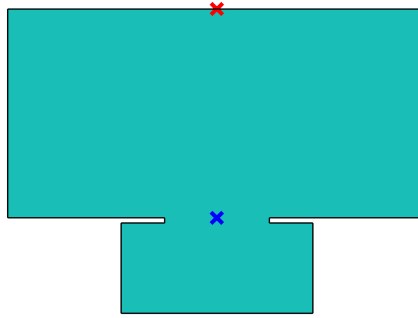
fele szerepel az ábrán. Mivel a vizsgált modell szimmetrikus, így elég esetben csak a szimmetriasík egyik oldalát vizsgálni, ugyanis a másik oldalra is hasonló eredmény adódna, így pedig azonos térbeli felbontás mellett feleannyi elemre van szükség. A szimmetriasíkon zérus részecske sebesség peremfeltétel vehető fel, amennyiben a gerjesztés is az adott síkra szimmetrikus.

Ezután, akár csak a mechanikai esetben, a tér felosztása, vagyis a geometriai háló elkészítése következett. Ehhez tetraéder elemeket használtam. Az elemek méretének megválasztásánál azt érdemes szem előtt tartani, hogy egy hullámhosszra legalább hat elem essen, az elem élhosszát tekintve. Ugyanakkor itt is érdemes figyelni a számítási kapacitásra is, ugyanis az elemméret csökkenésével az elemszám és így a mátrixok mérete is nő.

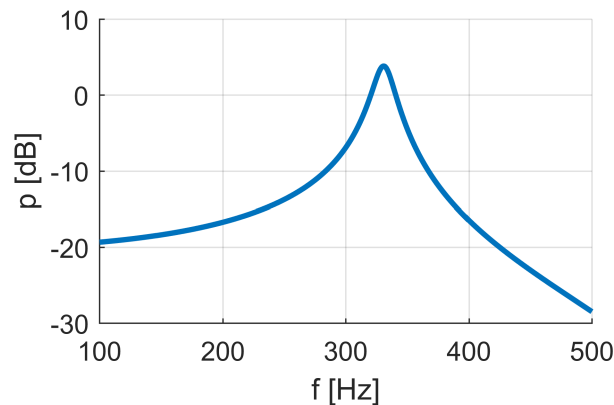
A geometriai hálót (mesh-t) ezután beolvastam a Matlab függvénykönyvtár formátumába (3.9. ábra bal oldal) és a szimuláció további részeit már a Matlab modellen végeztem. A teljes modell ezzel még nincs készen, ugyanis eddig még csak egy véges tér szerepel a geometriában. A végtelen elemek kialakítása az egyik utolsó lépés. Ezt a térrészt a rezonátor felett elhelyezkedő téglalapok kijelölésével és az ezeket alkotó háromszöglapok vetítésével lehet megadni. Az így kialakított végtelen elemek a 3.9. ábra középső diagramján láthatók, a teljes, végtelen elemekkel kiegészített modell pedig a 3.9. ábra jobb oldalán található. Az ábrázolásban a végtelen elemek is véges méretűként vannak megjelenítve, viszont az ábrán jól látható a vetítéssel kijelölt, végtelennek tekintett irány. Ezután már csak az anyagjellemzőket kell megadni, ami az akusztikai esetben a ρ_0 átlagos sűrűség és a c hangsebesség.

3.2.4. Rezonanciafrekvencia vizsgálata

A teljes modellel már számíthatók a szükséges \mathbf{M} , \mathbf{K} és \mathbf{C} mátrixok, így a (3.20) egyenletből már csak a \mathbf{p} és \mathbf{v} vektorok ismeretlenek. A rezonanciafrekvencia vizsgálata során egységnyi pontgerjesztést alkalmaztam, a rezonátor fölötti legtávolabbi véges és végtelen elem határon lévő pontban (3.10. ábra piros kereszt). Ebben a pontban a nyomás tehát egységnyi, minden más pontban a nyomás ismeretlen. A pontszerű gerjesztés egy úgynevezett passzív mérés idealizált modellje, melynél a rezonátorokat nem a hanglap, hanem egy külső hangforrás (hangszóró) gerjeszt-



3.10. ábra. A gerjesztett (piros kereszt) és a vizsgált (kék kereszt) pont

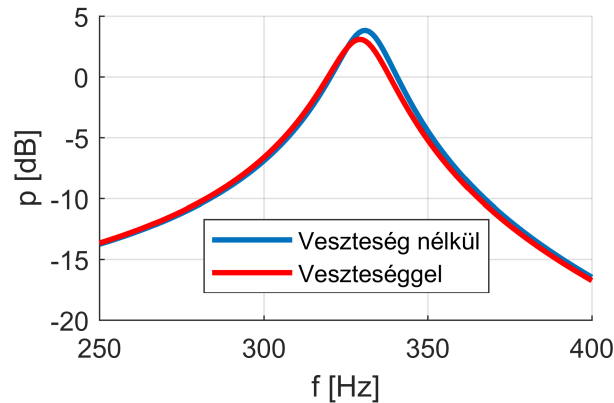


3.11. ábra. A legnagyobb rezonátor frekvenciamenete

ti. A rendszerre úgy tekintettem, hogy a falak végtelen merevek, így a \mathbf{v} vektor nullvektor. Ezzel már (3.20) tetszőleges frekvenciákra megoldható, akár mátrixműveletekkel, akár a már ismert móduselemzéssel is. Én az előbbit alkalmaztam. Mivel rendelkezésemre álltak mért eredmények, így a vizsgált frekvenciatartományt a mért rezonanciafrekvenciák bizonyos környezetére választottam.

A (3.20) egyenlet megoldásával tehát előáll a teljes nyomástér a vizsgált tartományon. Az átviteli függvény ábrázolásához e pontok közül célszerű egyet kiválasztani és abban a pontban megfigyelni az erősítést a frekvencia függvényében.

A 3.11. ábrán a legalacsonyabb hangmagasságú hanglaphoz tartozó rezonátor frekvenciamenete látható. A vizsgált pont közvetlenül a nyílás fölött található középben (3.10. ábra kék kereszt). Megfigyelhető, hogy a rezonátor kiemeléssel rendelkezik 330 Hz körül, a hozzá tartozó hanglaphoz (C4, D4) alapfrekvenciái pedig 261 Hz és 293 Hz. Ez még nem jelentene önmagában jól behangolt rezonátort, de a továbbiakban látni fogjuk, milyen fontos hatásokat nem vettünk még figyelembe az eddigi modellel. Szintén jól látható az ábrán, hogy a rezonancia csúcs véges magasságú és szélességű, amit a sugárzási veszteség magyaráz.



3.12. ábra. A legnagyobb rezonátor frekvenciamenete korrekcióval és nélküle

3.2.5. Viszkózus veszteség szimulációja

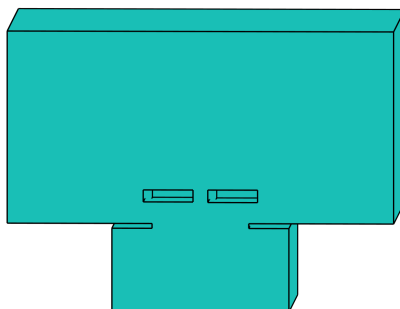
A 3.12. ábrán a fali, viszkózus veszteség hatása figyelhető meg. Látszik, hogy a fali veszteség figyelembe vételével kissé alacsonyabb frekvenciákra tolódik a kiemelt tartomány, illetve a csúcspont amplitúdója kissé lecsökken. Fontos megjegyezni, hogy az ábrán a különbséget csupán a fali veszteség adja, a sugárzási veszteséget mindkét modell tartalmazza.

A fali veszteségnek az ábra szerint túl nagy hatása nincs. Ez a fajta veszteség a rezonátorhoz tartozó lyuk területével, míg a sugárzási veszteség a lyuk területével van összefüggésben. Mivel modellemben a lyuk relatív terület / terület aránya viszonylag nagy, így a sugárzási veszteségnek van nagyobb, domináns hatása. A többi rezonátor esetében sem várhatunk mást, ugyanis a sugárzási impedancia a frekvencia függvényében négyzetesen nő, így nagyobb frekvencián még inkább annak lesz nagyobb hatása. Újabb rezonátorkialakításoknál, ahol egy rezonátorhoz egy hanglap tartozik, a lyuk mérete lényegesen kisebb, mint az eddig tárgyalt modellben. Ennek köszönhetően ott a viszkózus veszteségre sokkal inkább érdemes odafigyelni. A továbbiakban a fenti rezonátoroknál az említett okok miatt a fali veszteséget nem veszem figyelembe.

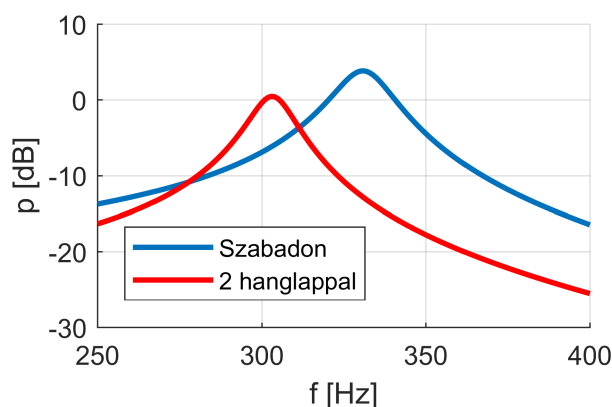
3.2.6. Hanglap hatása a rezonátorra

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor a rezonátor nem csak egyedül van a térben, hanem már megjelennek a hanglapok is. A következő modellben szerepel a rezonátor és két hanglap, de a hanglapok csak merev testként szerepelnek, a térnek két „kivágásaként” jelennek meg. Az ennek megfelelő geometria a 3.13. ábrán látható.

Az ezután következő lépések teljes mértékben megegyeznek a 3.2.3. és a 3.2.4. szakaszokban taglalt lépésekkel, tehát a végtelen elemek vetítése, anyagjellemzők megadása, illetve a (3.20) egyenlet megoldása következik. A gerjesztés



3.13. ábra. A rezonátor két hanglappal



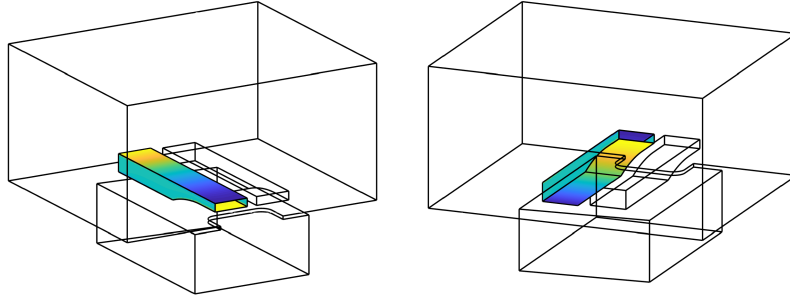
3.14. ábra. A legnagyobb rezonátor frekvenciamenete 2 hanglappal és nélkülük

ebben az esetben is egységnyi pontgerjesztés, ugyanolyan módon mint a hanglap nélküli esetben a 3.10. ábrának megfelelően.

A 3.14. ábrán jól látható a két hanglap hatása. Ahogy azt korábban is említettem, a hanglapok a rezonátor szája előtt akadályként jelennek meg, emiatt jelentősen csökkentik a rezonanciafrekvenciát. Ez a hatás esetünkben jó, ugyanis ezzel kissé 300 Hz fölé kerül a rezonátor sajátfrekvenciája, jóval közelebb a C4 és D4 hanglapok frekvenciájához, mint a 3.2.4. fejezetben.

3.2.7. Rezonátor hatása a hanglapra

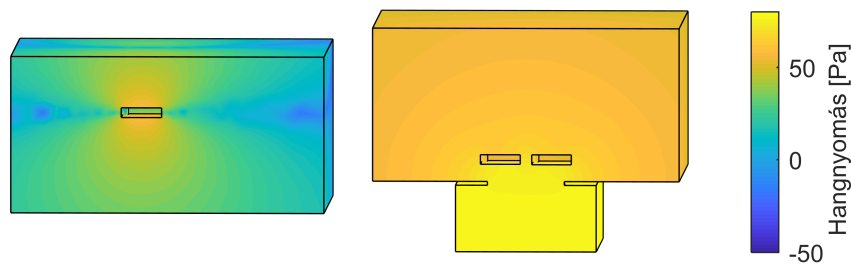
Az előbbi szakaszokban a rezonátor szempontjából vizsgáltuk meg a hanglap hatását a rezonanciafrekvencia változásán keresztül. Fordítsuk meg az eddigi helyzetet és vizsgáljuk meg a 3.2.6. szakaszban tárgyalt elrendezést fordított szemszögből is. Először tekintsünk pusztán egy hanglapot, és vizsgáljuk meg, milyen akusztikai teret sugároz maga köré, majd végezzük el ugyanezt a vizsgálatot a 2 hanglapos rezonátormodellel is. A különbség a gerjesztés módjában van, ugyanis ezekhez a vizsgálatokhoz már nem pontgerjesztést használtam, hanem módusgerjesztést. Ezt a hanglaphoz tartozó legelső hajlító (vertikális) módussal tettem meg, ugyanis ennek van a legnagyobb hatása a környezetre, a hangkeltés során is ez a rezgésalak sugározza el a legtöbb energiát.



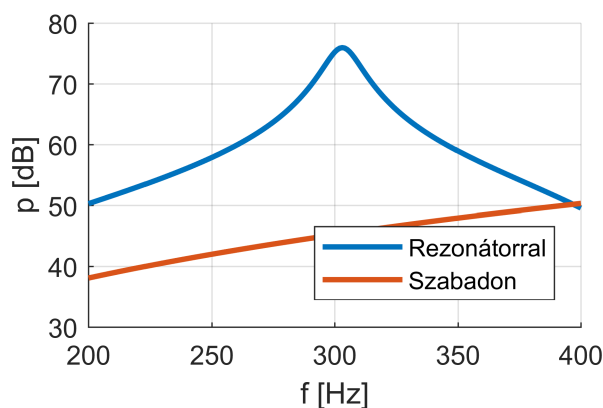
3.15. ábra. Módus a modellbe illesztve felül-, illetve alulnézetből. Az ábra színezése a módusalaknak megfelelő normális irányú rezgésebességet mutatja relatív skálán

Az akusztikai hálón a gerjesztés megadása több lépésből áll. Elegendő a módusalakot a hanglap felületén venni, ugyanis a szabad térrel csak az van kapcsolatban. Első lépésként a hanglap geometriai hálóját pontosan rá kell pozícionálni a külső terület leíró akusztikai háló geometriájára, melyhez forgatásokat, eltolásokat kell alkalmazni. Ezt követően, mivel a módusalakot leírásához használt mechanikai végeselem háló felülete téglalapokra, míg a hangtér akusztikai hálójának felülete háromszögekre van osztva különböző elemméretekkel, a hálók közötti megfelelő interpolációról is gondoskodnunk kell. Esetünkben, a mechanikai elmozdulást kell meghatároznunk az akusztikai háló peremén, így az akusztikai háló peremén elhelyezkedő pontjait meg kell keresnünk a mechanikai hálóban és minden egyes pont esetében azt a téglalapelemet kell tekintenünk, amelyikbe a keresett pont esik. A téglalapon belül az alakfüggvények adják meg a mechanikai elmozdulást, így ezek felhasználásával a téglalap négy sarokpontjához tartozó elmozdulásokat súlyozva adódik a keresett pontban az elmozdulás. Ez az elmozdulás a frekvencia ismeretében átszámítható normális irányú sebességre, amit az akusztikai modellben részecske sebesség peremfeltételként írunk elő. A probléma megoldásához immáron a teljes (3.20) egyenletet tudjuk használni, ahol a \mathbf{v} vektorban szerepelnek a módusalakból számított normális irányú sebességek a hanglap felületén. A \mathbf{p} vektor az eddigi esetekkel ellentétben teljesen ismeretlen, a megoldást továbbra is ez fogja szolgáltatni.

A 3.15. ábrán a már bepozícionált, a 2.3. ábra bal oldali diagramján láthatóhoz hasonló vertikálisan hajlított módusalak látható a két hanglapos rezonátoros modellben. A bal oldali diagramon felülről, mi a jobb oldalin alulról. A színezés a normális irányú elmozdulást és rezgésebességet jelzi, a sárga pozitív irányba, a kék a negatívba, míg a zöld nullát jelent. Az ábrán megfigyelhető, hogy a hanglap alján és tetején pont egymástól különböző színű részek találhatóak, ugyanis a hanglap hajlító rezgése esetén az egyik oldali normális irány elmozdulás értéke pont a másik oldali érték ellentettje lesz. Ezen felül a hanglap bal oldalán lévő zöld területből azt is látjuk, hogy ténylegesen vertikális módussal van dolgunk, hiszen a zöld rész azt jelzi, hogy a hanglapnak nincs oldalirányú kitérése. Ezután a (3.20) egyenletet megoldva a 3.16. ábrán található nyomástervek alakulnak ki.



3.16. ábra. A módusgerjesztéssel kialakult nyomástér rezonátor nélküli és rezonátoros esetben



3.17. ábra. Hanglap lesugárzott frekvenciamenete rezonátorral és nélküle

A 3.16. ábra bal oldalán az önmagában gerjesztett hanglap esete látható. Szépen látszik, ahogy a hanglap dipólsugárzóként viselkedik. Ez az a tulajdonság, amit a rezonátor megszüntet, ahogy azt a 3.16. ábra jobb oldala mutatja. Megfigyelhető az is, hogy a rezonátorban az oda érkező hullámok felerősödnek, míg a hanglaptól a szabad tér felé haladva a nyomás egyre jobban a nulla felé tart.

A 3.17. ábra a rezonátoros, illetve anélküli frekvenciamenetet mutatja, továbbra is a 3.10. ábrán megjelölt pontban. Az ábrán szembejön a rezonátor hatása: egy bizonyos frekvenciasávot kiemel, így a két görbe közötti különbség jelenti a rezonátorral elérhető nyereséget, mely a rezonanciafrekvencia környékén a 30 dB-t is meghaladja. Ezt a mennyiséget beillesztési nyereségnek (*insertion gain*) is szokás nevezni. A kapott eredmények teljes mértékben megfelelnek várakozásainknak.

3.3. A kalapácsütés

A teljes hangszermodellből már csak a kalapácsütés szimulálása van hátra. A gerjesztés pontszerűségét továbbra is feltételezzük, de ezen kívül több tényező is megváltozik. A valós kalapácsütés nem pillanatszerű, időben véges tartója van és a kölcsönhatás ideje alatt sajnos a modális szuperpozíció nem alkalmazható az eddigiekkel azonos módon. Ennek oka, hogy a hanglappal érintkező ütő feje nemlineáris rugó-

ként viselkedik. A következő bekezdésekben ezt modellt mutatom be részletesen, elsősorban a [8] és a [9] irodalmak alapján.

3.3.1. A kalapács alapegyenletei

A kalapács hanglap kölcsönhatását két gömb rugalmas ütközésével lehet modellezni. Ezen két gömb közti kölcsönhatást a Hertz-törvény (3.23) írja le.

$$\delta_M = \left[f^2 D^2 \left(\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_M} \right) \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (3.23)$$

ahol δ_M a kalapács fejének összenyomódása, f a kalapács és hanglap között fellépő erő, D a kalapács anyagjellemzőiből adódó konstans, r_B a hanglap, míg r_M a kalapácsfej, mint gömb sugara. A hanglap, mint gömb sugara tekinthető végtelen nagyságúnak, így (3.23) kissé egyszerűsödik.

$$f = \frac{\sqrt{r_M}}{D} \delta_M^{\frac{3}{2}} \quad (3.24)$$

A (3.24) egyenlet a kalapácsütés esetén fellépő erő és a kalapács összenyomódása közötti összefüggést írja le, ami a lineáris rúgóra felírt $f = Ku$ alakú egyenlettől annyiban különbözik, hogy az elmozdulás típusú mennyiség a $\frac{3}{2}$ -edik hatványon szerepel. Ebből látszik, hogy a kalapácsra a kölcsönhatás közben ható erő a kalapácsfej és a hanglap elmozdulásának nemlineáris függvénye. A későbbi szimulációban pont ez a tulajdonság az, ami a nehézséget fogja jelenteni. Az egyenletekben szereplő M alsó index a kalapácsra vagy más néven ütőre (*mallet*) utal.

A kalapácsfejben tárolt energiára újabb egyenlet írható, mely az energia megmaradását fejezi ki abban a koordinátarendszerben, melyben a kontaktus ideje alatt a két test eredő tömegközéppontja nyugalomban van:

$$\mu \left(\frac{d\delta_M}{dt} \right)^2 + \frac{4}{5} K \delta_M^{\frac{5}{2}} = \mu v_0^2, \quad (3.25)$$

ahol μ a kalapács és a vele kölcsönhatásban lévő test tömegének keresztszorzata, K (merevségi együttható) a (3.24) ben szereplő $\frac{\sqrt{r_M}}{D}$ konstanssal egyenlő, v_0 pedig a kalapács kezdősebessége. A kalapácsfej maximális összenyomódása ebből pedig:

$$\delta_{M,max} = \left(\frac{5}{4} \frac{\mu}{K} \right)^{\frac{2}{5}} v_0^{\frac{4}{5}}. \quad (3.26)$$

A kölcsönhatás alatt a kalapács összenyomódásának időbeli függvénye szimmetrikus, így az idő kiszámításához elég kétszer venni a maximális összenyomódásig

eltelt időt. A harmadik lényeges egyenlet ezt adja meg:

$$\tau = 2 \int_0^{\delta_{M,max}} \frac{d\delta_M}{\eta \frac{d\delta_M}{dt}}, \quad (3.27)$$

ahol a nevezőben lévő időbeli derivált (3.25) átrendezésével számolható. Ez az összefüggés azért lényeges, mert a kölcsönhatási idő mérhető a legkönnyebben az eddig felsorolt jellemzők közül. A τ és a v_0 kezdeti sebesség ismeretében pedig már számítható (3.27) alapján az összenyomódás, (3.24) alapján pedig az erő időfüggvénye. A következő fejezetben bemutatott szimulációk esetében a kalapácsfej mechanikai paramétereit a szakirodalomban található, a fenti összefüggésekből mérések segítségével meghatározott értékek [5] és [8] alapján állítottam be.

3.3.2. A kalapács mozgásegyenlete

A kalapács mozgásgörbéjének kiszámításához az erő (3.24) egyenletéből indulunk ki. Ha kölcsönhatásról beszélünk, (3.24) természetesen csak akkor igaz, amikor a kalapács feje és az azzal kölcsönhatásban lévő test érintkezik. Így (3.24) a következőképpen alakul:

$$f = \begin{cases} 0 & \text{ha } u < 0 \\ Ku^{\frac{3}{2}} & \text{ha } u > 0 \end{cases}, \quad (3.28)$$

ahol az $u = 0$ pontban kezdődik el a kölcsönhatás. Ezt az ismert

$$f = m \frac{d^2u}{dt^2} \quad (3.29)$$

egyenlet egészíti ki, ahol m a kalapács tömege, $\frac{d^2u}{dt^2} = a$ pedig a gyorsulása. A két egyenlet egyenlővé tételével egy másodrendű differenciálegyenlet adódik, aminek egyértelmű megoldásához két kezdeti feltétel szükséges:

$$u(t=0) = u_0, \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = v_0, \quad (3.30)$$

azaz a kezdeti feltételek a kalapács kezdeti pozíciója és sebessége.

Innentől kezdve lépésenként tudjuk számítani a kalapács összes szükséges paraméterét, amelyek a mozgását leírják. Kezdetben ismerjük a pozícióját és sebességét, amelyekből (3.28) alapján adódik a rá ható erő, végül (3.29) alapján a gyorsulás. A következő iterációban a pozíciót és a sebességet becsülni tudjuk (3.31) szerint:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + v^{(n)} \Delta t + \frac{1}{2} a^{(n)} \Delta t^2, \quad v^{(n+1)} = v^{(n)} + a^{(n)} \Delta t. \quad (3.31)$$

Az egyenletben a zárójelben lévő kitevők az időindexet jelölik.

3.3.3. A hanglap és a kalapács kölcsönhatása

A kölcsönhatás számítása az akusztikai és mechanikai esetben is tárgyalt mátrix-egyenlet megoldásával történik. Mivel a kalapács mozgásegyenlete időtartományban adott, így a mátrixegyenlet megoldásánál is térjünk át időtartományra. Ezzel, ha a csillapítástól egyelőre eltekintünk, a következő egyenlet adódik:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{M}\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{A}\mathbf{f}. \quad (3.32)$$

A (3.32) egyenlet egyik időlépéses megoldási módja a Newmark-séma [19]. Ez a séma a kalapács esetén használt lépésről lépésre történő (3.31) alakú megoldáshoz hasonlít, viszont implicit formában közelíti a deriváltakat, ami jó stabilitási tulajdonságokhoz vezet. A megoldáshoz a séma ismertnek tekint három kezdeti feltételt: a hanglap kezdeti pozícióját, sebességét és gyorsulását. Ezzel a gerjesztő erő ismeretében, (3.32) a kezdeti pillanatra meg is van oldva, a kérdést a következő időpontban lévő helyzet adja:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{(n+1)} + \mathbf{K}\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{A}\mathbf{f}^{(n+1)}. \quad (3.33)$$

A (3.33) egyenletben az erőt egyelőre ismertnek tekintjük, az elmozdulás és a gyorsulás következő időpillanatbeli értékei pedig az ismeretlenek. Az egyenlet átalakításához az elmozdulásra becslést (másodfokú Taylor-sor közelítést) alkalmazunk:

$$\mathbf{u}^{(n+1)} \approx \mathbf{u}^{(n)} + \Delta t\dot{\mathbf{u}}^{(n)} + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\mathbf{u}}^{(n)}. \quad (3.34)$$

A (3.34) egyenlet jobb oldalán szereplő sebesség és gyorsulás értékekre pontosabb becslést kaphatunk, ha azokat a centrális differenciaséma alapján az éppen aktuális és a következő időpillanatbeli értékek átlagának (3.35) segítségével becsüljük:

$$\dot{\mathbf{u}}^{(n+\frac{1}{2})} \approx \frac{\dot{\mathbf{u}}^{(n)}}{2} + \frac{\dot{\mathbf{u}}^{(n+1)}}{2}, \quad \ddot{\mathbf{u}}^{(n+\frac{1}{2})} \approx \frac{\ddot{\mathbf{u}}^{(n)}}{2} + \frac{\ddot{\mathbf{u}}^{(n+1)}}{2}. \quad (3.35)$$

Ekkor a (3.33) egyenletbe helyettesítve még mindig szerepel többféle jövőbeli ismeretlen érték is, ezt újabb becsléssel tudjuk kiküszöbölni:

$$\dot{\mathbf{u}}^{(n+1)} \approx \dot{\mathbf{u}}^{(n)} + \Delta t \left[\frac{\ddot{\mathbf{u}}^{(n)}}{2} + \frac{\ddot{\mathbf{u}}^{(n+1)}}{2} \right]. \quad (3.36)$$

Így már behelyettesíthetünk, először (3.36)-ot (3.35)-be, ezt (3.34)-be, majd végül az egészet (3.33)-ba, a következőt kapjuk:

$$\left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t^2}{4}\mathbf{K} \right) \ddot{\mathbf{u}}^{(n+1)} + \mathbf{K} \left[\mathbf{u}^{(n)} + \Delta t\dot{\mathbf{u}}^{(n)} + \frac{\Delta t^2}{4}\ddot{\mathbf{u}}^{(n)} \right] = \mathbf{A}\mathbf{f}^{(n+1)}. \quad (3.37)$$

A (3.37) egyenletet átrendezve a gyorsulás következő időpillanatbeli értékét már egyszerűen tudjuk számítani:

$$\ddot{\mathbf{u}}^{(n+1)} = \left[\mathbf{M} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{K} \right]^{-1} \left[\mathbf{A} \mathbf{f}^{(n+1)} - \mathbf{K} \left(\mathbf{u}^{(n)} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^{(n)} + \frac{\Delta t^2}{4} \ddot{\mathbf{u}}^{(n)} \right) \right]. \quad (3.38)$$

Ezután a sebesség következő értéke (3.36)-ból, az elmozdulásé (3.34)-(3.35)-ből számítható.

A (3.33) egyenlet teljes megoldásához már csak a gerjesztés számítása hiányzik. Itt fontos megjegyezni, hogy ebben az alfejezetben szereplő elmozdulások a hanglapra, míg az előző 3.3.2. alfejezetben lévők a kalapácsra vonatkoznak. Ezúttal mind a kettőről szó lesz, így jelöljük őket rendre u_b -vel és u_h -val, ahol az indexek a *bar*, illetve *hammer* szavakra utalnak. A kalapács által a hanglapra kifejtett erő számításához (3.28)-hoz hasonló kifejezést tudunk felírni annyi különbséggel, hogy nem csak a kalapács helyzetétől függ az erő, hanem a kalapács és hanglap egymáshoz képesti elhelyezkedésétől:

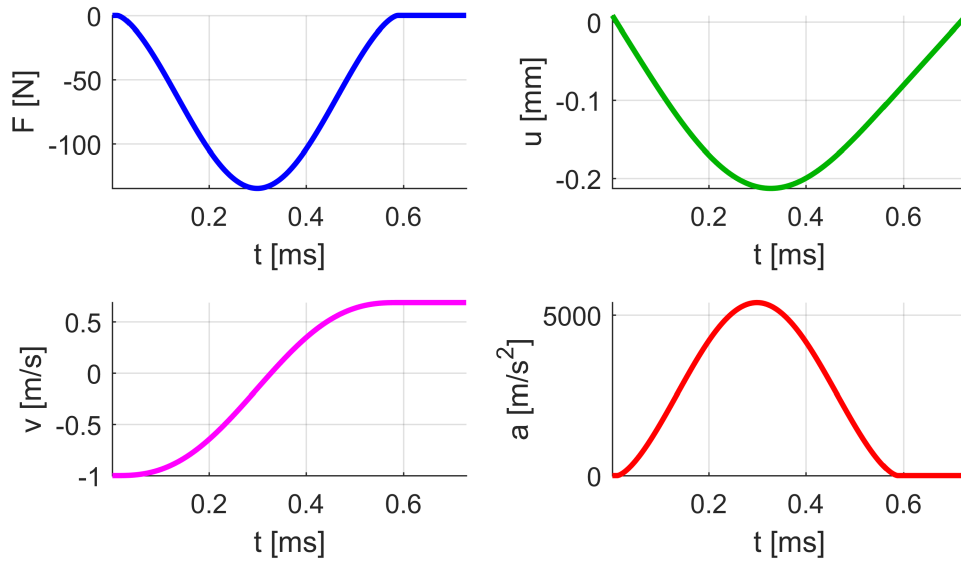
$$f_k = \begin{cases} -K |u_{b_k} - u_h|^{\frac{3}{2}} & \text{ha } u_h < u_{b_k} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}. \quad (3.39)$$

A (3.39) egyenlethez fontos megjegyezni, hogy mivel egy pontban koncentrálódik a kalapácsütés hatása, így az \mathbf{f} vektor majdnem teljesen nullvektor, kivéve a k -edik elemét, ahol a kölcsönhatás zajlik. Ez az oka annak, hogy az egyenletben egy k index is szerepel a hanglap elmozdulásvektoránál és az erőnél. A (3.39) összefüggés alapján tehát az erő pillanatnyi értéke (és a kalapács minden más paramétere) becsülhető, a következő elmozdulás és sebesség pedig a már kifejtett (3.31) alapján adódik. Az így kiszámolt kalapács tulajdonságokat a 3.18. ábra mutatja.

Az ábrán megfigyelhető, hogy az erő szimmetrikus az idő függvényében, az elmozdulás azonban nem, vagyis nem tiszta szinuszgörbe adja meg a kölcsönhatás során az elmozdulást. Lineáris rugó esetében az elmozdulás időfüggvénye egy szinuszjel fél periódusaként adódna. A sebességfüggvényen is szépen látszik, hogy a kalapács sebessége a kölcsönhatás végén nem a kezdeti sebesség ellentettje lesz, hanem annál kevesebb. Ez várható is volt, ugyanis a kalapács némi energiát átad a hanglapnak. A gyorsulás esetében meglepő lehet a $5000 \frac{m}{s^2}$ -es maximum érték, de egy rövid kalapács-ütő kölcsönhatás esetén bizony előállhat ilyen magas érték is [8].

3.3.4. Módusok használata a válasz számításához

Akárcsak az önmagában álló hanglap esetében, a kölcsönhatás alatt is számolhatunk a módusok segítségével. Ennek előnye, hogy az eddig leírt, időlépésről időlépésre megoldandó nagyméretű véges elem egyenletrendszer egyenleteinek számát



3.18. ábra. A kalapács elmozdulása, sebessége, gyorsulása, és a rá ható erő időfüggvénye a kölcsönhatás alatt

redukálhatjuk, így eredményül kisebb számítási igényhez és gyorsabb megoldáshoz juthatunk.

A sajátfrekvenciákat és módusalakokat a már ismertetett módon, a 3.1.6. szakasz alapján tudjuk számítani. A megoldás menetében a fentiekhez képest a különbség abból adódik, hogy ezúttal nem hagyjuk magára a rendszerünket, és a rendszer állapotától függ a gerjesztő erő is a (3.39) összefüggés szerint. Így a gerjesztés időtartama alatt minden időlépésben újra kell számítanunk a modális koordinátákat, nem feltételezhetünk harmonikus időfüggést.

Ahogy az már ismert, az elmozdulás felírható a módusalakok és a hozzájuk tartozó súlyok szorzataként (3.14). A \mathbf{q} modális koordinátákat tartalmazó vektort pedig az elmozdulásvektort a módusalakokra vetítve kapjuk:

$$\Phi^T \mathbf{u} = \mathbf{q}, \quad (3.40)$$

ahol kihasználtuk a módusok ortonormáltságát. (3.40) idő szerinti deriváltja:

$$\Phi^T \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}. \quad (3.41)$$

Mindkét egyenlet bal oldala ismert, ezek alapján a súlyok és deriváltjaik számíthatóak. Így, ha az elmozdulásokat a fenti időlépéses módszerrel a kölcsönhatás ideje alatt kiszámítjuk, abból a modális koordináták és időbeli deriváltjaik is közvetlenül adódnak. A kölcsönhatás ideje után pedig szabadrezgést végez a hanglap, tehát a

modális koordináták harmonikus függvények lesznek:

$$q_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \phi_i). \quad (3.42)$$

(3.42) idő szerinti deriváltja:

$$\frac{dq_i(t)}{dt} = -\omega_i A_i \sin(\omega_i t + \phi_i). \quad (3.43)$$

Abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy (3.42) és (3.43) egyenletekre csak a $t = 0$ időpontban van szükségünk, ha a zérus időpontot a kalapáccsal való kölcsönhatás befejeződésénél vesszük fel, így (3.44) és (3.45) adódik belőlük.

$$q_i(0) = A_i \cos(\phi_i) \quad (3.44)$$

$$\frac{dq_i(0)}{dt} = -\omega_i A_i \sin(\phi_i) \quad (3.45)$$

(3.44) és (3.45) egy egyenletrendszer alkotnak, ahol két ismeretlen van az A_i és a ϕ_i , vagyis az i -edik súly amplitúdója és fázisa. Ezek ismeretében már minden időpillanatban számíthatóak a modális koordináták is a kölcsönhatás lezajlása után.

3.3.5. Csillapítás figyelembe vétele

Csillapítás nélkül, az elmozdulást a (3.14) szerint módusalakok és modális koordináták segítségével kifejezve a mátrixegyenlet így alakul:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \Phi \mathbf{q} = \mathbf{f}. \quad (3.46)$$

(3.46)-ot Φ^T -tal beszorozva (3.47) adódik:

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q} - \omega^2 \Phi^T \mathbf{M} \Phi \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{f}. \quad (3.47)$$

Mivel $\Phi^T \mathbf{K} \Phi$ diagonális és a $\Phi^T \mathbf{M} \Phi$ szorzat egységmátrixot ad, így (3.47) egyenletrendszer egymástól független egyenletekből áll. Ha bevesszük a \mathbf{C} csillapításmátrixot is, (3.48)-at kapjuk.

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q} + j\omega \Phi^T \mathbf{C} \Phi \mathbf{q} - \omega^2 \Phi^T \mathbf{M} \Phi \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{f} \quad (3.48)$$

Általános esetben a $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ szorzat nem diagonális, így az egyenletek függetlensége sérül és a számítási igény jelentősen megnő. Az általam szimulált rendszerben szerencsére arányos csillapítás jelenik meg, vagyis a csillapításmátrix felírható a másik

két mátrix lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{C} = \frac{\gamma_B}{\rho} \mathbf{M} + \eta \mathbf{K}. \quad (3.49)$$

Az η a viszkoelasztikus csillapításból adódó konstans, aminek értéke nagyjából 10^{-8} s és 10^{-6} s közé tehető, míg γ_B a hanglapra ható légherheléssel áll kapcsolatban, értéke pedig általában 10 s^{-1} és 100 s^{-1} között mozog. Ezzel tehát a (3.48)-ban szereplő egyenletek függetlensége továbbra is fennáll, így külön-külön is megoldhatóak, vagyis a számítási igény nem növekszik a csillapítás nélküli modellhez képest.

3.3.6. Csillapítás alkalmazása a módusokon

A csillapítás figyelembevételével az alapvető változást az adja, hogy a módusalakok súlyai nem egyszerűen harmonikus függvényekkel írhatóak le, hanem azok exponenciális függvény szerint csillapodnak, illetve frekvenciájuk eltolódik. Ennek megfelelően (3.42) csillapított formában:

$$q_i(t) = A_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \cos(\omega_i^* t + \phi_i), \quad (3.50)$$

ahol az időállandó:

$$\tau_i = \frac{1}{\omega_i \xi_i}, \quad (3.51)$$

a csillapított sajátfrekvencia:

$$\omega_i^* = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}, \quad (3.52)$$

és a csillapítási tényező:

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\eta \omega_i + \frac{\gamma_B}{\omega_i} \right). \quad (3.53)$$

(3.50) alapján a $t = 0$ pontban (3.44) adódik ismét, az időbeli deriváltra ellenben ez nem igaz, az új egyenletrendszer a következő:

$$q_i(0) = A_i \cos(\phi_i), \quad (3.54)$$

$$\frac{dq_i(0)}{dt} = -\frac{1}{\tau_i} A_i \cos(\phi_i) - \omega_i^* A_i \sin(\phi_i). \quad (3.55)$$

(3.54)-ben és (3.55)-ben ismét csak az amplitúdó és a fázis szerepel ismeretlenként, ami már megoldható. Ehhez a következőt érdemes alkalmazni. Nevezzük el az $A_i \cos(\phi_i)$ szorzatot c nek, az $A_i \sin(\phi_i)$ szorzatot s -nek. Így (3.54)–(3.55) átírható

mátrixalakba:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\tau_i} & -\omega_i^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i(0) \\ \frac{dq_i(0)}{dt} \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

(3.56)-ból c és s egyszerűen számítható, és ezzel együtt az amplitúdó és a fázis is:

$$A_i = \sqrt{c^2 + s^2} \quad (3.57)$$

$$\phi_i = \tan^{-1} \left(\frac{s}{c} \right) \quad (3.58)$$

3.3.7. Teljes csatolt modell

Az eddigi rendszerhez már csak az akusztikai modellt kell hozzacsatolni, amivel már a teljes hangszer szimulációja megvalósítható. Ehhez a két rendszer közötti egymásra hatást kell biztosítani. Az akusztikai rendszer válasza, a nyomás, hat erőként a mechanikai rendszerre, míg visszafele a hanglap rezgésebbessége meghatározza az akusztikai részecskék normális irányú sebességét, mint gerjesztés. Ezt a kapcsolatot a (3.59)–(3.60) egyenletrendszer írja le.

$$(\mathbf{K}_m + j\omega\mathbf{C}_m - \omega^2\mathbf{M}_m)\mathbf{u} = \mathbf{F}_m(\mathbf{f} + \mathbf{A}_m\mathbf{p}) \quad (3.59)$$

$$(\mathbf{K}_a + j\omega\mathbf{C}_a - \omega^2\mathbf{M}_a)\mathbf{p} = -j\omega\mathbf{F}_a(\mathbf{A}_a j\omega\mathbf{u}) \quad (3.60)$$

Az egyenletekben az m index a mechanikai, a pedig az akusztikai rendszerre utal. Az \mathbf{A}_m és \mathbf{A}_a mátrixok a mechanikai elemek csúcspontjait vetítik az akusztikai elemekre és fordítva. Emellett a mátrixok figyelembe veszik az adott koordinátákhoz tartozó normális irányt, mivel mind a nyomás, mind a rezgésebbesség csak a normális irányban fejt ki hatást. Az \mathbf{F} mátrixok a felületi elosztott hatások skálázása miatt szerepelnek. Az egyenleteket átrendezve a következő mátrixegyenletet kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & -\mathbf{F}_m\mathbf{A}_m \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_a\mathbf{A}_a & \mathbf{M}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_m\mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

(3.61)-ből látszik, hogy a csatolt modell a már megszokott végeelem mátrixegyenlet formába írható (3.62) megfeleltetésekkel, ahol \mathbf{g} a gerjesztés és az \mathbf{x} állapot a válasz. A csatolt rendszer megoldása egyszerűen a (3.61) időlépéses megoldásával adódhatna, de a csatolt mátrixok az eddigieknél jóval nagyobb méretűek, így a számítási idő jelentősen megnövekedne. Adja magát a modális megoldás használata.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & -\mathbf{F}_m \mathbf{A}_m \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_a \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_a \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_a \mathbf{A}_a & \mathbf{M}_a \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_m \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}$$

A módusalakokat és skálázási tényezőket már az eddigi részekben kiszámoltuk külön az akusztikai és külön a mechanikai modellre. Utolsó lépésben ezeket be kell írni a már megkapott mátrixegyenletbe, így tehát (3.61)-et írjuk át a következő alakba:

$$\mathbf{K}' \mathbf{q} + j\omega \mathbf{C}' \mathbf{q} - \omega^2 \mathbf{M}' \mathbf{q} = \mathbf{g}', \quad (3.63)$$

ahol a (3.64)–(3.68) megfeleltetéseket lehet alkalmazni:

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \Phi_m^T \mathbf{K}_m \Phi_m & -\Phi_m^T \mathbf{F}_m \mathbf{A}_m \Phi_a \\ \mathbf{0} & \Phi_a^T \mathbf{K}_a \Phi_a \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} \Phi_m^T \mathbf{C}_m \Phi_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_a^T \mathbf{C}_a \Phi_a \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} \Phi_m^T \mathbf{M}_m \Phi_m & \mathbf{0} \\ \Phi_a^T \mathbf{F}_a \mathbf{A}_a \Phi_m & \Phi_a^T \mathbf{M}_a \Phi_a \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_a \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{g}' = \begin{bmatrix} \Phi_m^T \mathbf{F}_m \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Így a (3.63) egyenlet a (3.61)-gyel analóg módon használható az időlépéses sé mával való megoldásra. Míg a (3.61)-ben több százezer szabadságfokú a rendszer, addig a (3.63) esetében az ismeretlenek száma százas nagyságrendű az általam vizsgált elrendezésekben.

4. fejezet

Eredmények

A tényleges eredmények bemutatása előtt érdemes megjegyezni, hogy az általam szimulált modell kis mértékben ideálisnak tekinthető, a valóság pontos mását modellezni közel lehetetlen. Elég megfigyelni például a 4.1. ábrán látható hanglapokat.

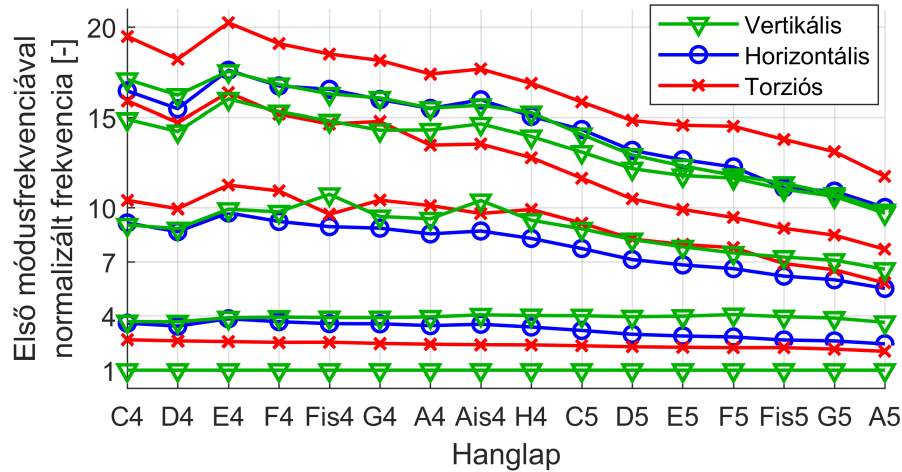
Látszik, a hanglapok bevágásánál is, hogy csekély az esélye két ugyanolyan elkészítésének. A hangolóját kialakítása kézi eszközökkel történik, amivel óhatatlanul belekerül némi pontatlanság a hangszerbe. Különbözhetnek a hanglapok a szálirányban is, amelynek néhány fokos megváltozása is nagy eltéréseket tud okozni. Ezen felül, ha a hanglapok színének eltérését is észre vesszük, akár anyagtulajdonságbeli különbségekre is következtethetünk.

Ez természetesen nem csak a hanglapokra igaz. Ugyanúgy gyártási bizonytalanságok jellemzik a rezonátort is, aminek a már említett hangolási nehézségei is tudnak problémákat okozni. A kalapács esetében pedig a pontszerű hatás természetesen nem teljesen realiztikus, de ez a közelítés elég jól modellezi a tényleges kalapácsgerjesztést.

A fenti nehézségektől függetlenül a szimulációval még mindig javítható a hangszer kialakítása, illetve a gyártási folyamat hatékonysága. Ebben a fejezetben a szimulációs és ellenőrzési lehetőségeket tárgyalom.



4.1. ábra. A szimulált és mért hanglapok



4.2. ábra. A hanglapok normalizált sajátfrekvenciái

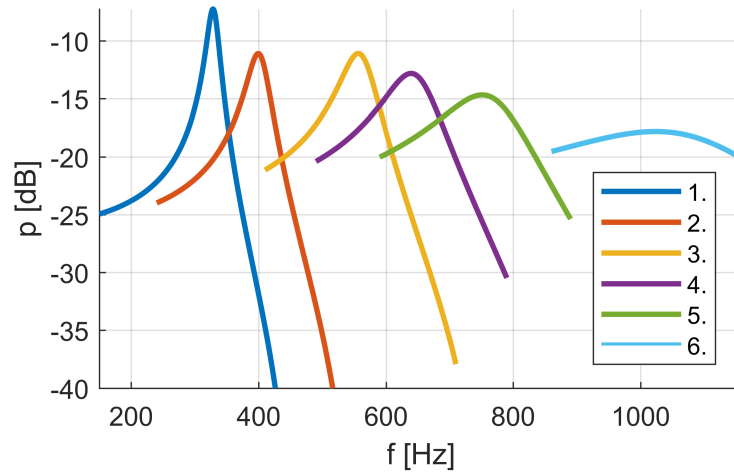
Hanglap	Mért frekvenciák [Hz]			$\frac{E}{E_0}$	Szimulált frekvenciák [Hz]		
	f1	f2	f3		f1	f2	f3
C4	264	1048	2656	0.680	264.39	972.92	2390.40
D4	296	1176	2788	0.690	296.67	1089.21	2571.89
E4	324	1320	3196	0.995	323.91	1260.01	3144.66
F4	349	1400	3376	0.950	349.61	1372.40	3413.89
F#4	369	1480	3376	1.000	369.97	1448.66	3543.46
G4	392	1570	3530	1.000	392.32	1530.10	3729.87
A4	440	1762	3876	1.060	439.53	1730.90	4121.33
A#4	464	1864	4104	1.150	464.39	1882.14	4507.42
H4	496	1976	4216	1.160	496.48	1992.71	4601.00
C5	520	2096	4304	0.995	520.18	2082.81	4583.02
D5	584	2300	4368	0.950	583.63	2302.50	4803.26
E5	659	2523	4733	1.020	658.67	2621.47	5238.59
F5	705	2755	5176	0.980	705.18	2869.42	5483.32
F#5	742	2816	4984	0.945	741.40	2928.49	5381.65
G5	784	2985	5360	0.892	783.94	3034.20	5547.49
A5	880	3168	5308	0.840	880.35	3200.31	5794.05

4.1. táblázat. Mért, illetve szimulált vertikális frekvenciák

4.1. A hanglapok modellezése

Ahogy azt láttuk, a hanglapokkal kapcsolatos legfontosabb adatok, azok sajátfrekvenciái és az azon a frekvencián létrejövő módus alakja. A 4.2. ábra éppen ezeket mutatja az általam szimulált hanglapok esetében.

Az ábrán vízszintes tengelyen a hanglapok szerepelnek, míg a függőlegesen az adott hanglap sajátfrekvenciái láthatóak a hanglap alapprofrendenciájával normalizálva. Megfigyelhető, a már említett hangolásnál fontos 1 : 4 : 10 arány. Az alapprofrendencia négyszeresénél szépen látszik a majdnem teljesen egyenes grafikon, ezekre a frekvenciákra többé-kevésbé sikerült behangolni a lapokat. Ugyanígy a tízszeres alapprofrendencia körül is látható egy vertikális módusgörbe, viszont ez már a nagyfrekvenciás hanglapoknál jelentősen eltér az ideális értéktől.



4.3. ábra. A szimulált rezonátorok frekvenciamenetei

Ahhoz, hogy a 4.2. ábra adatait validáljuk, hasonlítsuk össze az általam szimulált hanglap vertikális módusfrekvenciáit ugyanezen módusok mérési frekvenciákkal. Ezt a 4.1. táblázat mutatja. Azzal a problémával kerültem szembe, hogy az adott hanglapmérések és a [16] adatbázisban található Young-modulusok és Poisson tényezők alapján a frekvenciák nem mutattak egyezést. Ebből kifolyólag, mivel a méretek mérése egyértelmű, a Young-modulus változtatásával az alapfrekvenciát (ami egy vertikális módus) sikerült a mért adatokhoz hangolni. A táblázat $\frac{E}{E_0}$ oszlopa a behangolt és az eredeti longitudinális irányú Young-modulus arányát mutatja. Sok esetben jó egyezést adott az eredeti érték is, a legmélyebb és a legmagasabb hanglapok esetében azonban számottevő eltérések adódtak. Ez is az anyagparaméterek bizonytalanságára világít rá. Az anyagparaméter behangolása után a másik két, alapfrekvenciához képest névlegesen 1 : 4 és 1 : 10 arányú sajátfrekvenciák nem mutattak tökéletes egyezést a mérésekkel, ezeket az eltéréseket tekinthetjük a modell hibájának.

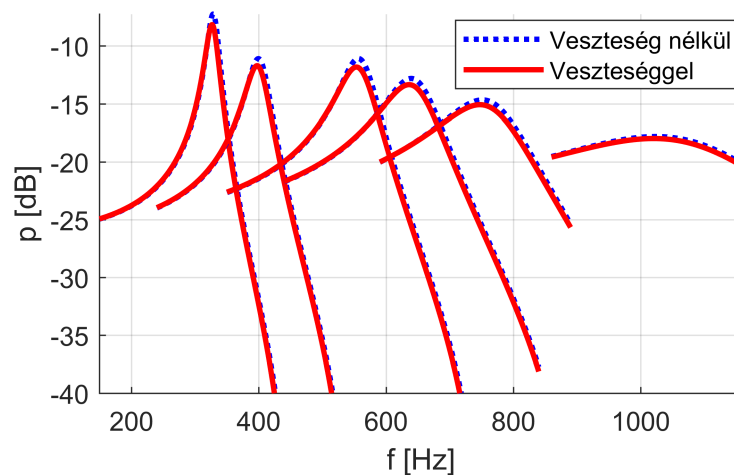
4.2. Rezonátorok sajátfrekvenciái

Akárcsak a hanglapok esetében, a rezonátorok szimulációját is összevethetjük a mérésekből származó adatokkal. A 3.2.4. fejezetben részletezett módon, ha az összes rezonátort megvizsgáljuk a 4.3. ábrán látható frekvenciamenetek adódnak.

A 4.3. ábra balról jobbra ábrázolja az átviteli függvényeket a legnagyobb rezonátortól a legkisebbig. Láthatjuk, hogy a nagyobb frekvenciás rezonátoroknak arányaiban kisebb a kiemelésük, jobban elkentek. Ez a kialakítással és a kis méretekkel magyarázható. Érdekes megfigyelni a második rezonátorhoz tartozó görbét, ugyanis a csúcsának az amplitúdója a két mellette lévő görbe alatt van. Ez azt jelenti, hogy e rezonátor esetében nagyobb a sugárzási veszteség. Ez azzal magyarázható, hogy

Rezonátor száma	Jósági tényező [-]	Szimulált frekvencia [Hz]	Mért frekvencia [Hz]
1	18.22	328	305.5
2	11.08	399	386.5
3	9.75	556	559.0
4	7.03	640	641.5
5	5.11	751	740.5
6	3.41	1024	1007.5

4.2. táblázat. A rezonátorok mért és szimulált paraméterei



4.4. ábra. A szimulált rezonátorok frekvenciamenetei falí viszkózus veszteséggel és anélkül

ehhez a rezonátorhoz nem kettő, hanem három hanglap tartozik, így hozzá szélesebb és ezzel együtt alacsonyabb amplitúdócsúcsú frekvenciamenet tartozik.

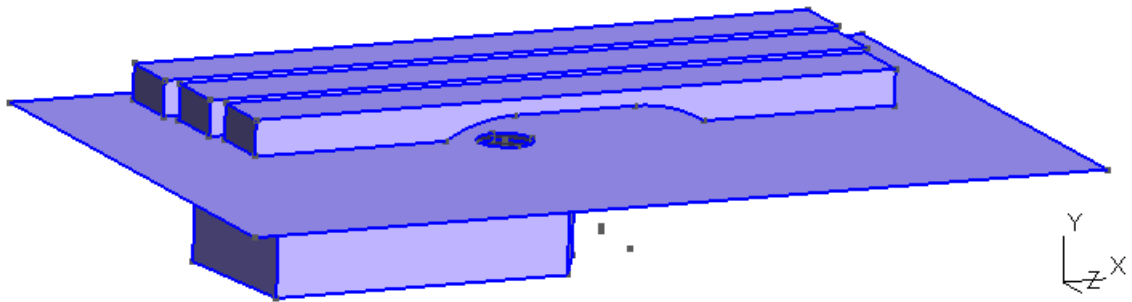
A szimuláció eredményeit számokban a 4.2. táblázat mutatja. A jósági tényezők a 4.3. ábra alapján várhatóan alakul, nagyfrekvenciás rezonátoroknál jóval kisebb értéket mutat, mint a kisfrekvenciásoknál. A táblázat lehetőséget ad arra, hogy a szimulált frekvenciákat összehasonlítsuk a mérési eredményekből származó frekvenciaértékekkel. Ahogy látszik, ezek nagyon jó egyezést mutatnak, a 4. rezonátor esetében az eltérés csupán 1.5 Hz, míg a legnagyobb relatív eltérés 5% körüli az első rezonátor esetében.

Következő lépésben tekintsük a falí viszkózus veszteséget figyelembe vevő modellt. Ekkor a 3.2.5. alfejezetben tárgyaltaknak megfelelően azt várjuk, hogy a rezonanciafrekvencia kissé megváltozik. A 4.4. ábrán éppen ezt láthatjuk.

Megfigyelhető, hogy az eltérés nem számottevő a már említett okokból. A vázolásainknak a számszerű adatok is megfelelőek, ezt a 4.3. táblázat mutatja.

Rezonátor száma	Eredeti jós. tény. [-]	Veszteséges jós. tény. [-]	Eredeti frekvencia [Hz]	Veszteséges frekvencia [Hz]
1	18.22	16.35	328	327
2	11.08	10.45	399	397
3	9.75	8.78	556	553
4	7.03	6.49	640	636
5	5.11	4.79	751	748
6	3.41	3.40	1024	1020

4.3. táblázat. Rezonátorparaméterek alakulása viszkózus veszteség esetén



4.5. ábra. Újabb xilofon modell, hanglapokkal és az egyik hanglaphoz tartozó rezonátorral

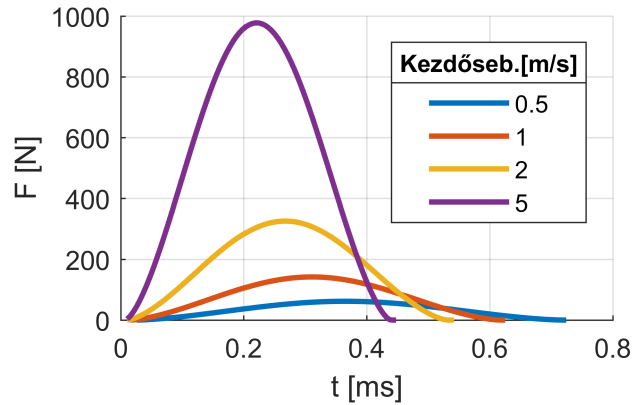
4.3. A teljes modell összefüggései

Ahogy eddig láthattuk, ha több hanglap tartozik egy rezonátorhoz, akkor a rezonátor hangolása nehézkes, mert nem csak egy bizonyos hanglap hanglesugárzására van kihatással. Ezen okból kifolyólag a teljes modell összefüggéseinek feltárásához egy olyan modellt szimulálok és mutatok be, ahol minden hanglaphoz tartozik rezonátor. Ezen hangszer egy rezonátora a 4.5. ábrán látható. Az ábrán csak három hanglap látszik, hogy látható legyen az új kialakítású rezonátor nyílása, de a szimulációban öt hanglap vett részt, melyek közül a középső alatt helyezkedik el a lyuk és a rezonátor, illetve a kalapács is ezt a hanglapot gerjesztette. Ezt a modellt szimuláltam a 3.3.7. szakaszban bemutatott teljes csatolt rendszer segítségével.

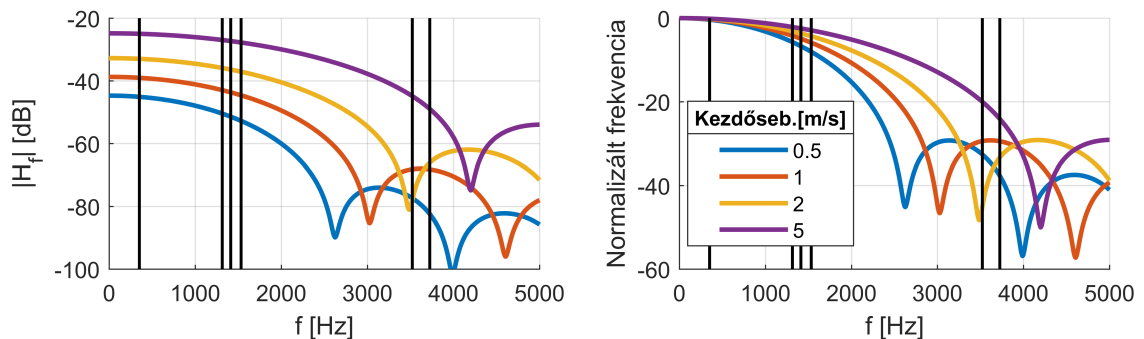
4.3.1. Kezdősebesség és az erő kapcsolata

Adott teljes modell esetén a gerjesztést tudjuk változtatni, mint paraméter. Figyeljük meg, mi történik, ha a kalapács kezdősebességét változtatjuk. A 4.6. ábra a kölcsönhatás alatt fellépő erőfüggvényt mutatja több különböző kezdősebesség esetén.

Az ábrán az látszik, hogy minél nagyobb a kezdősebesség, annál nagyobb a fellépő erő maximuma, ahogy ez várható is. A kölcsönhatás ideje pedig a kezdősebesség növelésével csökken a nemlineáris rugóhatás miatt. Persze a gyorsabb lefutású függvény spektrumában nagyobb frekvenciás komponensek is megjelennek. A 4.7. ábra



4.6. ábra. A gerjesztő erő időfüggvényei különböző kalapács kezdősebességek esetén



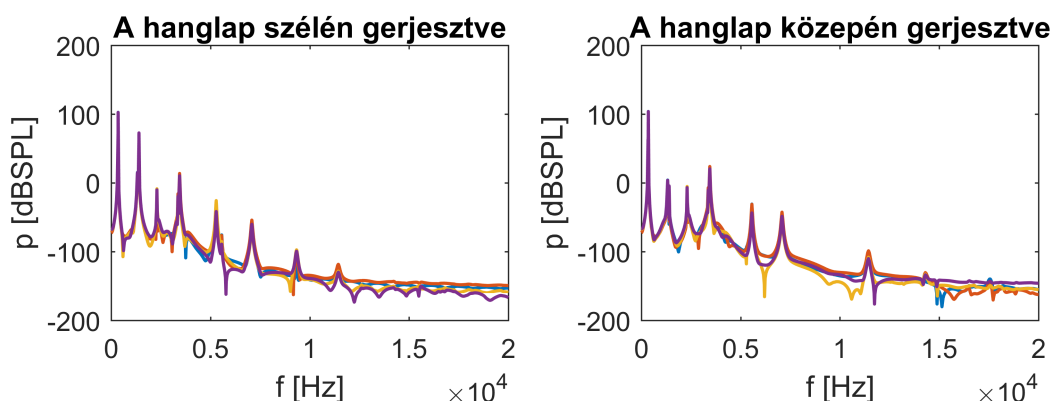
4.7. ábra. A gerjesztő erő spektrumai (bal) és normalizált spektrumai (jobb) különböző kalapács kezdősebesség esetén

bal oldalán az előző négy időtartománybeli erőfüggvény látható a frekvenciatartományban.

A függőleges fekete egyenesek a hanglap módusfrekvenciáit jelölik. Ezen az ábrarészen megfigyelhető, hogy különböző kezdősebességű gerjesztés esetén az egyes módusok különböző mértékben gerjesztődnek. Például a 3500 Hz körüli, harmadik vertikális módus a lassú, 0.5 $\frac{m}{s}$ -os görbénél a módus a vágási frekvencián kívül esik, míg a gyorsabb 5 $\frac{m}{s}$ -os esetben még bőven azon belül esik. Ez például a nagyobb frekvenciájú hanglapok gerjesztésénél okozhat problémát, ugyanis azonos hangzás-hoz a magasabb hanglapok esetén merevebb kalapácsra lenne szükség. A 4.7. ábra jobb oldalán ugyanez a diagram látható, csak a nulla frekvenciához tartozó érték szerint normalizálva. Ebből szépen látszik az egyes kezdősebességek közti vágási frekvenciakülönbség, illetve a módusok gerjesztésének relatív szintjei is.

4.3.2. Ütési pozíció változtatása

A gerjesztés nagyságán kívül annak pozícióját is tudjuk változtatni a hangkeltés során. Érdekes megfigyelni, hogy mi történik például abban az esetben, ha a hanglapot a hosszúirányú közepén találjuk el. Ekkor az első módus maximumhelyét, viszont



4.8. ábra. Különböző pozíciókban megütött hanglap által le-sugárzott hang spektrumai

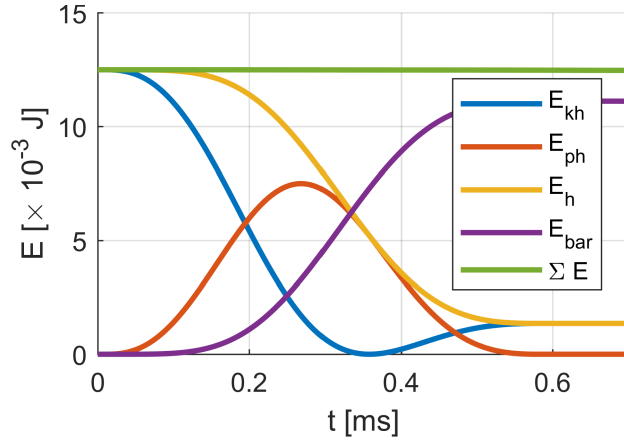
a második vertikális módus nullhelyét gerjesztjük. Ekkor az utóbbi módust, illetve az összes többit, amelynek nullhelye a hanglap közepén helyezkedik el, nem tudjuk rezgésbe hozni. Figyeljük meg a 4.8. ábrát.

Az ábrán kétféle pozíciójú gerjesztés által létrehozott spektrumot látunk, a le-sugárzott hangnyomásszint ábrázolásával. A bal oldalon a szélén, míg a jobb oldalon a közepén üti meg a kalapács a hanglapot. A spektrumon szereplő négy szín, négy különböző vizsgálati pontot jelent a szimulált térben. Szépen látszik az ábrán, hogy például a második csúcs jóval kisebb amplitúdójú közepén gerjesztve, mint szélén. Ez igazolja is várakozásainkat. Ugyanez megfigyelhető a 10 kHz környékén elhelyez-kező vertikális módus esetében is, viszont itt teljesen eltűnik a csúcs a jobb oldali esetben.

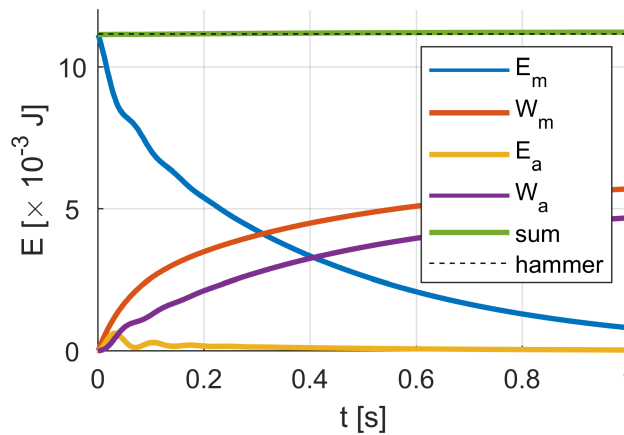
4.3.3. A rendszer energiája

Érdekes a szimulációt az energia oldaláról is megvizsgálni. Beszélhetünk az egyes részeknek (kalapács, hanglap és rezonátor) külön-külön energiaszintjéről, az energia-megmaradás törvényéből adódóan azonban az összes energiának (vagyis az egyes al-rendszerek energiaszintjei összegének) konstansnak kell lennie. A szimulációt, ahogy eddig is tettük, két részre tudjuk osztani: kölcsönhatás és szabad rezgés. A 4.9. ábra a kölcsönhatás alatt fellépő energiaviszonyokat ábrázolja.

A sárga görbe jelöli a kalapács összes energiáját. Ennek egy része helyzeti (kék görbe), a maradék pedig potenciális (piros görbe). A lila görbe a hanglap, míg a zöld a rendszer összes energiáját ábrázolja. A kezdő pillanatban megfigyelhető, hogy csak a kalapácsnak van energiája, ami kinetikus energia. Ez természetesen a ka-lapács kezdősebességének köszönhető. Ezt követően a kinetikus energia csökkenni kezd a potenciális energia javára, a kalapács feje elkezd összenyomódni, ugyanak-kor a kalapács összenergiája is csökken, amit a hanglap vesz át és elkezd rezegni. Ezután van egy pont, amikor a fej teljesen összenyomódik, ez a piros görbe maxi-muma. Érdekeség, hogy a kalapács sebessége nem ezen a ponton nulla, tehát itt



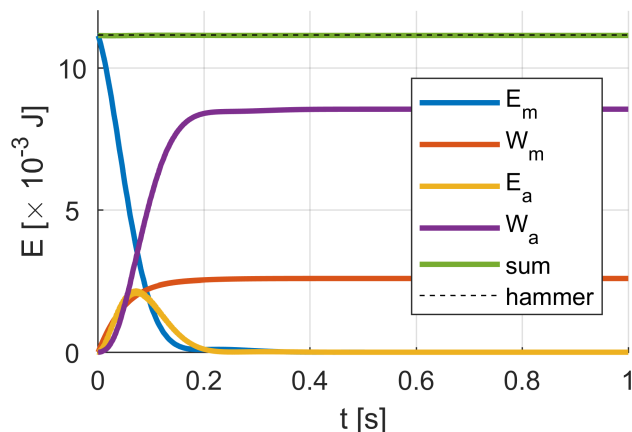
4.9. ábra. Energiagörbék a kölcsönhatás alatt



4.10. ábra. Energiagörbék a kölcsönhatás után

még a hanglap felé mozog. Ez annak köszönhető, hogy ekkor a hanglapnak már van némi elmozdulása. Ezután bekövetkezik a kalapácsfej sebességének zérusra lassulása (kék görbe minimuma), majd elindul visszafelé, elkezdi visszanyerni kinetikus energiájának egy részét. Az ábra jobb szélén látszik, hogy végül minden energia állandó értékre áll be a kölcsönhatás végén. Összességében elmondható, hogy a kalapács kezdeti energiájának töredékét megtartja, nagyobb részét a kölcsönhatás alatt átadja a hanglapnak.

A 4.10. ábra a kölcsönhatás utáni energiaviszonyokat ábrázolja. A szaggatott vonal mutatja a kalapács által a rendszerbe juttatott energiát, ez az, aminek a mechanikai és akusztikai rendszeren belül is kell maradnia. Ez teljesül is, amit a zöld görbe (a két rendszer összes energiája) ábrázol. Ezekon kívül a mechanikai (hanglap) és az akusztikai (rezonátor) rendszer tárol energiát. Az ábra bal szélén, a $t = 0$ időpontban csak a hanglapnak van energiája (kék görbe), ami fokozatosan csökken. Ez részben akusztikai energiaként (sárga görbe) van ezután jelen, de inkább a veszteségek emésztik fel. Kétfajta veszteségről beszélhetünk: egyik a mechanikai (piros görbe), ez például a hanglap részecskéi közti súrlódásból (viszkoelasztikus veszteség) adódik, a másik pedig az akusztikai (lila görbe), ami a lesugárzott hang energiájával



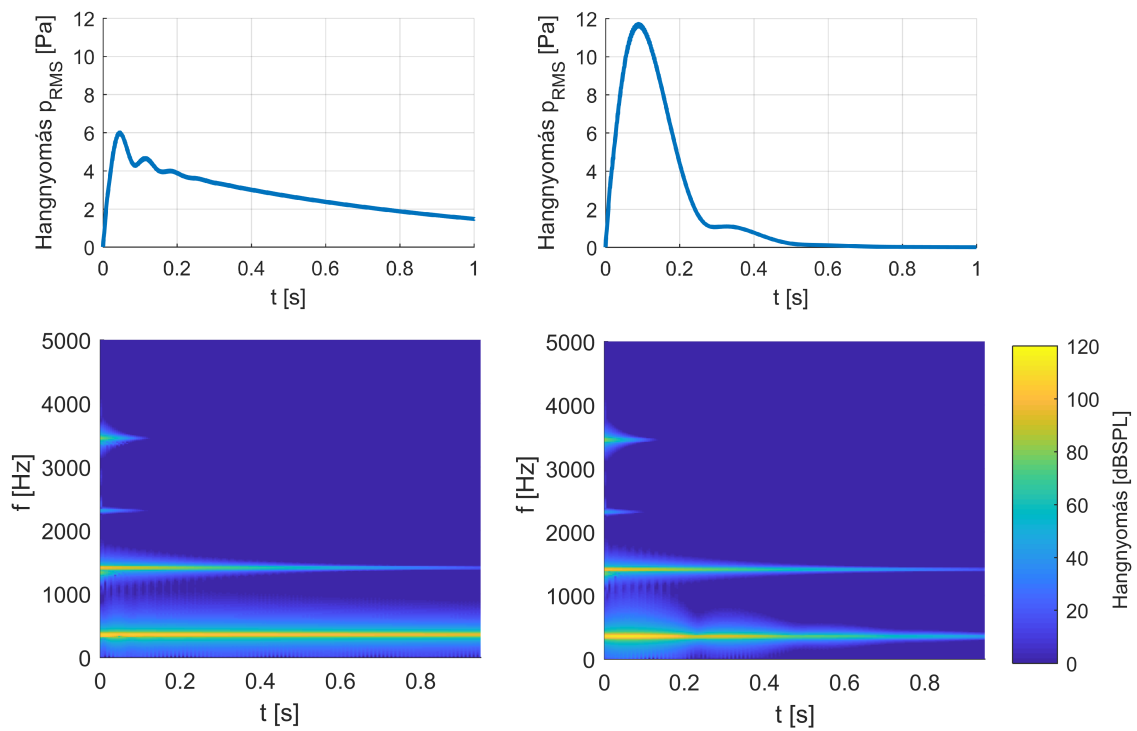
4.11. ábra. Energiagörbék a kölcsönhatás után, behangolt rezonátor esetén

ekvivalens. Ezeknek a görbéknek a lefutása lényegesen megváltozik a hanglap és a rezonátor egymáshoz képesti hangolásának függvényében. Ezt vizsgálom a következő alfejezetben.

4.3.4. Rezonátor hangolásának hatása

Annak a konstrukciónak, melyben egy rezonátorhoz egy hanglap tartozik, nyilvánvaló előnye, hogy jóval könnyebb a rezonátort a hanglaphoz hangolni. Persze felmerül a kérdés, hogy van-e értelme pont a hanglap alaphangfrekvenciájára hangolni.

A 4.11. ábra egy hanglaphoz hangolt rezonátor esetén mutatja a rendszer energiagörbéit. A modell elrendezése és paraméterei teljesen megegyeznek a 4.10. ábra által ábrázolt modellel. Egyedül a rezonátor magassága változott meg, amivel a hangolást lehet elérni. A két ábra közötti különbség nagyon jól szemlélteti azt, hogy behangolt esetben sokkal gyorsabban tudja a hanglap leadni az energiáját, tehát sokkal gyorsabban tudja a hangot lesugározni. Ezt a kék és a lila görbék meredeksége mutatja. Emellett az is lényeges számunkra, hogy a lila görbe, azaz az akusztikai veszteség jóval magasabb, tehát jóval nagyobb a lesugárzott hangenergia, mint a behangolatlan esetben. A 4.12. ábrán látható időfüggvényeken és spektrogramokon is megfigyelhető, hogy a rezonátor behangolása magasabb lesugárzott hangnyomásszintet és gyorsabb lecsengést is eredményez. Utóbbi főleg az alaphangfrekvenciához tartozó, 350 Hz-nél megfigyelhető spektrumvonalon látható. Mindkét jellemző kívánatos a hangszeres játék esetén.



4.12. ábra. Hangolatlan (bal) és behangolt (jobb) rezonátor által keltett hangnyomásszint időfüggvénye (felül) és spektrogramja (alul)

5. fejezet

Optimalizálás

Az eddigi részekben a hangszermodell felépítését és annak validációját mutattam be, ahol a hangszerméretek adottak voltak. A hanglapok esetében a sajátfrekvenciák (bizonyos határokon belüli) hangolását az anyagparaméterek változtatásával értem el, így küszöbölve ki az ismeretlen anyagi jellemzőkből adódó bizonytalanságokat.

Ebben a fejezetben az eddigi helyzet megfordul. Adott anyagparaméterek mellett vizsgálom, hogyan érdemes a hanglapok bevágását kialakítani ahhoz, hogy az első három vertikális módusfrekvencia elérje a kívánt $1 : 4 : 10$ arányt, illetve a hanglap alapfrekvenciája is a várt érték legyen. Mivel a sajátfrekvenciák bonyolult kapcsolatot mutatnak a hanglap alakjával, ezért a megoldandó probléma nemtriviális. A fejezet további részeiben az optimalizáláshoz használható módszereket először egydimenzióban ismertetem, majd azokat kiterjesztem háromdimenzióba.

5.1. Optimalizálás egydimenzióban

Az optimalizálási technikák fejlesztését, kipróbálását célszerű egydimenzós modellekkel, módszerekkel elkezdni, és onnan haladni tovább a teljes háromdimenzós megvalósításig. Egydimenzióban az egyszerűséget az adja, hogy csak vertikális módusok vannak, így azok osztályozásával nem kell foglalkozni. Ezen kívül az egydimenziós modellel a sajátfrekvenciák meghatározása is jóval gyorsabb a háromdimenziós modellhez képest. Ez az időkülönbség jelentős: amíg egydimenzióban egyszerre az összes hanglap optimális kivágását ki lehet számítani néhány percen belül, addig háromdimenzióban egy hanglap szimulálása is eltarthat órákon keresztül. Így valóban érdemes egydimenzióban elvégezni a módszerek tesztelését és validálását.

Egydimenzióban a számítás menetében is van némi különbség a háromdimenzióshoz képest. Itt az egydimenziós rúd hajlító differenciálegyenletének megoldása a feladat a hanglap sajátfrekvenciáinak kiszámításához. Az eddigi másodrendű egyenletektől eltérően térben negyedrendű differenciálegyenlet megoldását keressük. Mivel a hanglap vastagsága a hossza mentén jelentősen változik, csak közelítő, numerikus módszerrel határozhatjuk meg a sajátfrekvenciákat. Az eddigi fejezetekhez hasonló-

an itt is a végeelem-módszert alkalmaztam. A megoldásához használtos alakfüggvények ebben az esetben nem lineárisok, hanem harmadfokú polinomok, így minden csomópontához egy elmozdulás és egy elfordulás szabadságfok is tartozik. Habár ez az ára annak, hogy két irányt elhagyhatunk, ennek ellenére a megoldás mégsem sokkal bonyolultabb, és időben is jóval kedvezőbb.

Ismert optimalizálási módszer a perturbáció módszer is. Ezzel meg lehet vizsgálni például, hogy szabályos alakú rúd esetén egységnyi bevágásra hogyan változnak annak módusai. Ez a módszer analitikus számításon alapul, így szabálytalan alakú rúd vagy ismételt bevágások esetén nem alkalmazható. Így a hanglapok optimalizálására mindenképpen numerikus módszereket kell alkalmazni.

5.2. Az iteratív módszer

Az iteratív módszer kiindulási alapja az alap hanglap, amiknek a szimulációját az előző fejezetekben leírtak szerint végeztem el. A módszer alkalmazása során a hanglap kivágását úgy próbáltam változtatni, hogy annak sajátfrekvenciái a megfelelő arányban legyenek, az adott alapfrekvencia mellett. A kivágás módosításához olyan szinuszalakokat használtam, ahol az argumentumban a $\pi x/L$ -nek páratlan számú többszöröse szerepelnek, így a hanglap hosszirányát tekintve a kivágás mindig szimmetrikus maradt. A különféle módosító szinuszfüggvények darabszámának megválasztásakor egyedül arra kell figyelni, hogy számukat legalább akkorára kell választani, mint a behangolandó frekvenciák száma. Például ha az 1 : 4 : 10 arány elérése a cél (tehát 3 frekvencia), akkor leglább 3 módosító szinuszfüggvényt kell alkalmazni. A feladatot ezentúl tehát ezen szinuszok optimális arányának megtalálása jelenti.

A szinuszfüggvények alkalmazása esetén a végső kivágás kialakításánál adódhat, hogy a hanglapot vékonyítani, de akár vastagítani is szükséges lenne az optimum eléréhez. A vékonyítást egyértelműen bereszeléssel meg lehet oldani, de felmerülhet a kérdés, hogy a vastagítás hogyan oldható meg. Itt természetesen nem az alap hanglapból kell kiindulni, hanem egy olyan vastagságú rúdból, amelynek magassága megegyezik az optimális hanglap vastagságával. Ekkor már minden kivágás kialakítható az előbb említett bereszeléssel.

Az iteratív módszer első lépése az adott hanglap módusfrekvenciáinak (ω_{act}) kiszámítása. Ezután az egységnyi szinusz alakok által külön-külön kialakított új kivágásokkal új sajátfrekvenciák (ω_{mod}) adódnak. Ezek meghatározásakor fontos, hogy a hanglap alakját az aktuális alakhoz képest csak kevéssé változtassuk meg, annak érdekében, hogy a sajátfrekvenciák változása az alakváltozás mértékével jó közelítéssel lineárisnak legyen tekinthető. A kettő különbségéből érzékenységet (\mathbf{S}) kapunk, ami megmutatja, hogy egységnyi kivágás változtatás esetén mekkora elhanglódást

kapunk, tehát az \mathbf{S} értéke egyetlen szinusz esetén:

$$\mathbf{S}_i = \frac{\omega_{\text{mod}} - \omega_{\text{act}}}{\varepsilon_{\text{mod}}}, \quad (5.1)$$

ahol ε_{mod} az adott bevágáshoz tartozó magasság. Mivel minden módosító szinuszfüggvény maximális amplitúdója azonos, így ε_{mod} egy skalár, amely bármely i esetén ugyanazt az értéket veszi fel. Az \mathbf{S} mátrix mellett érdemes alkalmazni a \mathbf{H} mátrixot is, ami az egyes módosító szinusz alakokat tartalmazza. A következő lépés a célfrekvenciától való ($\Delta\omega$) eltérés meghatározása:

$$\Delta\omega = \omega_{\text{act}} - \omega_{\text{tg}}, \quad (5.2)$$

ahol ω_{tg} az elérni kívánt frekvenciákat tartalmazó vektor. Ezek után a szükséges súlyok az (5.3) szerinti egyenletrendszer megoldása után adódnak.

$$\mathbf{S}\alpha_{\text{opt}} = \Delta\omega \quad (5.3)$$

Végezetül az új hanglapkivágás egyszerűen számítható:

$$\mathbf{h}_{\text{new}} = \mathbf{h}_{\text{orig}} + \mathbf{H}\varepsilon_{\text{mod}}\alpha_{\text{opt}}, \quad (5.4)$$

ahol \mathbf{h}_{new} az új, míg \mathbf{h}_{orig} az iteráció elején meglévő hanglap kivágását tartalmazó vektor. Mivel a kivágás növelésével az okozott elhangolódás mértéke nem lineárisan változik, így az (5.4) egyenletben az α_{opt} vektort érdemes csak egy egynél kisebb súllyal figyelembe venni, tehát nem a tényleges becsült hanglapkivágást érdemes kialakítani, hanem például csak a bevágások felét megejteni. Így túl gyorsan változó, a lináristól nagymértékben eltérő érzékenységgfüggvény esetén is elkerülhető a túllövés, azaz a hanglap várt frekvenciára behangolása helyett, annak túlságos elhangolása.

Miután kész az új kivágás, az iteráció ismételhető, kezdve az új hanglap új sajátfrekvenciájának számításával. Az algoritmust akkor érdemes leállítani, amikor $\Delta\omega$ maximuma egy bizonyos értéknél, például 1 Hz-nél kisebb. Leállási kritériumnak az abszolút frekvenciaeltérés helyett relatív frekvenciahibákat is megadhatunk. Amennyiben az algoritmus egy adott esetben nem konvergálna a jó megoldáshoz, úgy a maximális iterációs szám túllépése jelzi a hibás megoldást. A tesztek során azonban az utóbbi eset nem fordult elő.

5.3. Optimalizálás kész függvények segítségével

5.3.1. `fminsearch()`

Az `fminsearch()` a Matlab egy beépített függvénye, ami optimalizálásra is használható egyenletrendszerek iteratív megoldása mellett. A függvénynek két paramétere

van. Az egyik egy egyparaméteres költségfüggvény, melyet az $fminsearch()$ minimalizálni igyekszik. Ennek fontos kritériuma, hogy egy pozitív skalár értéket adjon ki végül, mely 0-hoz tart, ha a megoldás az optimumhoz közelít. A másik paraméter a költségfüggvény kezdőparamétere, ahonnan indul a minimalizálás. Esetemben a költségfüggvény ezen paramétere az α súlyvektor, ami alapján a függvény visszaadja, hogy mennyi az adott szinusz súlyokkal létrehozott kivágású hanglap sajátfrekvenciáinak a célfrekvenciáktól való eltérések négyzetösszege. Az $fminsearch()$ visszatérési értéke azok az optimális súlyok (α_{opt}), melyek segítségével elérhetőek a kívánt sajátfrekvenciák.

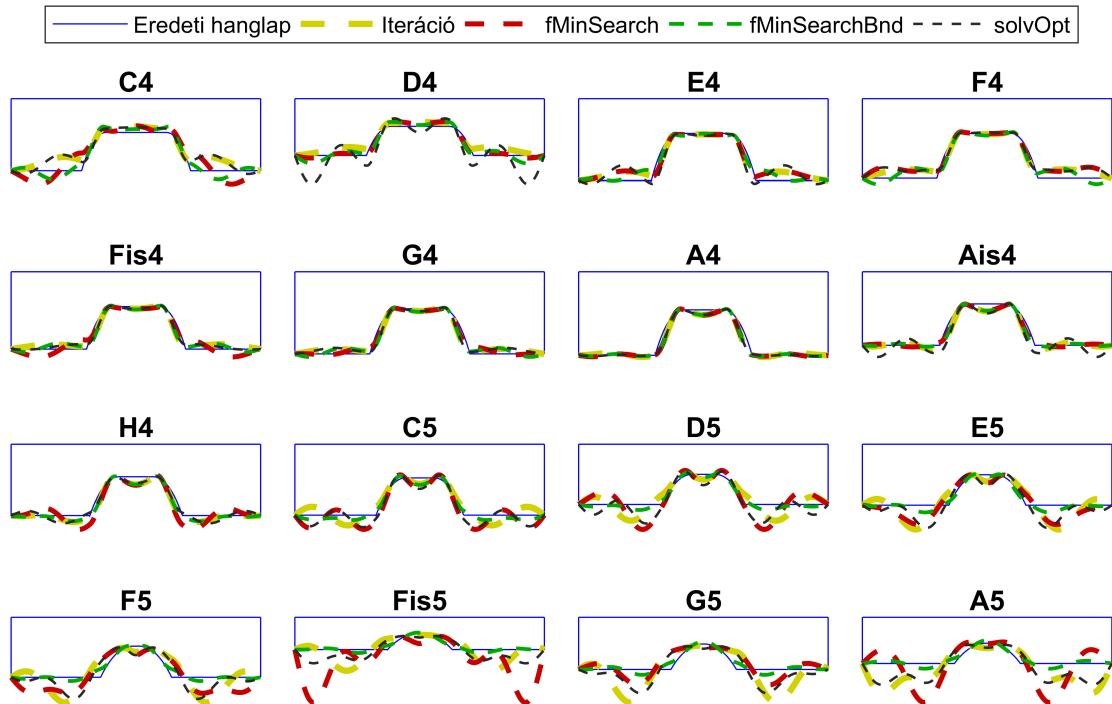
Az $fminsearchbnd()$ ezt fejleszti tovább azzal, hogy megadható a minimalizálandó paraméter alsó és felső határa. Ennek egyetlen hátránya, hogy ezt egy-egy vektorként lehet megadni, tehát esetemben a súlyoknak előre meg kell határozni a maximumát és minimumát. Ezt természetesen *worst case* esetre érdemes megadni, ekkor viszont a vektorok külön-külön ugyanazokat az értékeket tartalmazzák. Az optimális megoldás esetén persze nem minden súly fogja elérni a határt, így egyes súlyok túl-, míg mások alulkorlátozottak. Ezt a problémát küszöböli ki a $solvopt()$ függvény, amely jobban kihasználható határkezelési megoldást ad.

5.3.2. $solvopt()$

A másik előre megírt függvény a $solvopt()$, ami leglább három paramétert vár. Ezek közül kettő a már ismert költségfüggvény, illetve a kezdőparaméter, de ezek mellett megjelenik egy harmadik is, ami a $fminsearchbnd()$ határait hivatott kiváltani. Ezen paraméter is egy függvény, amely azt mondja meg, hogy az optimalizálandó paraméter aktuális értékei teljesítik-e az előírt feltételeket (jelen esetben határokat). A kényszerfüggvény visszatérési értéke 0, ha a kényszerek teljesülnek, illetve 1, ha nem. Alkalmazásomban a kényszerfüggvény a súlyok alapján meghatározza a hanglap aktuális vastagságait és ha az nem túl vastag/vékony, akkor 0-val tér vissza. Ebben az esetben nem kell a *worst case* esettel foglalkozni, itt ténylegesen az aktuális értékek alapján kerülnek elfogadásra vagy elutasításra a súlyok. A $solvopt()$ -nak még opcionális paraméterei a költség- és kényszerfüggvények deriváltjai, ezek hiányában becsli azokat a $apprgrdn()$ függvény segítségével.

5.4. Egydimenziós optimalizálás eredmények

Az egydimenziós, optimális hanglapkivágásokat az 5.1. ábra szemlélteti. Az eredeti hanglapok természetesen ugyanolyan magasságúak minden esetben, az ábrák a kivágások alakjának könnyebb megfigyelésének érdekében, azok minimumához vannak skálázva. Az ábrán megfigyelhető mind a négy ismertetett módszer által behangolt modell. Egyből észrevehető, hogy a hanglapok többségénél nem ugyanazt a megoldást kaptuk az egyes módszerekkel. Ez azért lehetséges, mert öt különböző szinusz



5.1. ábra. Egydimenzóban optimalizált hanglapkivágások

alakokkal próbáltam az optimalizálást elvégezni, de csak három frekvencia hangolásával. Így összesen $\binom{5}{3} = 10$ megoldás létezik a problémára, tehát nem szükségszerű, hogy a mind a négy alkalommal ugyanaz a megoldás adódjon.

Az ábrán az is látszódik, hogy azon hanglapoknál ahol már az eredeti kivágással is nagyjából jók voltak a sajátfrekvenciák (F4-A4), a négy módszer körülbelül ugyanazt a megoldást adta eredményül. Az eltérés azon esetekben jelentős, ahol sokat kellett hangolni (F5-A5), ezek a hanglapok jelentették a legnagyobb kihívást a módszereinknek.

Az 5.1. ábra önmagában sokat nem árul el a szimuláció sikerességéről, mert konkrét számított frekvencia értékeket nem mutat. Ezzel szemben az 5.1. táblázat megmutatja mennyire számoltak helyesen az algoritmusok. A táblázatban a kiszámított sajátfrekvenciáknak a célfrekvenciáktól való eltéréseinek maximuma látható százalékos arányban. Tehát például a D4 hanglap *fminsearch()* módszer esetében, a célfrekvenciák 293 Hz, 1172 Hz, 2930 Hz, a módszer által számított frekvenciák rendre 288.6 Hz, 1147.7 Hz, 3168.6 Hz. A legnagyobb százalékos eltérés a harmadik vertikális módus esetén tapasztalható, aminek értéke éppen 8.14%. A táblázatból látszik, hogy az itertív módszernek, a többivel ellentétben, mindig sikerült az elvárt frekvenciához konvergálnia. A maradék három algoritmus valamikor célbaért, valamikor nem.

Az *fminsearch()* esetében 12 hanglapnál sikerült 0%-os hibát elérni, illetve a C5-nél is minimális ez az érték. Eltérés csupán a D4-nél, illetve a két legmagasabb hanglapnál jelenik meg, ahol a legnagyobb hangolásra van szükség. Ezek magyarázhatóak azzal, hogy a módszer nulla kezdeti súllyal indítva lokális minimumot

Hang- lap	Iteráció [%]	fMinS [%]	fMinSBnd [%]	solvOpt [%]
C4	0	0	9.36	0
D4	0	8.14	8.14	11.39
E4	0	0	0	0.01
F4	0	0	1.08	0.91
Fis4	0	0	0	0.23
G4	0	0	0	0.04
A4	0	0	0	0.02
Ais4	0	0	0	0
H4	0	0	0	0.01
C5	0	0.87	0.73	0
D5	0	0	4.47	0.09
E5	0	0	9.12	0.01
F5	0	0	11.1	0
Fis5	0	0	15.58	1.11
G5	0	10.27	15.35	0
A5	0	3.55	17.97	0.03

5.1. táblázat. Numerikus módszerekkel egydimenzióban számított sajátfrekvenciák legnagyobb százalékos eltérése a célfrekvenciáktól

talál, amiből nem tud kimozdulni. Abban az esetben, ha a nulla kezdeti α_0 helyett van egy jó kezdőtipp, például az iterációs módszer első lépésének eredménye, és az *fminsearch()* innen indul, akkor ez az algoritmus is megtalálja a helyes frekvenciákat.

Az *fminsearchbnd()* esetében már magasabb a hibaarány. A súlyok határait az 5.3.1. részben említett *worst case* esettel határoztam meg. Öt módosító függvény esetén a függvény maximális amplitúdója akkora lehet, hogy ha minden módosítás maximális amplitúdójú, összeadódva akkor se csökkenjen a hanglap vastagsága zérusra egyetlen pontban sem. Tehát a módosító függvény maximális értékének súlyozott értéke kisebb kell legyen, mint a hanglap legvékonyabb részének ötöde:

$$\max(\mathbf{H}_i)\alpha_i < \frac{h_{\min}}{n_{\text{sins}}}, \quad (5.5)$$

ahol h_{\min} a hanglap minimális magassága és n_{sins} az alkalmazandó módosító szinuszfüggvények száma, esetemben 5. Az (5.5) összefüggésből következik, hogy a maximum korlátot beállító α_{\max} vektor értékei megegyeznek, míg a minimum korlát ennek ellentéte ($\alpha_{\min} = -\alpha_{\max}$). Ez tehát inkább tovább korlátozza az eddig sem hibátlanul működő *fminsearch()* függvényt, aminek a még több eltérő sajátfrekvencia köszönhető.

Habár az 5.1. táblázatra rápillantva elsőre a *solvOpt()* tűnik a legmegbízhatatlanabb függvénynek, mégis átlagosan, az iterációs megoldás után, ez dolgozik arányosan a legkevesebb hibával. Csupán a D4 hanglap esetében ad jelentősen eltérő sajátfrekvenciákat, az összes többi esetben a hiba maximum 1% körül, de inkább jóval azon belül van. Fontos megjegyezni, hogy külön megadható kényszerfüggvényének köszönhetően sokkal szabadabban megfogalmazhatóak a kívánt határok. Érdekes-

ség, hogy az *fminsearch()*-ön kifogó két legmagasabb hanglap esetében a *solvOpt()* a várt frekvenciákhoz konvergál.

Összességében tehát elmondható, hogy az itertív módszer nagyon jól bevált egydimenzióban, hibát sem vétett és a gyorsaságot tekintve is ez bizonyult a legkedvezőbbnek. Az *fminsearch()* és a *solvOpt()* nagyjából hasonlóan megbízhatóak, bizonyos hanglapok esetén mindkét módszer hibázott. A *solvOpt()* előnye természetesen a tetszőleges függvénnyel leírt korlátok megadásának lehetősége, aminek ezzel számítási ideje ugyan megnő, de így több lehetőséget kínál. Az *fminsearchbnd()* korlátkezelését ezzel szemben csak nagy pazarlások árán lehet használni, a szimulációk alatt ő bizonyult a legkevésbé alkalmazhatónak a hanglapok optimalizációja során.

5.5. A módszerek kiterjesztése háromdimenzióba

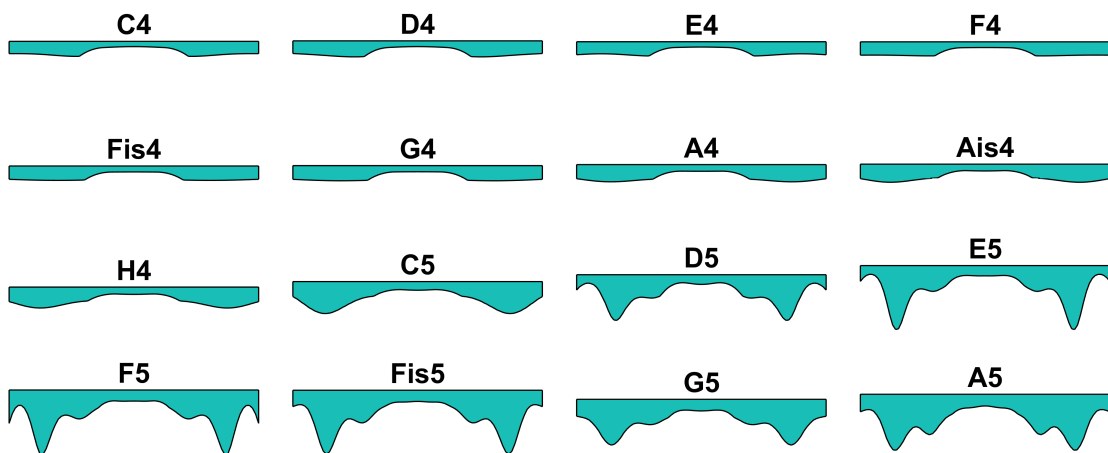
A háromdimenzióba való áttéréshez sok változtatást nem kell eszközölni. Az iteratív módszer gondolatmenete megmarad, csupán két részt kell cserélni. Egyrészt a sajátfrekvenciák kiszámításához megoldandó egyenlet cserélődik vissza az eddigi fejezetekben leírtakra, másrészt a kivágások kialakítása az, ami még nem teljesen egyértelmű. Szimulációmban háromdimenzióban is megtartottam a szinuszos függvényeket, kivetítve azokat a hanglapok szélessége mentén. Így olyan hanglapok keletkeztek, amelyeknek kivágása az y irányban, vagyis a hanglap szélessége mentén, nem változik. Ezekre a hanglapokra, ha oldalról ránézünk olyan, mintha az egydimenziós változatukat vizsgálnánk.

Az áttérésben a nehézséget az okozta, hogy háromdimenzióban megjelennek a horizontális és torziós módusok is. Ekkor nem csak egyszerűen az első három sajátfrekvenciának a hangolását kell elvégezni mert azok közül nem biztos, hogy mindhez vertikális módusok tartoznak. Így a kiszámolt módusokat először osztályozni kellett, majd ezek közül az első három vertikális módus sajátfrekvenciáját kellett tekinteni a behangoláskor.

Ezzel a két kisebb változtatással végeztem el a hanglapok háromdimenziós optimalizálását az iteratív módszer segítségével. Mivel már ennek a módszernek is, amely egydimenzióban a leggyorsabb volt, jelentősen megnőtt a számítási ideje az egydimenzióhoz képest, illetve csupán ezen módszerrel is sikerült optimális hanglapokat előállítani a frekvenciákat tekintve, így a további módszerekkel háromdimenzióban nem vizsgáltam a hanglapokat.

5.6. Háromdimenziós optimalizálás eredmények

A háromdimenziós hanglapoptimalizáció eredményét, azaz az 1 : 4 : 10 sajátfrekvencia arányokkal rendező hanglapmodelleket, mutatja az 5.2. ábra. Minden hanglap esetében teljesül, hogy az első három vertikális módus frekvenciája maximum 1 Hz távolságra van az adott célfrekvenciától.



5.2. ábra. Háromdimenzióban optimalizált hanglapkivágások

A C4-től kezdve egészen a C5-ös hanglapig elég volt 3 módosító szinusz alak, a D5-től kezdve viszont ez már nem bizonyult elegendőnek. D5-től A5-ig már csak 9 szinusz volt elegendő a behangoláshoz. Ekkor viszont az (5.3) egy alulhatározott egyenletté válik, aminek több megoldása is létezik. Így az algoritmus ezeknél a hanglapoknál annyival módosult, hogy minden egyes módosító szinuszfüggvény kombináció esetén ki kellett számítani az adott változtatással elérhető sajátfrekvenciákat, majd ezek közül kellett az optimálisakat kiválasztani. Mivel minden iterációban más-más szinuszkombináció bizonyult optimálisnak a célfrekvenciákhoz való közelítés tekintetében, így minden iterációban végig kellett nézni az összes kombinációt.

Egyetlen hanglap volt, az F5, amit még több szinuszfüggvény alkalmazásával sem sikerült behangolni. Ezen hanglap esetén egy újabb módosítófüggvényt vezettem be, az egységnyi, konstans függvényt. Ez a módosítás a hanglap megvastagításának felel meg a hossza mentén mindenhol ugyanakkora nagyságban (ahhoz, hogy ezt csupán szinusz függvényekkel ugyanezt a hatást el lehessen érni, azokból végtelen sokra lenne szükség). Ezzel a megoldással már az F5 hanglap is behangolhatóvá vált, viszont az 5.2. ábrán látható módon a hanglap két szélén látható, hogy vastagodott az eredeti magasságához képest a többi hanglappal ellentétben.

Az 5.2. ábrán érdemes még megfigyelni azt is, hogy a D5 hanglaptól kezdve egészen furcsa alakú optimális modellek adódtak. A hanglapok elején és végén kialakult nagyobb magasság annak köszönhető, hogy ott az alapl módusnak csomópontja van, míg a második és harmadik vertikális módusnak nem. Ezzel a 4-es és 10-es felharmónikus arányok alakíthatóak, míg ugyanakkor az alapfrekvencia közel változatlan marad. Ezen hanglapoknál azért van erre szükség, mert a kiinduló állapotban a vertikális módusok aránya nagyon távol van az $1 : 4 : 10$ -tól, ahogy ezt a 4.2. ábrán láthattuk. Ez tehát az oka annak is, hogy a nagyobb frekvenciás hanglapok esetén nem volt elegendő csupán az első három módosító szinuszfüggvény, ugyanis azokkal

Hanglap	Maximális csökkennés [%]	Maximális növelés [%]	Átlagos változás [%]
C4	-8.34	22.03	7.64
D4	-6.59	26.38	11.89
E4	-7.27	9.79	0.70
F4	-2.02	5.36	1.68
Fis4	-0.72	8.26	4.27
G4	-0.61	10.42	5.46
A4	-0.00	22.09	9.42
Ais4	-5.07	25.25	8.05
H4	-4.85	44.20	15.08
C5	-2.61	114.05	40.86
D5	-45.53	196.57	42.53
E5	-44.60	304.08	62.03
F5	-6.62	290.91	72.54
Fis5	-12.11	289.53	75.66
G5	-6.68	170.10	51.07
A5	-12.51	218.30	70.83

5.2. táblázat. Hanglapvastagság változások mértéke az optimalizálás során

nem lehet a hanglap szélén túl nagy változtatást elérni, úgy hogy annak a többi része ne változzon még nagyobb mértékben.

Érdekes lehet megfigyelni, hogy az optimalizálás során mennyire változott meg a hanglapok vastagsága. Mivel a hanglapok teteje változatlan maradt, így az új és eredeti modellek magasságainak arányai jól leírják ezen változást. Az 5.2. táblázat mutatja meg, hogy mekkora volt hanglaponként a maximális vékonyítás, illetve vastagítás, továbbá hogy átlagosan mennyire változott meg azok vastagsága a kiindulási állapothoz képest. Látszik, hogy az összes hanglapon kellett valamennyit változtatni, de az is megfigyelhető, hogy az alsó oktávon nagyjából 10% alatt marad ez a változás (E4 esetén csupán 0.7%), míg a felső oktávon 70% fölé is kúszik. Ez annak köszönhető, hogy leginkább a harmadik vertikális módus sajátfrekvenciáját kellett növelni, ami kezdetben a felső oktáv esetében volt túlságosan messze az elvárttól. Szembetűnőek még a nagyfrekvenciás hanglapok növelésének számadatai is. Az E5 esetében például bizonyos részeken több, mint négyszeresére nő a lap vastagsága az optimum elérése érdekében.

6. fejezet

Összefoglalás

Dolgozatomban egy xilofon modellezéséhez szükséges részegységek elméleti hátterét és szimulációjának módját tárgyaltam. Foglalkoztam a hanglap esetén alkalmazható mechanikai és a rezonátornál használható akusztikai végeselem-módszerrel. Vizsgáltam a hangszer elemeit külön-külön, illetve az összekapcsolt, teljes, csatolt rendszert egyben is. A Gmsh hálógeneráló szoftver és saját Matlab szkriptek segítségével alkotam egy modellt, amivel tetszőleges elrendezésű, általános xilofon rezgésakusztikai viselkedése vizsgálható valóság-hű geometriákon.

Szimulációm segítségével megfigyelhetőek a hanglapok sajátfrekvenciái és módusalakjai, amelyek az anyagparaméterek megfelelő megválasztásával, vagy a hanglótáblát geometriájának alakításával finomhangolhatóak. Vizsgáltam a rezonátorok frekvenciagörbéjét, illetve azok változását a faliszigetelés veszteség hatására. Megállapítottam, hogy az általam vizsgált geometria esetén a faliszigetelés hatása másodlagos. Foglalkoztam azzal az esettel, amikor két hanglap mint akadály helyezkedik el a rezonátor fölött, majd kitértem arra is, milyen hatással van a rezonátor a hanglap hangszórására. Megmutattam, hogy szimulációimban, a várakozásoknak megfelelően, a rezonátor megszűnteti az akusztikai rövidzár jelenségét és a rezonanciafrekvencia környékén jelentős lesugárzási nyereséget biztosít. A szimulációk eredményeit már meglévő mérési adatokkal hasonlítottam össze. A tapasztalt jó egyezés bizonyítja modellem helyes működését.

Ezt követően a kalapácsütés szimulációjára tértem át, amit időlépéses módszerrel oldottam meg. A csatolt rendszer számításánál a Newmark-sémát alkalmaztam a kalapács hanglap kölcsönhatás alatt, majd a gerjesztés befejeztével a magára hagyott hanglap által lesugárzott hang modális szuperpozícióval adódott. Végül a megfigyelési pontokban ismertté vált a hangnyomás, ami a virtuális xilofon prototípus által megszólaltatott, meghallgatható lesugárzott hang.

Dolgozatom következő egyes paraméterek változtatásának hatását vizsgáltam. Milyen hatása van a fellépő erőre a kalapács kezdősebességének, illetve hogyan reagálnak a módusok, különböző pozíciójú gerjesztésekre. Legvégül foglalkoztam a rendszer energiagörbéjével, és azok megváltozásával a rezonátor behangolásának hatására. Megmutattam, hogy az időlépéses séma alkalmazásával a rendszer összes

energiája állandó marad, ami a kiválasztott módszer helyes működését és megvalósítását igazolja. Fontos eredménynek tartom, hogy modellem jól reprodukálja a rezonátor viselkedését, a jól behangolt rezonátor a lesugárzott hangnyomásszintet jelentősen növeli, ugyanakkor a lecsengési időt számottevően csökkenti. Ez a gyakorlatban is megfigyelhető hatás csak a hanglap és rezonátor közötti kétirányú kölcsönhatás figyelembe vételével modellezhető. Tudomásom szerint a korábbi modellek csak egyirányú hatással számoltak.

Végül foglalkoztam a hanglapok optimalizációjával is. Több módszerrel alakítottam ki tökéletes frekvenciaarányú hanglapokat egydimenzióban, majd az iteratív módszert kiterjesztve, elvégeztem ugyanezt háromdimenzióban is. Habár a szimulált hanglapok frekvenciái a várt értékűek, azok változó vastagsága miatt további kihívás lehet azokhoz optimális rezonátor tervezése is.

Az eredményeim és a validációk alapján bebizonyosodott, hogy az általam felállított modell helyesen működik. Szimulációm felhasználható valódi hangszerek tervezése során, segítségével készíthető virtuális prototípus a hangszerről, ami segíthet az egyes paraméterek finomhangolásában a xilofon gyártási folyamatainak előkészítése során. A modell alkalmas a fizikai alapú hangszintézisre is.

Irodalomjegyzék

- [1] R. J. Astley–J.-P. Coyette–L. Cremers: Three-dimensional wave-envelope elements of variable order for acoustic radiation and scattering. part ii. formulation in the time domain. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 103. évf. (1998) 1. sz., 64–72. p. URL <https://doi.org/10.1121/1.421107>.
- [2] R. J. Astley–J.-P. Macaulay–J.-P. Coyette–L. Cremers: Three-dimensional wave-envelope elements of variable order for acoustic radiation and scattering. part i. formulation in the frequency domain. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 103. évf. (1998) 1. sz., 49–63. p. URL <https://doi.org/10.1121/1.421106>.
- [3] Douglas Beaton–Gary Scavone: Measurement based comparison of marimba bar modal behaviour. *ISMA2019 – International Symposium on Music Acoustics, Detmold, Germany*, 1. évf. (2019), 72–77. p.
- [4] Douglas Beaton–Gary Scavone: Optimization of marimba bar geometry by 3d finite element analysis. *ISMA2019 – International Symposium on Music Acoustics, Detmold, Germany*, 1. évf. (2019), 402–407. p.
- [5] Ingolf Bork: Measuring the acoustical properties of mallets. *Applied Acoustics*, 30. évf. (1990) 2. sz., 207 – 218. p. ISSN 0003-682X. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003682X9090044U>.
- [6] Ingolf Bork: Practical tuning of xylophone bars and resonators. *Applied Acoustics*, 46. évf. (1995) 1. sz., 103 – 127. p. ISSN 0003-682X. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003682X9593953F>. Musical Instrument Acoustics.
- [7] R. Bossart–N. Joly–M. Bruneau: Hybrid numerical and analytical solutions for acoustic boundary problems in thermo-viscous fluids. *Journal of Sound and Vibration*, 263. évf. (2003) 1. sz., 69 – 84. p. ISSN 0022-460X. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X02010982>.
- [8] Antoine Chaigne–Vincent Doutaut: Numerical simulations of xylophones. i. time-domain modeling of the vibrating bars. *The Journal of the Acoustical*

- Society of America*, 101. évf. (1997) 1. sz., 539–557. p.
 URL <https://doi.org/10.1121/1.418117>.
- [9] Vincent Doutaut – Denis Matignon – Antoine Chaigne: Numerical simulations of xylophones. ii. time-domain modeling of the resonator and of the radiated sound pressure. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 104. évf. (1998) 3. sz., 1633–1647. p. URL <https://doi.org/10.1121/1.424376>.
- [10] Péter Fiala: A hangszerek fizikája - jegyzet. URL <http://last.hit.bme.hu/sites/default/files/documents/hangfiz.pdf>. Utolsó hozzáférés: 2019. október 27.
- [11] Péter Fiala: Móduselemzés - mérési leírás.
 URL <http://last.hit.bme.hu/sites/default/files/documents/modus.pdf>. Utolsó hozzáférés: 2019. október 27.
- [12] Neville H. Fletcher – Thomas D. Rossing: *The Physics of Musical Instruments*. 19 fejezet. 1998, 623–648. p.
 URL <https://www.springer.com/gp/book/9780387983745>.
- [13] Christophe Geuzaine – Jean-François Remacle: Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79. évf. (2009) 11. sz., 1309–1331. p.
 URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.2579>.
- [14] Gmsh. URL <http://gmsh.info/>. Utolsó hozzáférés: 2019. október 27.
- [15] Fridtjov Irgens: *Continuum Mechanics*. 2008, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. URL <https://www.springer.com/gp/book/9783540742975>.
- [16] D. E. Kretschmann: *Forest Products Laboratory. Wood Handbook: Wood as an Engineering Material. Chapter 5: Mechanical properties of wood*. 5 fejezet. 2010. 01, 5–1 – 5–46. p.
 URL https://www.fpl.fs.fed.us/documnts/fplgtr/fpl_gtr190.pdf.
- [17] Antoine Lefebvre – Gary P. Scavone – Jean Kergomard: External tonehole interactions in woodwind instruments. *Acta Acustica united with Acustica*, 99. évf. (2013) 6. sz., 975–985. p. ISSN 1610-1928.
 URL <https://www.ingentaconnect.com/content/dav/aaua/2013/00000099/00000006/art00015>.
- [18] Steffen Marburg – Bodo Nolte: *Computational acoustics of noise propagation in fluids – Finite and boundary element methods. Part II FEM: External Problems*. 2008, 145–251. p. URL www.springer.com/gp/book/9783540774471.
- [19] N. M. Newmark: A method of computation for structural dynamics. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85. évf. (1959), 67–94. p.

[20] Sonor orff skx 100 xilofono soprano. URL <https://www.bax-shop.it/percussioni-melodiche/sonor-orff-skx-100-xilofono-soprano>. Utolsó hozzáférés: 2019. október 27.