

HALLGATÓI NYILATKOZAT

Alulírott Olteán Bence, szigorló hallgató kijelentem, hogy ezt a szakdolgozatot/diplomatervet meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, csak a megadott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Hozzájárulok, hogy a jelen munkám alapadatait (szerző(k), cím, angol és magyar nyelvű tartalmi kivonat, készítés éve, konzulens(ek) neve) a BME VIK nyilvánosan hozzáférhető elektronikus formában, a munka teljes szövegét pedig az egyetem belső hálózatán keresztül (vagy autentikált felhasználók számára) közzétegye. Kijelentem, hogy a benyújtott munka és annak elektronikus verziója megegyezik. Dékáni engedéllyel titkosított diplomatervek esetén a dolgozat szövege csak 3 év eltelte után válik hozzáférhetővé.

Kelt: Budapest, 2011. 12. 09.

.....
Olteán Bence



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

**Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar**

SZAKDOLGOZAT

Akusztikai PML módszer

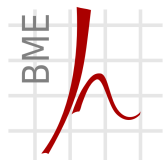
Készítette:

Olteán Bence

IV. Villamosmérnök Bsc

Konzulens:

Rucz Péter



Híradástechnikai Tanszék



Akusztikai Laboratórium

Budapest, 2011.

Kivonat

Akusztikai térszámítási problémák számítógépes megoldására igen gyakran alkalmazott technika a véges-elem módszer. A végeselem módszer (FEM - Finite Element Method) véges tartományon felírt parciális differenciálegyenletek és a hozzájuk tartozó peremfeltételek általános numerikus megoldási módja, amely önmagában azonban csak zárt térrészek modellezésére használható. Számos akusztikai probléma megoldásánál szükség van nyílt téri hullámterjedés szimulációjára, ezért a nyílt terekre való kiterjesztésnek többféle módját is kifejlesztették. Mivel a végeselem számítások elvégzéséhez véges tartományra van szükség, ezért az egyik lehetséges megoldás a végtelen tartomány csonkítása, és a fizikai tartomány körülvétele egy mesterséges határfelülettel. A mesterséges peremhez egy vékony réteget illesztünk, amelyen belül az egyenletek úgy módosulnak, hogy a réteg elnyelje a kifelé haladó hullámokat.

Ez a dolgozat az egyik lehetséges megoldást mutatja be, a PML (Perfectly Matched Layer – tökéletesen illesztett réteg)¹ megvalósítását MATLAB környezetben. A PML-ben a hullámegyenlet módosított, anizotrop alakját állítjuk fel, amely biztosítja a rétegben terjedő hullámok fokozatos csillapodását. A fizikai tartományból kifelé haladó hullám reflexió nélkül érkezik a rétegbe, majd fokozatosan csillapodik. A réteg külső határán reflektálódik és tovább csillapodva halad vissza, majd mire újra a fizikai tartomány határához érkezik, a csillapított hullám már túl gyenge ahhoz, hogy bármilyen hibát okozzon.

A szakdolgozat keretében bemutatom az egy-, két- és háromdimenziós PML analitikus és diszkretizált alakjainak meghatározását, majd implementálását és tesztelését MATLAB környezetben. A megvalósított PML-t két alternatív megoldási módszerrel is összehasonlítom, mind a számítási sebesség, mind a közelítés hibája szempontjából. A fent alkalmazott és a vonatkozó irodalomban is bemutatásra kerülő formula csak egyszerű felületű tartományok esetén használható könnyen, ezért kidolgoztam egy olyan megoldást, amely a PML globális helykoordinátáktól függő csillapításfüggvényei helyett egyetlen lokális csillapításoperátort használ. A transzformáció segítségével tetszőleges alakú felület köré vont réteg könnyen kezelhető. A PML globális és lokális megvalósítását is beépíttem a Híradástechnikai Tanszék által fejlesztett Nihu MATLAB toolboxba, valamint kifejlesztettem egy olyan függvénycsaládot, amelyek segítségével tetszőlegesen paraméterezhető PML réteg építhető és kezelhető. A szimulált és a valós akusztikai tér összehasonlításához egy mérést végeztem, melynek során egy gépkocsi modell felületén hoztam létre gerjesztést és süketszóban mértem mind a felületen létrejövő gyorsulást, mind a modellt körülvevő térrész egyes pontjaiban a hangnyomás-értékeket. Ezek után a lesugárzott mért és szimulált nyomásteret összehasonlítottam egy félgömb felületen.

¹A magyar nyelvű irodalomban nincs még a PML bevett fordítása, ezért a továbbiakban a PML rövidítést használom.

Abstract

Acoustic scattering problems are often solved numerically by means of the finite element method. The Finite Element Method (FEM) is a general computational technique for finding approximate solutions of partial differential equations, but in itself it can only be used in finite computational domains. A significant subset of acoustic scattering and radiation problems needs to be simulated with open boundaries, which involved the development of various extensions that intend to make the method capable of treating infinite domains. Since finite element calculations can only be performed in finite computational domains, one possible solution is to truncate the infinite region and set up an artificial boundary that encloses the region of interest. Then onto this imaginary surface a narrow layer is attached, in which the governing equations undergo some modifications in order to make the layer absorbent for outgoing waves.

This thesis presents a possible solution using absorbing layers, by implementing the Perfectly Matched Layer (PML) method under MATLAB environment. The wave equation is constructed in an anisotropic form that makes the solution decay continuously inside the layer. A wave outgoing from the physical domain enters the layer without any reflection because of the analytic continuation in the complex plane, and inside the PML it decays continuously. At the outer boundary of the PML it is reflected back, it decays continuously again, and by the time it reaches the boundary of the physical domain it is too weak to cause any error.

The thesis presents the deduction of the analytic and discrete forms of the one-, two- and three-dimensional PML, its implementation and analysis under MATLAB environment. The realized PML has been compared against two alternative methods that are used for similar problems, paying attention to computational speed and numerical error at the same time. The basic formulation can only be applied to domains with simple boundaries. Therefore a new solution has been developed that uses only one local absorbing operator instead of the global absorbing functions that depend on global spatial coordinates. Using the new transformation it is feasible to handle PML around arbitrary boundaries. The global and the local realizations of the PML have been incorporated into the MATLAB toolbox Nihu, which is developed by the BUTE Department of Telecommunications. I also have implemented a family of routines, which aid the construction and handling of arbitrary parameterized absorbing layers. I have measured a real problem to validate the simulation model. Excitation was created on a car model, and both the acceleration on the surface and the sound pressure in the near field of the model was measured in an anechoic room. Then the measured and the computed sound pressure was compared on a hemisphere surface.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	9
2. Az akusztikai végelem módszer alapjai	11
2.1. Problémafelvetés	11
2.1.1. Akusztikai hullámegyenlet a frekvenciatartományban	12
2.1.2. Peremfeltételek a frekvenciatartományban	12
2.2. Gyenge alak	13
2.3. A gyenge alak diszkretizálása	13
2.4. Elemek tömeg és merevségi mátrixai	14
3. Kiterjesztés nyílt terekre	17
3.1. Csatolt véges- és peremelem módszer (FEM/BEM)	17
3.2. Elnyelő peremfeltételek (ABC)	17
3.3. Végtes elem módszer (IEM)	18
3.4. Elnyelő rétegek	18
4. Tökéletesen illesztett réteg (Perfectly Matched Layer)	21
4.1. A PML alapegyenletei	21
4.1.1. A csillapításfüggvény megválasztása	22
4.2. PML megvalósítása 1 dimenzióban	23
4.3. PML megvalósítása 3 dimenzióban	23
4.4. A lokális csillapításfüggvény bevezetése	24
4.4.1. Problémafelvetés és megoldás	26
5. A módszer tesztelése	29
5.1. Vizsgálatok átlátszó geometriákon	29
5.1.1. Eredmények értékelése 1 dimenzióban	29
5.1.2. Eredmények értékelése 2 dimenzióban	30
5.1.3. Összehasonlítás más módszerekkel	31
5.2. Hullámterjedés és reflexió vizsgálata	32
5.2.1. Eredmények értékelése	34
5.2.2. Összehasonlítás más módszerekkel	34
5.3. PML paramétereinek optimális megválasztása	36
6. Mérés és szimuláció összehasonlítása	37
6.1. Az épített modell bemutatása	37
6.2. A modell felületén létrehozott gerjesztés mérése	37
6.3. A mérőszoftver alkalmazása	38
6.4. A modell által sugárzott akusztikai tér mérése	38
6.5. A szimulációs modell	39
6.6. A mért és a szimulált eredmények összehasonlítása	40
7. Összefoglalás	43

A. A PML gyenge alakjának levezetése 1 dimenzióban	45
B. PML beépítése a Nihu toolboxba	47
B.1. A mesh struktúra	47
B.2. PML-adatok megadása a mesh struktúrában	48
B.3. <i>pml_mk</i> - PML mátrixok számítása	48
B.4. <i>project_pml</i> - PML réteg vetítése tetszőleges felületre	49
C. MATLAB demo-k PML alkalmazásával	51
C.1. Síkhullám reflexió hengerről PML alkalmazásával	51
C.2. Hullámterjedés nyílt térben lokális PML alkalmazásával	55

Ábrák jegyzéke

2.1. Zárt tartományon felírt feladat	11
2.2. A geometria diszkretizálása végeelem módszer esetén	14
3.1. A végtelen tartomány csonkítása mesterséges határfelület használatával	19
3.2. A végeelem módszer végtelen térre való kiterjesztésének alternatívái	19
4.1. PML 1 dimenziós esetben	23
4.2. PML 2 dimenziós esetben	25
4.3. Fix vastagságú réteg tetszőleges felületű tartomány körül	26
4.4. Lokális koordinátatranszformáció végrehajtása	26
5.1. PML megvalósítása 1 dimenzióban	31
5.2. PML megvalósítása 2 dimenzióban	31
5.3. Háromdimenziós geometrián végrehajtott szimuláció	33
5.4. Hullámterjedés vizsgálata: az alkalmazott módszerek jellemzői a frekvencia függvényében	33
5.5. Kétdimenziós geometrián vizsgált visszaverődéses szimuláció	35
5.6. Visszaverődés vizsgálata: az alkalmazott módszerek jellemzői a frekvencia függvényében	35
5.7. PML paraméterek megválasztása	36
6.1. Az elkészített kocszi modell (bal) és a beépített rezgésgerjesztő (jobb).	38
6.2. A süketszobában kialakított mérési elrendezés szemléltetése	39
6.3. A mért és az interpolált gyorsulásértékek 900 Hz-en	40
6.4. A szimulált akusztikai tér 1 kHz-en	41
6.5. A szimulált és a mért hangnyomásértékek összehasonlítása	41
B.1. PML réteg vetítése	49
C.1. Síkhullám-reflexió hengeren, számított és analitikus megoldás	55
C.2. Hullámtér gyűrű alakú geometria körül	59

Táblázatok jegyzéke

5.1.	1 dimenziós PML teszteredményei	30
5.2.	2 dimenziós PML teszteredményei	32
5.3.	Módszerek összehasonlítása átlátszó geometrián	32
5.4.	Módszerek összehasonlítása visszaverődéses problémával	34
6.1.	A szimulációs modell paraméterei	39
B.1.	mesh.Nodes szerkezete	47
B.2.	mesh.Materials szerkezete	47
B.3.	mesh.Elements szerkezete	47
B.4.	PMLData szerkezete	48
B.5.	Properties szerkezete	48

1. fejezet

Bevezetés

A mérnöki gyakorlat fontos részét képezi a modellalkotás. Akusztikai problémák vizsgálata esetén kíváncsiak vagyunk a lesugárzott hangtér alakulására. Habár a hanghullámok terjedésének egyenleteit régóta ismerjük, ezek analitikus megoldása csak a legegyszerűbb, elméleti jelentőségű esetekben állíthatók elő egyszerűen. A számítógépek fejlődésének köszönhetően hatékony modellezési eljárások, mint például a numerikus számítási módszerek alkalmazására nyílt lehetőség. A numerikus módszerek segítségével a gyakorlati problémát jobban leíró, a valóságot pontosabban megközelítő megoldás kapható. Számos gyakorlati probléma megoldása során előnyös a numerikus modellezés alkalmazása, ugyanis segítségével megfelelő kép kapható a vizsgált térről, anélkül, hogy prototípus építésére lenne szükség. A numerikus módszerek a megoldandó egyenletek diszkrétizálásával dolgoznak, vagyis az analitikus megoldások véges számú pontban kapott közelítéseit adják. A becslés pontosságának csak a diszkrétizálás finomsága, azaz a szabadsági fokok száma szab határt, ezért megfelelő erőforrás birtokában igen pontos számítások végezhetőek.

A numerikus módszerek térszámítási problémák megoldására leggyakrabban alkalmazott technikája a végeelem módszer, mely azonban csak zárt térrészek modellezésére alkalmazható. Számos akusztikai probléma esetén szeretnénk vizsgálni a nyílt téri hullámterjedést, azonban ehhez modelleznünk kell a végtelen kiterjedésű teret. A numerikus módszerek alkalmazásával véges kiterjedésű modellek alkothatók, azonban lehetőség van a módszerek kiterjesztésére nyílt térben terjedő hullámok szimulációjára.

A 2. fejezet a végeelem módszer alapjait mutatja be. Ebben a fejezetben láthatók az alapvető lépések egy adott probléma megoldásához szükséges egyenletek és mátrixok előállítására. Itt kerül bemutatásra a szimulációk során alkalmazott elemtranszformáció, melynek segítségével a feldolgozás gyorsabbá tehető.

A 3. fejezet bemutatja a végeelem módszer nyílt terekre való kiterjesztésének különböző lehetőségeit. Az itt szereplő módszerek mind alkalmasak nyílt térben terjedő hullámok szimulálására, az egyes alkalmazások előnyeit és hátrányait ismerteti ez a fejezet.

A 4. fejezet a PML tulajdonságait és alkalmazását mutatja be akusztikai hullámterjedési problémák szimulálására. A fejezetben bemutatom, hogyan függ a PML használata az egyes paramétereitől, levezelem a problémák megoldásai során használt rendszeregyenleteket különböző dimenziókban. A PML eddig lehetséges megvalósítása során használt globális csillapításfüggvényt felváltó általam kidolgozott lokális csillapításfüggvény leírását és levezetését is ez a fejezet tartalmazza.

Az 5. fejezet a megvalósított PML segítségével végrehajtott tesztek kiértékelését tartalmazza különböző egyszerű geometriákon. A szimulációk segítségével kapott megoldást összehasonlítom a hullámterjedési problémák analitikus megoldásaival. Az optimális PML paraméterek beállítása és más technikai módszerekkel történő összehasonlítása is ebben a fejezetben található.

A 6. fejezet a szimuláció gyakorlati alkalmazásának bemutatásához összeállított mérést írja le. Bemutatom a méréshez épített kocsi modell felépítését, a felületén létrehozott gerjesztés és a körülötte lévő térbe sugárzott hanghullámok mérését. A számítógépes szimulációhoz létrehoztam a kocsi és az őt körülvevő akusztikai tér végeelem hálóját PML alkalmazásával. A szimuláció segítségével kapott hullámteret összehasonlítom a mérés során kapott eredményekkel.

A 7. fejezetben összegzem az eredményeket és kitekintést teszek a PML továbbfejlesztésének lehetőségeire.

A függelékben megtalálható a szimulációkhoz használt PML gyenge alakjának levezetése. Tartalmazza

a Nihu MATLAB toolbox alapvető tulajdonságait és bemutatja az általam fejlesztett új függvénycsalád dokumentációját, mely egyszerűbbé teszi a PML alkalmazását, és segítségével tetszőleges véges tartomány alkalmassá tehető nyílt térben terjedő hullámok szimulációjára is. A függelék részletesen ismerteti két bemutatkozó szimulációt a MATLAB toolboxba beépített PML alkalmazásával.

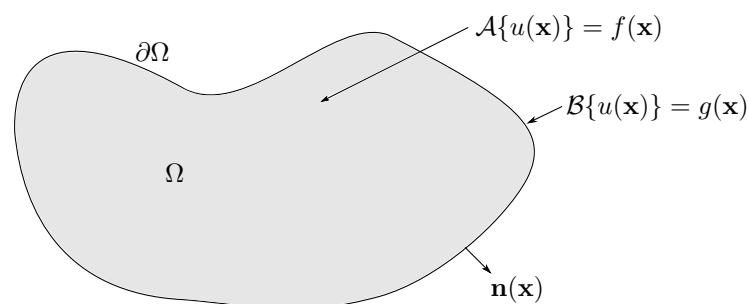
2. fejezet

Az akusztikai végelem módszer alapjai

A végelem módszer véges tartományon felírt parciális differenciálegyenletek általános numerikus megoldási módja. Ahhoz, hogy egy problémának a megoldását előállítsuk, a következő lépések szükségesek:

1. A vizsgált tartományt leíró differenciálegyenlet és a peremfeltételek, valamint a gerjesztés ismerete
2. Az egyenletből és a peremfeltételekből a gyenge alak előállítása
3. A gyenge alak diszkrétizálása megfelelő alakfüggvényekkel
4. A számítógépes diszkrét modell megépítése
5. Az így előállt magas rendszámú lineáris egyenletrendszer megoldása
6. Az eredmény kiértékelése

2.1. Problémafelvetés



2.1. ábra. Zárt tartományon felírt feladat

Keressük azt az $u(x)$ függvényt, ami a d -dimenziós tér egy zárt Ω tartományán kielégíti az

$$\mathcal{A}\{u(\mathbf{x})\} = f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

differenciálegyenletet. Az egyenletben \mathcal{A} egy tetszőleges differenciáloperátor, $f(x)$ az Ω tartományon megadott gerjesztés, \mathbb{R} pedig a valós számok halmaza. Az $u(x)$ függvénynek továbbá eleget kell tennie az Ω tartomány $\partial\Omega$ peremén előírt peremfeltételeknek:

$$\mathcal{B}\{u(\mathbf{x})\} = g(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

ahol \mathcal{B} szintén egy differenciáloperátor, $g(\mathbf{x})$ pedig egy ismert függvény (3.1. ábra).

A következőkben a frekvenciatartománybeli akusztikai hullámegyenletet tekintjük, mint az általános problémafelvetés speciális esetét, mivel ez az a differenciálegyenlet, melyet a későbbiekben számításaink kiindulópontjaként használunk.

2.1.1. Akusztikai hullámegyenlet a frekvenciatartományban

Mivel akusztikai problémák esetén gyakran az állandósult állapotú hangtér meghatározása a feladat, ezért a dolgozatban a frekvenciatartománybeli leírás kerül bemutatásra. A problémák megoldása során alkalmazott akusztikai hullámegyenlet a tömegmegmaradás és momentummegmaradás törvényének linearizált közelítéséből vezethető le [18]. Az ideális gázokra vonatkozó állapotegyenletet felhasználva és adiabatikus változásokat feltételezve, az előbb említett egyenletekbe helyettesítve megkapható a homogén akusztikai hullámegyenlet az időtartományban:

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.1)$$

ahol t az idő, c a nyomáshullám terjedési sebessége a közegben, $p(\mathbf{x}, t)$ pedig az adott időpontban, adott helyen kialakuló hangnyomás. (A hangnyomás a légnyomásnak az átlagszinthez képest történő kicsiny megváltozása: $P(\mathbf{x}, t) = p_0 + p(\mathbf{x}, t)$, bevezetve a P légnyomás és p_0 átlagos légnyomás jelöléseket.)

Periodikus megoldásokat tekintve, Fourier-transzformációval térhetünk át a frekvenciatartományba. Az egyszerű átalakítás után megkapjuk a Helmholtz-egyenletet:

$$(\nabla^2 + k^2)\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.2)$$

ahol $\mathcal{H} = \nabla^2 + k^2$ a Helmholtz-operátor, $\hat{p}(\mathbf{x}, \omega)$ a hangnyomás komplex amplitúdója a helykoordináták és a körfrekvencia függvényében,

$$k = \frac{\omega}{c}$$

a hullámszám, ahol ω a körfrekvencia. A sarkával jelölt változók itt és a továbbiakban komplex amplitúdókat jelölnek.

2.1.2. Peremfeltételek a frekvenciatartományban

Az Ω tartomány minden pontjára, bármely frekvencián érvényes a Helmholtz-egyenlet (2.2). A $\partial\Omega_p \subseteq \partial\Omega$ peremen Dirichlet peremfeltételt adunk meg, vagyis a hangnyomás komplex amplitúdói előírtak:

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = \bar{p}(\mathbf{x}, \omega) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_p,$$

ahol $\bar{p}(\mathbf{x}, \omega)$ a peremen előírt hangnyomás. A $\partial\Omega_v \subseteq \partial\Omega$ peremen Neumann peremfeltételt adunk meg, tehát a hangnyomás normális irányú deriváltjai definiáltak:

$$\frac{\partial \hat{p}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial n} = p'_n = i\omega\rho_0 \bar{v}_n(\mathbf{x}, \omega) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_v, \quad (2.3)$$

ahol \mathbf{n} a felület normálvektora, $i = \sqrt{-1}$, ω a körfrekvencia, ρ_0 a közeg átlagos sűrűsége és $\bar{v}_n(\mathbf{x}, \omega)$ a peremen előírt normális irányú részecske sebesség a helykoordináták és a körfrekvencia függvényében. Az előbbi egyenlet levezetéséhez felhasználtam a momentum-egyenlet linearizált formáját, az Euler-egyenletet [18].

Szokás még megadni Robin peremfeltételt is, ami az előbb említett peremfeltételek lineáris kombinációja (lásd pl:[15]), ezt azonban ebben a dolgozatban nem fogjuk használni.

2.2. Gyenge alak

A gyenge alak a differenciálegyenlet követelményeinél gyengébb feltételt fogalmaz meg. A gyenge alakot úgy kapjuk meg, hogy a differenciálegyenletet egy tetszőleges tesztfüggvénnyel szorozzuk, majd a megoldási tartományon integráljuk. A gyenge alak előállítás az első lépés a rendszerleíró mátrixegyenletek felépítéséhez. A (2.2) egyenletből kiindulva:

$$\int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) (\nabla^2 \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) + k^2 \hat{p}(\mathbf{x}, \omega)) \, d\mathbf{x} = 0,$$

ahol $\phi(\mathbf{x})$ tetszőleges tesztfüggvény az Ω tartományon. Az integrálnak tetszőleges $\phi(\mathbf{x})$ tesztfüggvény esetén egyenlőnek kell lennie nullával, amely csak úgy lehetséges, ha a $\phi(\mathbf{x})$ melletti tag is egyenlő nullával. Ez megegyezik a 2.2. egyenlettel, azonban a gyenge alak általánosabb érvényű, olyan esetekben is teljesül, amikor a differenciális alak nem (például a változónak ugrása van a peremen). Az integrált szétbontva és felhasználva a $\nabla \cdot (\phi(\mathbf{x}) \nabla p(\mathbf{x})) = \nabla \phi(\mathbf{x}) \nabla p(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{x}) \nabla^2 p(\mathbf{x})$ összefüggést kapjuk a következő egyenletet:

$$\int_{\Omega} \nabla \phi(\mathbf{x}) \nabla \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) \, d\mathbf{x} - k^2 \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi(\mathbf{x}) \nabla \hat{p}(\mathbf{x}, \omega)) \, d\mathbf{x}.$$

Az integrál jobb oldala tovább egyszerűsíthető a Gauss tétel alkalmazásával:

$$\int_{\Omega} \nabla \phi(\mathbf{x}) \nabla \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) \, d\mathbf{x} - k^2 \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_v} \phi(\mathbf{x}) p'_n(\mathbf{x}, \omega) \, d\mathbf{x}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát beszorozva $\rho_0 c^2$ taggal, majd a (2.3) egyenletet a jobb oldali integrálba helyettesítve megkapjuk a gyenge alakot a frekvenciatartományban:

$$\rho_0 c^2 \int_{\Omega} \nabla \phi(\mathbf{x}) \nabla \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) \, d\mathbf{x} - \omega^2 \rho_0 \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) \, d\mathbf{x} = i\omega \rho_0^2 c^2 \int_{\partial\Omega_v} \phi(\mathbf{x}) \bar{v}_n(\mathbf{x}, \omega) \, d\mathbf{x}. \quad (2.4)$$

2.3. A gyenge alak diszkrétizálása

A végeelem módszer kiindulópontja a megoldásfüggvény diszkrétizálása. A megoldásfüggvényt az Ω tartományon véges számú ismert $N(\mathbf{x})$ alakfüggvény lineáris kombinációjával közelítjük. Az alakfüggvények lehetőség szerint egymásra ortogonálisak, könnyen integrálhatóak és deriválhatóak. A nyomás a helykoordináta függvényében véges számú ismert alakfüggvénnyel közelíthető:

$$\hat{p}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) p_j,$$

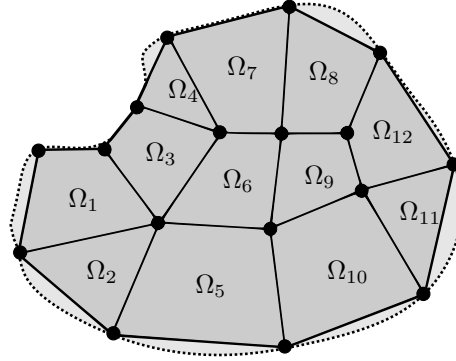
ahol $N_j(\mathbf{x})$ alakfüggvény adott az Ω tartományon. A fenti egyenlet felírható mátrix alakban:

$$\hat{p}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{p} = [N_1(\mathbf{x}) \quad N_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad N_n(\mathbf{x})] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix}.$$

A nyomás gradiense az alakfüggvények gradienseivel értelemszerűen közelíthető. A tesztfüggvények és ezek gradienseinek diszkrétizálásához a Galerkin módszert alkalmazzuk, amely a súlyozott maradék elv egy speciális esete. Ilyenkor a tesztfüggvényeket és gradienseiket is ugyanazon alakfüggvényekkel közelítjük, mint a hangnyomás és a nyomás gradienseinek esetében.

A nyomás és a tesztfüggvény, valamint ezek gradienseinek közelítéseit a (2.4) egyenletbe helyezve, majd a helyfüggetlen ϕ vektort mindkét oldalon elhagyva kapjuk a csomópontokban ismeretlen nyomásértékekre felírt lineáris egyenletrendszer:

$$\left(\rho_0 c^2 \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{N}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \omega^2 \rho_0 \int_{\Omega} \mathbf{N}(\mathbf{x})^T \mathbf{N}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) \mathbf{p} = i\omega \rho_0^2 c^2 \int_{\partial\Omega_v} \mathbf{N}(\mathbf{x})^T \bar{v}_n(\mathbf{x}, \omega) \, d\mathbf{x}.$$



2.2. ábra. A geometria diszkretizálása végelem módszer esetén

A rendszeregyenlet mátrix formában felírt alakja

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{p} = i\omega \mathbf{q},$$

ahol

$$\mathbf{K} = \rho_0 c^2 \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{N}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

az akusztikai merevségi mátrix,

$$\mathbf{M} = \rho_0 \int_{\Omega} \mathbf{N}(\mathbf{x})^T \mathbf{N}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

az akusztikai tömegmátrix és \mathbf{q} a gerjesztés vektor, amelyet szintén alakfüggvényekkel közelítve felírható az alábbi alakban:

$$\mathbf{q} = \mathbf{A} \mathbf{v}_n,$$

ahol

$$\mathbf{A} = \rho_0^2 c^2 \int_{\partial\Omega_v} \mathbf{N}(\mathbf{x})^T \mathbf{N}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

2.4. Elemek tömeg és merevségi mátrixai

A hangnyomás diszkretizálása mellett párhuzamosan megtörténik az Ω tartomány diszkretizálása is, amelyet felosztunk véges számú diszjunkt elemre, amint az a 2.2 ábrán is látható:

$$\Omega \approx \bigcup_{e=1}^{N_e} \Omega_e \quad \text{és} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad \text{ha} \quad i \neq j.$$

A feldolgozás elemenként történik, minden elemen közelítjük a nyomást polinom alakfüggvények segítségével. Az Ω tartományon vett integrál felírható az elemeken vett integrálok összegeként, így az \mathbf{M} tömegmátrix és a \mathbf{K} merevségi mátrix felírható az elemek \mathbf{M}_e és \mathbf{K}_e mátrixainak összegeként.

A könnyebb feldolgozás érdekében egy geometriai transzformációt hajtunk végre minden elemen, így egy azonos típusú elemre vett integrál mindig ugyanazon a tartományon értékelődik ki. Egy elemre vett helykoordináta kifejezhető az elem csomópontjainak lineáris kombinációjaként.

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^n L_j(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_j, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{O}_e,$$

Az L_j együtthatók az elem geometriai alakfüggvényei, melyek kapcsolatot teremtenek az elem lokális és globális koordinátái között. Abban az esetben, ha $L_j \equiv N_j$, akkor izoparametrikus elemekről beszélünk.

Ez az interpoláció felfogható az \mathcal{O}_e tartományon lévő ξ és Ω_e tartományon lévő \mathbf{x} közötti koordináta-transzformációként. Ez a transzformáció felírható mátrix alakban:

$$\mathbf{x}(\xi) \approx \sum_{j=1}^n L_j(\xi) \mathbf{x}_j = \mathbf{L}(\xi) \mathbf{X} = [L_1(\xi) \quad L_2(\xi) \quad \cdots \quad L_n(\xi)] \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

A transzformáció lényege, hogy a felosztott Ω tartomány elemeire vonatkozó integrálok az \mathcal{O}_e tartományon legyenek kiértékelve. Ehhez szükség van a leképezés Jacobi mátrixára, amelyet $\mathbf{J}(\xi)$ fog jelölni.

A fentieket felhasználva egy elem tömeg- és merevségi mátrixa kifejezhető

$$\mathbf{M}_e = \rho_0 \int_{\mathcal{O}_e} \mathbf{N}(\xi)^T \mathbf{N}(\xi) |\mathbf{J}(\xi)| d\xi \quad (2.6)$$

és

$$\mathbf{K}_e = \rho_0 c^2 \int_{\mathcal{O}_e} \nabla_{\xi} \mathbf{N}(\xi)^T (\mathbf{J}(\xi)^T \mathbf{J}(\xi))^{-1} \nabla_{\xi} \mathbf{N}(\xi) |\mathbf{J}(\xi)| d\xi \quad (2.7)$$

segítségével. Az elemek tömeg- és merevségi mátrixai kiértékelésekor ((2.6) és (2.7)) az integrálokat az \mathcal{O}_e tartományon kell kiszámítani. Néhány egyszerű esettől eltekintve az integrálok nem számíthatóak analitikusan, ezért ezek numerikus számításához használható a Gauss kvadratura:

$$\int_{\mathcal{O}_e} f(\xi) d\xi \approx \sum_{s=1}^r f(\xi_s) w_s, \quad \xi_s \in \mathcal{O}_e,$$

ahol ξ_s jelöli a kvadratura alappontjait, w_s a pontokhoz tartozó súlyokat, r pedig a kvadratura alappontjainak száma. A formula használatának másik előnye, hogy $2N - 1$ fokszámú polinomfüggvény esetén már N alapponttal is pontos értéket kapunk. Mivel az alkalmazott függvények minden esetben alacsony fokszámú polinomok, így az integrálok gyorsan számíthatók.

3. fejezet

Kiterjesztés nyílt terekre

Számos akusztikai probléma numerikus megoldásához szükséges a nyílt térben történő hullámterjedés szimulációja. Amint azt az előző fejezetben láttuk, a végeselem számítás elvégzéséhez véges tartományra van szükségünk. Ekkor a végtelen térrészt csonkítanunk kell, az így kialakuló tartományt pedig a csonkítással bevezetett mesterséges határfelület fogja körülvenni (lásd a 3.1 ábrát). Ha olyan tartományt választunk, amely teljes egészében tartalmazza az összes lesugárzó vagy reflektáló objektumot, feltételezhetjük, hogy a mesterséges peremen teljesül a Sommerfeld-féle sugárzási feltétel [23]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(d-1)/2} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp \right) = 0. \quad (3.1)$$

Utóbbi azt a feltételezést jelenti, hogy a végtelen szabad térből nem érkeznek visszavert nyomáshullámok, így a külső peremen csak kifelé haladó hullámokkal kell számolnunk.

A nyílt térrészre kiterjesztett probléma megoldásához a mesterséges határfelületen is megfelelő peremfeltételt kell megadnunk. Egyszerű felület (pl. gömb vagy kör) esetén ésszerű választásnak tűnhet egy Sommerfeld-szerű peremfeltétel megadása, azonban ez nemkívánatos visszaverődő hullámokat eredményez a felületről, amint azt [6] tárgyalja.

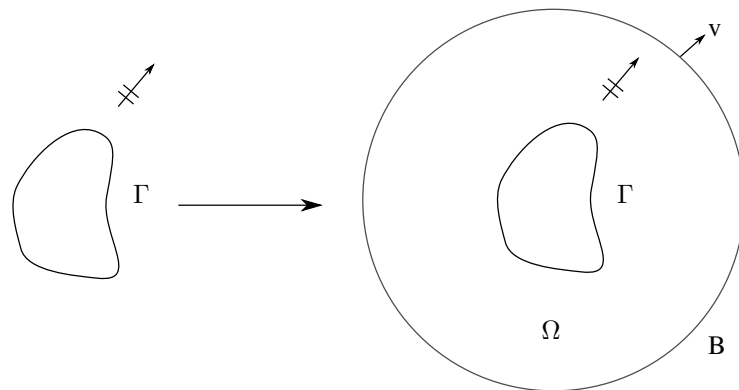
A fejezet további részeiben bemutatásra kerülnek a legtöbbször alkalmazott megoldások, a teljesség igénye nélkül. Részletesebb leírás található például a [13] irodalomban. A 4. fejezetben részletesen bemutatásra kerülő PML módszer is a fenti megoldások közé sorolható, amely biztosítja, hogy a mesterséges határfelület átlátszó legyen, és a kifelé haladó hullámok ne verődjenek vissza róla.

3.1. Csatolt véges- és peremelem módszer (FEM/BEM)

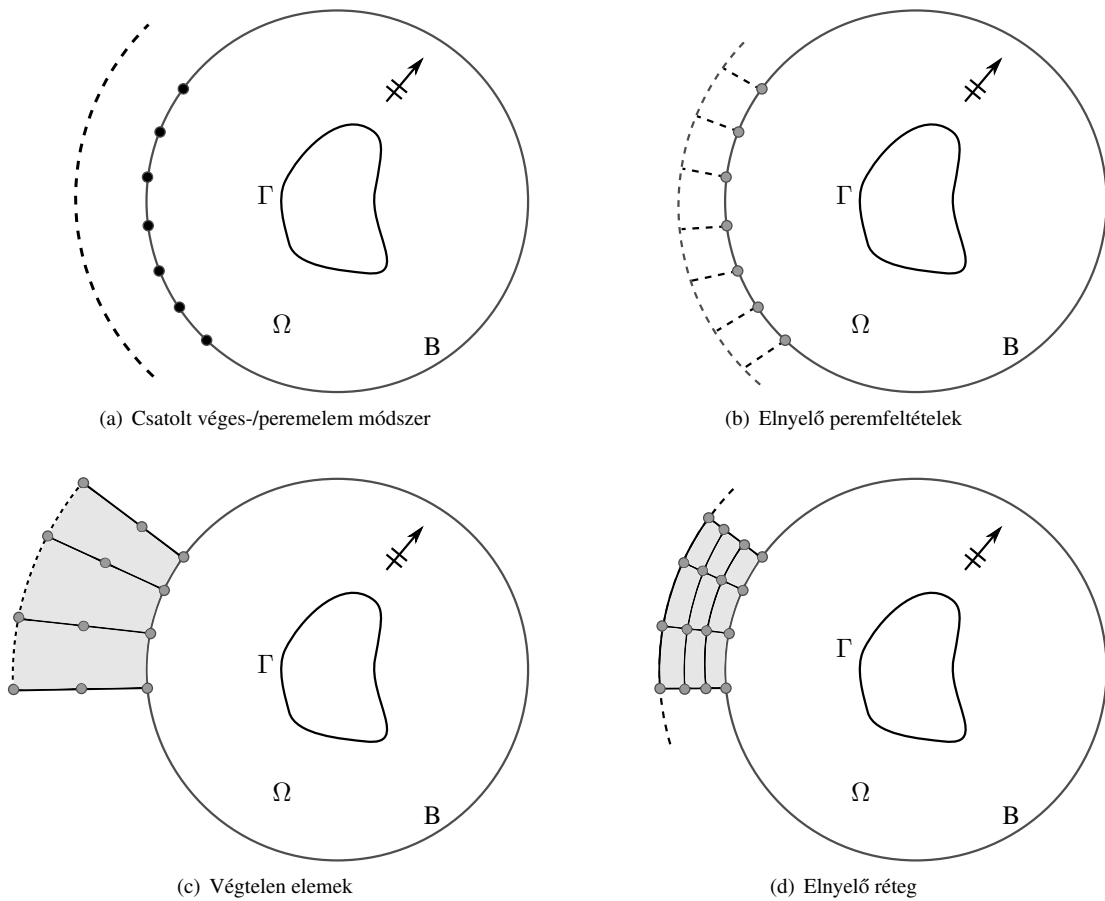
A csatolt módszer lényege, hogy a mesterséges határfelületen a megfelelő peremfeltételeket a direkt peremelem módszerrel (BEM - Boundary Element Method) segítségével határozzuk meg. A technika alkalmazásával a felületen egy globális csatoló impedanciamátrixot határozhatunk meg. (A globális itt azt jelenti, hogy a mátrix az összes felületi csomópontpár közti kapcsolatot leírja.) A peremelem módszer leírása nem képezi a dolgozat tárgyát, az megtalálható a [7] vagy [9] irodalmakban. A módszer előnye, hogy nem szükséges a számítási tartományt egy konvex burkolóra kiterjeszteni, a technika tetszőleges komplexitású felületeken alkalmazható. Így nem szükséges extra szabadságfokok bevezetése. Hátrányt jelent viszont, hogy a csatolást leíró mátrix komplex, teli és frekvenciafüggő. Ez jelentős többlet számítási időt jelent a leíró mátrixok frekvenciánkénti összerakásánál, illetve az egyenletek megoldásánál is. Szintén hátrányt jelent az irreguláris frekvenciák problémája, melyet extra szabadságfokok bevezetésével küszöbölhetünk ki [19].

3.2. Elnyelő peremfeltételek (ABC)

Az ABC (Absorbing Boundary Conditions) alkalmazásakor olyan peremfeltételeket adunk meg a mesterséges határfelületen, amelyek elnyelik a kifelé haladó hullámokat. Egy jó ABC megalkotása igen nehéz



3.1. ábra. A végtelen tartomány csonkítása mesterséges határfelület használatával



3.2. ábra. A végeselem módszer végtelen térre való kiterjesztésének alternatívái

4. fejezet

Tökéletesen illesztett réteg (Perfectly Matched Layer)

A tökéletesen illesztett réteg (Perfectly Matched Layer) egy mesterséges elnyelő réteg hullámterjedési problémák szimulálására nyílt terek esetében. A rétegen belül a hullámegyenlet módosított, anizotrop alakját állítjuk fel, így az oszcilláló hullámok exponenciálisan csökkenő hullámokká alakulnak. Ennek következményeképpen nincsenek reflektált hullámok a fizikai tartomány és a PML határán.

A PML két alapvető tulajdonsággal rendelkezik:

- Nincsenek visszavert hullámok a mesterséges határfelületen
- A rétegen belül a hullámok exponenciálisan csillapodnak

Ennek a két tulajdonságnak köszönhetően a PML remek hullámnyelődést biztosít folytonos esetben, reflexiómentesen abszorbálja a kifelé haladó hullámokat. A PML technikát először Bérenger írta le, szabadtéri elektromágneses hullámterjedés szimulációjára [3]. A Maxwell-egyenletekre felírt módszert később többen is továbbfejlesztették, tökéletesítették (lásd pl. [8]), illetve hamarosan megjelent az akusztikai hullámegyenletre történő alkalmazás is [21]. A következőkben az akusztikai PML alapegyenletei és a réteg számítógépes megvalósítása kerül részletesebb bemutatásra.

4.1. A PML alapegyenletei

Az Ω tartományon az egyenletek változatlanok maradnak, a PML-en belül egy koordináta-nyújtást hajtunk végre, ahol a koordinátákat leképezzük a komplex tartományra. Matematikailag az egyenletekben szereplő ∇ operátort a ∇_s operátorral helyettesítjük, ahol

$$\nabla_s = \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}_j \frac{1}{1 - i \frac{\sigma(x_j)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (4.1)$$

Itt \mathbf{e}_j a Descartes koordináta-rendszer egységvektorai, $i = \sqrt{-1}$, $\sigma(x)$ a PML csillapításfüggvénye és ω a körfrekvencia. Az általam feldolgozott és a legtöbb felelhető irodalomban a PML egyenletek $p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ időfüggés szerint definiáltak. A következetesség és a később implementálásra kerülő megvalósítás a többi módszerrel való kompatibilitása miatt a következőkben $p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ időfüggést feltételezünk. Speciálisan, ha a PML az x -irányba terjedő hullámokat nyeli el, akkor $\hat{x}(x) = x - i \frac{\sigma_x(x)}{\omega}$, a hullámegyenletben szereplő differenciáloperátort pedig lecseréljük a következőre:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{1 - i \frac{\sigma_x(x)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial x}.$$

A vizsgált tartományon értelmezett e^{-ikx} megoldás a rétegen belül

$$e^{-ik(\operatorname{Re} x + i\operatorname{Im} x)} = e^{-ik\operatorname{Re} x} e^{k\operatorname{Im} x}$$

megoldást adja, ahol $k = \frac{\omega}{c}$ a hullámszám. Így $k > 0$ esetén a fizikai tartományon x -irányba terjedő oszcilláló hullám a rétegen belül exponenciálisan csökken, ahogy $\operatorname{Im} x$ növekszik. A fizikai tartomány és a PML határán nincsenek reflektált hullámok, mivel itt csak az eredeti megoldást kiterjesztjük a komplex tartományra, ahol $\hat{x} = x$ megoldás változatlan. Ha megvizsgáljuk a

$$\hat{p}(x) = e^{-ikx} \cdot \exp\left(-\frac{k}{\omega} \int_{x^*}^x \sigma_x(x') dx'\right)$$

rétegen belül értelmezett megoldást, észrevehető az integrál előtti k/ω együttható, ami megegyezik $1/c$ -vel, a fázissebesség reciprokával. Diszperziómentes anyagban c konstans és független a frekvenciától, így minden hullámhosszon azonos mértékben csökken az amplitúdó. Azonban a csillapítás nem független a beeső hullám szögétől (σ függ a helykoordinátáktól), ami nehézségeket okoz.

4.1.1. A csillapításfüggvény megválasztása

A PML rétegen belül, ahol $\sigma > 0$, az oszcilláló hullámok fokozatosan csillapodnak. A fizikai tartományon, ahol $\sigma = 0$, a hullámegyenlet és a megoldás változatlan.

Csillapításfüggvénynek elméletileg bármilyen függvény választható, amely a csillapítás irányába növekvő helykoordinátától függ, azonban a függvény megválasztása nem triviális feladat. Különböző függvényeket alkalmazva a rendszermátrix számítási ideje vagy a kondíciószáma jelentősen eltérhet. A legegyszerűbbnek tűnő választás a

$$\sigma_x(x) = Ax^2, \quad \sigma_y(y) = Ay^2 \quad \text{és} \quad \sigma_z(z) = Az^2$$

vagy a

$$\sigma_x(x) = A(x - x^*)^2, \quad \sigma_y(y) = A(y - y^*)^2 \quad \text{és} \quad \sigma_z(z) = A(z - z^*)^2$$

korlátos csillapításfüggvények alkalmazása, ahol A tetszőleges valós paraméter, x^*, y^*, z^* a PML réteg külső határai az adott irányban. Az előbbi függvények használata esetén A értékét nagyra kell választani, hogy a réteg külső határán visszavert hullámok megfelelően csillapodjanak. Azonban nagy A esetén a hiba is nagy lesz, amely csak a réteg felbontásának növelésével csökkenthető, ezenkívül A értéke nem választható tetszőlegesen nagyra, mert diszkrétizálás után a hiba domináns lesz. Az A paraméter megválasztása geometriafüggő is, ez rengeteg nehézséget okoz különböző szimulációk megvalósítása esetén [4].

A következőkben minden probléma megoldásánál ugyanazokat a csillapításfüggvényeket fogom használni. Bizonyítható, hogy ezek a nemkorlátos csillapításfüggvények minimális hibával a legjobb eredményt adják minden esetben [4]. A függvények a következők:

$$\sigma_x(x) = \frac{c}{x^* - x}, \quad \sigma_y(y) = \frac{c}{y^* - y} \quad \text{és} \quad \sigma_z(z) = \frac{c}{z^* - z},$$

ahol c a hullám terjedési sebessége, x^*, y^*, z^* a PML réteg külső határa egy adott irányban.

A PML alkalmazásának hátrányai

A PML határozott előnye, hogy megvalósításban tökéletes a folytonos esetben, bizonyos körülmények között jól teljesít, azonban van néhány hátránya is:

- Amíg folytonos esetben a PML megvalósítása tökéletes, diszkrétizálás után nem marad az. A PML sokkal érzékenyebb a diszkrétizálásra, mint az ABC-k. Egy jól megtervezett ABC a folytonos esetben garantálta a jó működést diszkrétizálás után is, ez a PML-re nem igaz.
- A PML működése érzékeny a paramétereinek megválasztására, például a réteg vastagságára vagy a csillapításfüggvényre. Ha $\sigma(x)$ gyorsan növekvő függvény, akkor a PML-en belül jó felbontás szükséges (sok elem), ami nem hatékony.

- Néhány esetben a PML numerikus instabilitást mutat. Ez kiküszöbölhető az alapegyenletek módosításával [16].
- A magasabb rendű ABC-k esetében rögzített mesterséges határfelület mellett az egzakt megoldás tetszőlegesen közelíthető az ABC rendszámának növelésével, a PML esetében ez nem tehető meg a felbontás növelésével adott vastagság mellett.
- A PML tökéletesen elnyeli a terjedő hullámokat, azonban más típusú, mint például az evaneszcens esetében nem hatékony.
- A PML rendszer mátrixa frekvenciafüggő, így minden vizsgált frekvencián ki kell értékelni, ami számításiigényes.

4.2. PML megvalósítása 1 dimenzióban

Egydimenziós esetben a geometria egy véges hosszúságú szakasz. A vonaldarab bal oldala Ω_F a fizikai tartomány, melyet közvetlenül Ω_A a PML réteg követ (4.1. ábra). A nyomáshullámok amplitúdóit p_F jelöli a fizikai tartományon, p_A a PML rétegen belül. A feladat alapegyenletei:

$$\Delta p_F(x) + k^2 p_F(x) = 0 \quad x \in \Omega_F, \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{\gamma(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma(x)} \frac{\partial p_A(x)}{\partial x} \right) + k^2 p_A(x) = 0 \quad x \in \Omega_A, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial p_F(x)}{\partial n} = i\omega \rho_0 v_n(x) \quad x \in \partial\Omega_v, \quad (4.4)$$

$$p_F(x) = p_A(x) \quad x \in \partial\Omega_{FA}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial p_F(x)}{\partial x} = \frac{1}{\gamma(x)} \frac{\partial p_A(x)}{\partial x} \quad x \in \partial\Omega_{FA}, \quad (4.6)$$

$$p_A(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega_D, \quad (4.7)$$

ahol

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |x| < a, \\ 1 - \frac{i}{\omega} \sigma(|x|), & \text{ha } a \leq |x| < a^*. \end{cases}$$

Itt a a PML kezdőpontja, a^* a PML végpontja. A probléma gyenge alakja és levezetése az A. függelékben található.

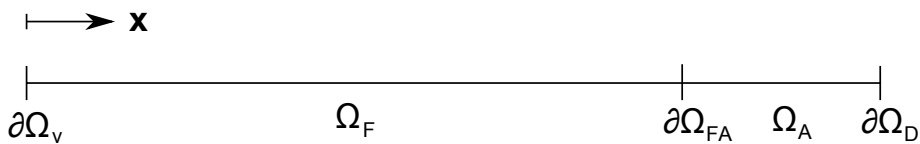
A gyenge alak diszkretizálása után megkapjuk a PML tömeg- és merevségi mátrixait:

$$\mathbf{M}_{\text{PML}} = k^2 \int_{\Omega_A} \gamma(x) \mathbf{N}(x)^T \mathbf{N}(x) dx,$$

$$\mathbf{K}_{\text{PML}} = \int_{\Omega_A} \frac{1}{\gamma(x)} \frac{\partial \mathbf{N}(x)^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}(x)}{\partial x} dx.$$

4.3. PML megvalósítása 3 dimenzióban

A háromdimenziós probléma síkmetszete a 4.2. ábrán látható, ebben az esetben gondoskodni kell az y és z -irányba terjedő hullámok csillapításáról is. Ω_F a fizikai tartomány, Ω_A a PML rétegen belüli tartomány,



4.1. ábra. PML 1 dimenziós esetben

Γ a gerjesztő felület, Γ_I és Γ_D a PML réteg határfelületei, ∇_s a (4.1) egyenletben meghatározott operátor. A feladat alapegyenletei:

$$\begin{aligned}
\Delta p_F(\mathbf{x}) + k^2 p_F(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \Omega_F, \\
\nabla_s^2 p_A(\mathbf{x}) + k^2 p_A(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \Omega_A, \\
\frac{\partial p_F(\mathbf{x})}{\partial n} &= i\omega\rho_0 v_n(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma, \\
p_F(\mathbf{x}) &= p_A(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma_I, \\
\frac{\partial p_F(\mathbf{x})}{\partial n_I} &= \frac{1}{1 - i\frac{\sigma(|\mathbf{x}|)}{\omega}} \frac{\partial p_A(\mathbf{x})}{\partial n_I} & \mathbf{x} \in \Gamma_I, \\
p_A(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \Gamma_D.
\end{aligned}$$

A fenti egyenleteket felhasználva és az egy dimenziós eseténél bemutatott levezetéshez hasonlóan kapjuk a háromdimenziós PML gyenge alakját:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_A} \frac{\gamma_y(y)\gamma_z(z)}{\gamma_x(x)} \partial_x \phi(x, y, z) \partial_x p_A(x, y, z) dx dy dz + \\
& \int_{\Omega_A} \frac{\gamma_x(x)\gamma_z(z)}{\gamma_y(y)} \partial_y \phi(x, y, z) \partial_y p_A(x, y, z) dx dy dz + \\
& \int_{\Omega_A} \frac{\gamma_x(x)\gamma_y(y)}{\gamma_z(z)} \partial_z \phi(x, y, z) \partial_z p_A(x, y, z) dx dy dz + \\
& -k^2 \int_{\Omega_A} \gamma_x(x)\gamma_y(y)\gamma_z(z) \phi(x, y, z) p_A(x, y, z) dx dy dz + \\
& \int_{\Omega_F} \nabla \phi(x, y, z) \nabla p_F(x, y, z) dx dy dz \\
& - \int_{\Omega_F} k^2 \phi(x, y, z) p_F(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Gamma} \phi(x, y, z) \partial_n p_F(x, y, z) dx dy dz, \quad (4.8)
\end{aligned}$$

ahol

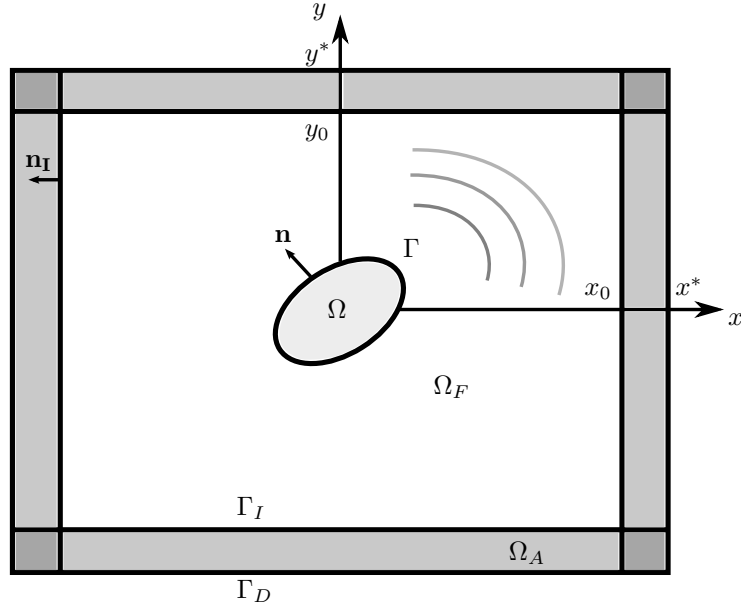
$$\gamma_x(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |x| < x_0, \\ 1 - \frac{1}{\omega} \sigma(|x|), & \text{ha } x_0 \leq |x| < x^*. \end{cases}$$

Itt a a PML kezdőpontja, a^* a PML végpontja \mathbf{x} -irányban, γ_y és γ_z hasonlóan értelmezhető a megfelelő helykoordináták és határok behelyettesítésével. A (4.8). egyenlet diszkrétizálása után a PML tömeg- (\mathbf{M}_{PML}) és merevségi mátrixai (\mathbf{K}_{PML}):

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\text{PML}} &= k^2 \int_{\Omega_A} \gamma_x(x)\gamma_y(y)\gamma_z(z) \mathbf{N}(x, y, z)^T \mathbf{N}(x, y, z) dx dy dz, \\
\mathbf{K}_{\text{PML}} &= \int_{\Omega_A} \left(\frac{\gamma_y(y)\gamma_z(z)}{\gamma_x(x)} \frac{\partial \mathbf{N}(x, y, z)^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}(x, y, z)}{\partial x} + \right. \\
& \quad \frac{\gamma_x(x)\gamma_z(z)}{\gamma_y(y)} \frac{\partial \mathbf{N}(x, y, z)^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}(x, y, z)}{\partial y} + \\
& \quad \left. \frac{\gamma_x(x)\gamma_y(y)}{\gamma_z(z)} \frac{\partial \mathbf{N}(x, y, z)^T}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{N}(x, y, z)}{\partial z} \right) dx dy dz.
\end{aligned}$$

4.4. A lokális csillapításfüggvény bevezetése

A globális csillapításfüggvényeket használó PML csak egyszerű kanonikus geometriájú rétegek esetén használható könnyen, amikor az alkalmazott globális koordináta-rendszer segítségével leírható a csillapítás a kívánt irányokban. Azonban ha egy tetszőleges felületű geometria köré szeretnénk fix vastagságú



4.2. ábra. PML 2 dimenziós esetben

réteget vonni, akkor a globális csillapításfüggvény alkalmazása meglehetősen nehézkes lehet. A PML $\sigma(\mathbf{x})$ globális csillapítás függvényei a réteg határától és az adott irányú helykoordinátától függnek, ezért ezzel a megoldással csak nagyon nehezen és rengeteg adat tárolásával lenne megoldható egy probléma tetszőleges felületű tartományon.

Annak érdekében, hogy bármilyen alakú felület könnyen kezelhető legyen, kidolgoztam egy megoldást, amely csak egy csillapításfüggvényt használ, egyetlen helykoordinátától és a PML réteg vastagságától függ. A 2.4. fejezet bemutatta a vizsgált tartományon alkalmazott transzformációt, amely az elemek lokális koordináta-rendszerét alkalmazza. A PML réteg építéskor az elemek mindig elforgathatók úgy, hogy az elem lokális koordináta-rendszerének első koordinátája mindig a réteghatár irányába mutasson (4.3. ábra), amelynek a segítségével a csillapítás leírható. Így a rétegen belül alkalmazott ∇ operátor a következő lesz:

$$\nabla'_s = \frac{1}{1 - i \frac{\sigma(\xi')}{\omega}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix}.$$

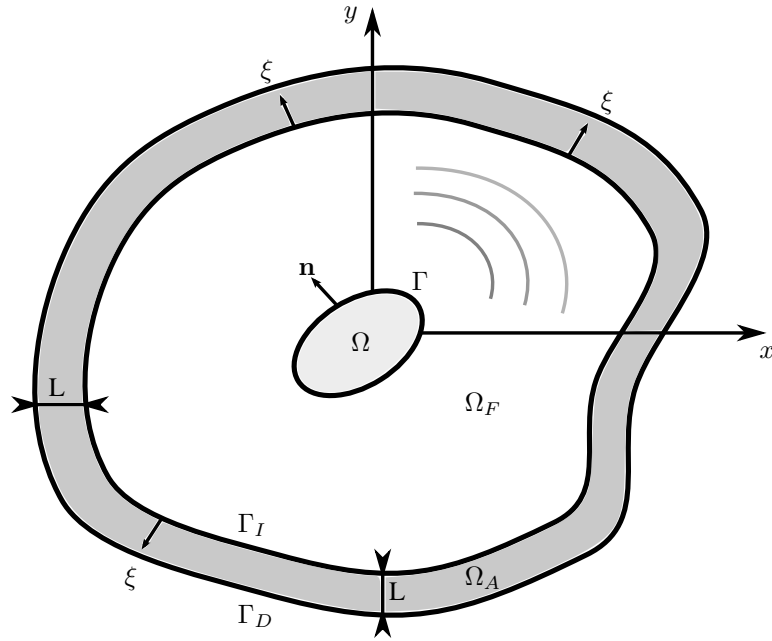
A lokális koordináta-rendszer alkalmazása esetén a megfelelő csillapításhoz szükség van még arra, hogy tudjuk azt, hogy éppen melyik elem koordinátájával számolunk. Mivel a réteg vastagsága és a felbontása rögzített, így egy egyszerű transzformációval meghatározható a megfelelő paraméter. Az elemeken belül a réteghatár irányába fordított koordináta minden esetben a $[-1, 1]$ tartományon belül veszi fel az értékeit, így az alkalmazott transzformáció (4.4. ábra):

$$\xi' = \frac{\xi + 1}{2N} + \frac{n - 1}{N} \quad \xi \in (-1, 1), \quad 1 \leq n \leq N,$$

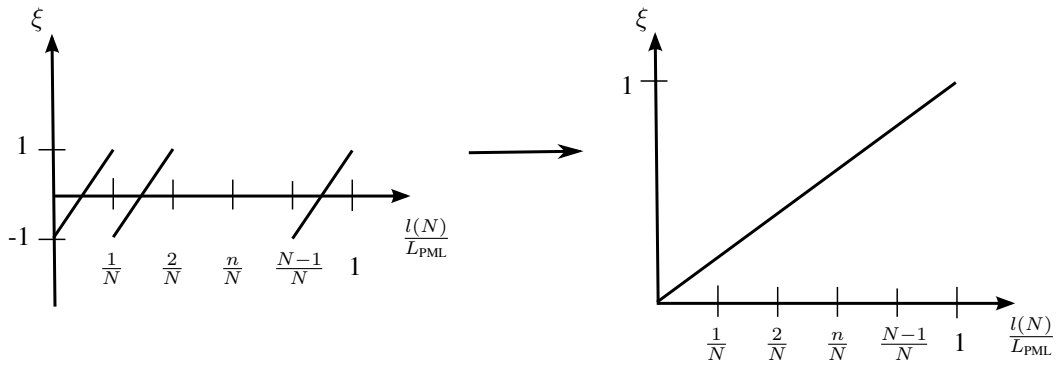
ahol n megmondja, hogy a vizsgált elem hányadik a sorban, N pedig a PML réteg felbontása. A lokális csillapításfüggvény az eddig alkalmazott nem korlátos globális függvényekhez hasonlóan:

$$\sigma(\xi') = \frac{1}{L} \frac{c}{1 - \xi'} \quad \xi' \in [0, 1),$$

ahol L a PML réteg vastagsága, c a hullám terjedési sebessége.



4.3. ábra. Fix vastagságú réteg tetszőleges felületű tartomány körül



4.4. ábra. Lokális koordinátatranszformáció végrehajtása

4.4.1. Problémafelvetés és megoldás

A 2.4. fejezetben leírt lokális koordinátákkal leírt tömeg- és merevségi mátrixok ((2.6) és (2.7)) segítségével megadhatók a fizikai tartományon és a rétegen belül értelmezett egyenletrendszerek:

$$\left(\rho_0 c^2 \int_{\mathcal{O}_e} \nabla_{\xi} \mathbf{N}(\xi)^T (\mathbf{J}(\xi)^T \mathbf{J}(\xi))^{-1} \nabla_{\xi} \mathbf{N}(\xi) |\mathbf{J}(\xi)| d\xi - \omega^2 \rho_0 \int_{\mathcal{O}_e} \mathbf{N}(\xi)^T \mathbf{N}(\xi) |\mathbf{J}(\xi)| d\xi \right) \mathbf{p} = i\omega \rho_0^2 c^2 \int_{\mathcal{O}_e} \mathbf{N}(\xi)^T \mathbf{N}(\xi) |\mathbf{J}(\xi)| d\xi \mathbf{v}_n,$$

$$\left(\rho_0 c^2 \int_{\mathcal{O}_e} \nabla_{s'} \mathbf{N}(\xi)^T (\mathbf{J}(\xi)^T \mathbf{J}(\xi))^{-1} \nabla_{s'} \mathbf{N}(\xi) |\mathbf{J}(\xi)| d\xi - \omega^2 \rho_0 \int_{\mathcal{O}_e} \mathbf{N}(\xi)^T \mathbf{N}(\xi) |\mathbf{J}(\xi)| d\xi \right) \mathbf{p} = 0.$$

A PML-re vonatkozó egyenletrendszer tovább alakítható $\nabla_{s'}$ behelyettesítésével:

$$\nabla'_{s'} = \frac{1}{\gamma(\xi')} \nabla_{\xi},$$

ahol

$$\gamma(\xi') = 1 - i \frac{\sigma(\xi')}{\omega} \quad \xi' \in [0, 1).$$

Az operátort felhasználva, majd az egyenletrendszer mindkét oldalát felszorozva $\gamma(\xi')$ -vel kiolvashatjuk a lokális csillapítás függvényt használó PML tömeg- és merevségi mátrixait:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{PML}} &= \rho_0 \int_{\mathcal{O}_e} \gamma(\xi') \mathbf{N}(\xi)^T \mathbf{N}(\xi) |\mathbf{J}(\xi)| d\xi, \\ \mathbf{K}_{\text{PML}} &= \rho_0 c^2 \int_{\mathcal{O}_e} \frac{1}{\gamma(\xi')} \nabla_{\xi} \mathbf{N}(\xi)^T (\mathbf{J}(\xi)^T \mathbf{J}(\xi))^{-1} \nabla_{\xi} \mathbf{N}(\xi) |\mathbf{J}(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

5. fejezet

A módszer tesztelése

A MATLAB-ban megvalósított PML szimulációs eredményeit analitikus megoldásokkal hasonlítottam össze. A tesztek egy része során átlátszó geometriákat alkalmaztam, melynek segítségével a térben elhelyezett pontforrás adott tartományon kialakuló hullámterét vizsgálhatjuk. Az átlátszó geometria tulajdonsága, hogy a belső peremen adjuk meg a gerjesztő peremfeltételeket, a külső peremen pedig nyílt téri hullámterjedést szimuláló peremfeltételt definiálunk. A legtöbb esetben a geometria kivágott belsejébe helyezett pontforrás által létrehozott hangnyomásértékeket adtam meg Dirichlet peremfeltételként a belső peremen, a geometria külső peremére PML réteget vetítettem, amely biztosította a megfelelő peremfeltételeket. A szimulációk során kapott eredményeket összevettem a kialakult hullámter ideális megoldásaival. Akusztikai hullámterjedési vizsgálatok során alkalmazott anyagjellemzők: a hang terjedési sebessége levegőben ($c = 340 \frac{m}{s}$) és a közeg átlagos sűrűsége, mely levegő esetén $\rho = 1.225 \frac{kg}{m^3}$.

A tesztek másik részében hullámterjedési és visszaverődési problémákat szimuláltam. Az alkalmazott geometria belső pereme kör alakú, a külső peremét PML réteg borítja. A modell egy végtelen hosszú henger síkmetszetén és a környezetében kialakuló hullámter vizsgálatára alkalmas. A szimuláció segítségével a távoli térből érkező és a henger felületén reflektált síkhullám által létrehozott hullámteret vizsgáltam, melyet analitikus megoldással hasonlítottam össze.

Vizsgálatokat végeztem a PML réteg paramétereinek optimális beállítására. Teszteltem, hogyan függ az eredmény a réteg vastagságától és felbontásától különböző geometriákon. Az implementált módszert más hasonló szimulációkhoz tervezett módszerekkel hasonlítottam össze, vizsgáltam a módszereket számítási idő és hiba, valamint az alkalmazott modell méretének szempontjából.

5.1. Vizsgálatok átlátszó geometriákon

5.1.1. Eredmények értékelése 1 dimenzióban

Az egydimenziós PML alkalmazásának egy példája látható az 5.1(a). ábrán, amely egy végtelen hosszú vezetőben kialakult hullámterjedést szimulál véges tartományon. Jól látható, hogy a fizikai tartományon csillapítatlan a hullámterjedés, a fizikai tartomány és a réteg határán folytonosan és reflexiómentesen megy át a hullám, a PML rétegen belül pedig folyamatosan csillapodnak a hullámok visszaverődés nélkül. A tesztek során a hullámok frekvenciáját, a PML réteg vastagságát és felbontását változtattam, ügyelve arra, hogy a tartomány felbontása kielégítse azt az ökölszabályt, miszerint lineáris alakfüggvények esetében a szomszédos felületi csomópontok távolsága nem haladhatja meg a hullámhossz hatodrészét.

A tesztek eredményei az 5.1. táblázatban láthatóak. A táblázat utolsó oszlopában található relatív hiba az ideális Ae^{-ikx} megoldástól való eltérést mutatja a fizikai tartományon. Az eredmények azt mutatják, hogy a PML alacsony elemszám mellett is jól teljesít, a hiba egy adott elemszám elérése után nem csökken annyira, hogy megérné jobb felbontást használni (5.7(a). ábra). A frekvencia növelésével a hiba is nő változatlan rétegvastagság mellett, ezért célszerű vékonyabb réteget alkalmazni a gyorsabb csillapítás miatt.

A tesztek futtatása során a fizikai geometria mérete nem tért el nagymértékben a hullámhossztól. Az 5.7(a). ábrán látható, hogy a fizikai tartomány kiterjedésének növelésével a hiba is növekszik. Ennek

oka az 5.1(b). ábrán látható, az adott hullámhossznál sokkal nagyobb méretű geometria alkalmazása esetén diszperzió lép fel, melynek következtében egyre nagyobb fázishiba jön létre a számított és az analitikus megoldás között. Ennek oka az alkalmazott végeelem modell merevsége, amely diszkrét lépcsőkben közelíti az eredeti megoldást. A diszperzió bizonyos esetekben kiküszöbölhető a hullámegyenlet korrekciójával, azonban ez nem triviális feladat, különösen többdimenziós esetben [16].

5.1. táblázat. 1 dimenziós PML teszteredményei

Frekvencia (Hz)	PML réteg vastagsága (m)	PML réteg felbontása (elem)	Relatív hiba (%)
50	5	30	0,001
		10	0,007
	1	30	0,001
		10	0,001
	$\lambda/4$	30	0,45
		10	0,5
250	5	30	0,13
		10	0,19
	1	30	0,14
		10	0,14
	$\lambda/4$	30	0,03
		10	0,18
1000	5	30	1,46
		10	1,22
	1	30	1,37
		10	1,38
	$\lambda/4$	30	0,02
		10	0,17

5.1.2. Eredmények értékelése 2 dimenzióban

A 2 dimenziós PML egy szimulációja látható az 5.2(a). ábrán, amely a geometria belsejébe helyezett pontforrás terének kialakulását mutatja nyílt térben. A geometria közepén lévő piros jelzés mutatja a forrás helyét, a fehér vonalak a réteg és a fizikai tartomány határát jelölik. Az ábráról leolvashatóak az alkalmazott paraméterek, mint például a PML vastagsága és felbontása. A relatív hiba a kétdimenziós pontforrás által keltett tér, a

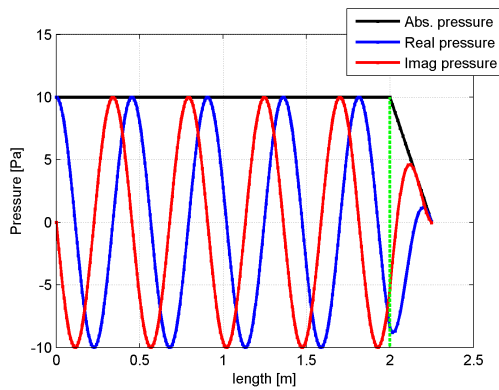
$$\hat{p}(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr(x, y)) \quad x, y \in \mathbb{R}^2$$

ideális megoldástól való eltérést mutatja. Itt $H_0^{(2)}$ a Hankel függvény, amely a Bessel-féle differenciálegyenlet egyik megoldása.

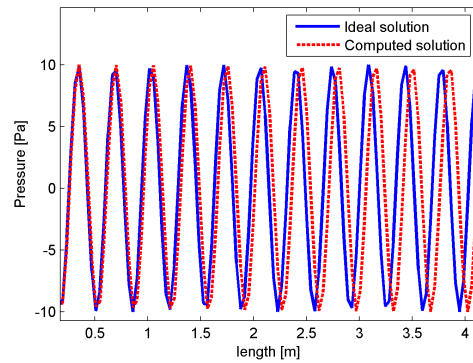
A különböző paraméterekkel végrehajtott szimuláció eredményei az 5.2. táblázatban láthatóak. Észrevehető, hogy viszonylag kis vastagságú és felbontású PML alkalmazása esetén is a szimuláció jól közelíti az elvárt eredményt. A hullámhosszhoz képest hosszabb geometrián azonban nő a hiba. Ennek oka az egy dimenziós esetenél is bemutatott diszperzió.

Lokális PML alkalmazása

Az 5.2(b). ábrán látható egy kör alakú geometria körül lévő PML réteg használatával végrehajtott szimuláció, amely a piros pontba helyezett pontforrás által sugárzott teret mutatja. A geometria külső peremén sugárirányú csillapításra van szükség, a megoldás során lokális csillapítás függvényt használó megvalósítást

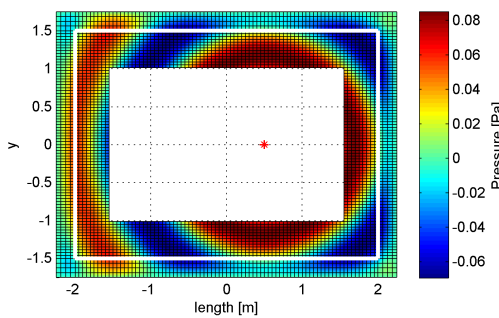


(a) Fizikai tartomány: 2 m, PML: 0.25 m, frekvencia: 750 Hz, relatív hiba: 0.76 %

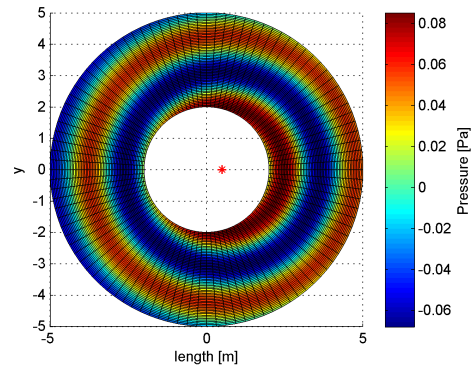


(b) Diszperzió a geometrián

5.1. ábra. PML megvalósítása 1 dimenzióban



(a) Frekvencia: 250 Hz, PML: 0.25 m, PML felbontás: 4, relatív hiba: 2.04 %



(b) Frekvencia: 150 Hz, PML: 1 m, PML felbontás: 4, relatív hiba: 1.33 %

5.2. ábra. PML megvalósítása 2 dimenzióban

alkalmaztam, amely ebben az esetben megegyezik a polárkoordináta-rendszerben felírt globális csillapítás függvényeket használó PML megvalósítással.

A lokális csillapítás függvényeket használó megvalósítás előnye, hogy segítségével bármilyen irányú csillapítás egyszerűen kezelhető. A vizsgált tartomány mérete tetszőlegesen csökkenthető, ha a tartományt nem kell kiegészíteni szabályos geometriákra. A modell szabadságfokainak csökkenése jelentősen lerövidítheti a számítási időt és a tároláshoz szükséges memóriaigényt is csökkenti. A PML alkalmazásának másik előnye, hogy konkáv külső peremű tartományok esetén is használható, mivel a réteg vastagsága véges. Ennek a tulajdonságnak köszönhetően egy aránytalan méretű geometria is egyszerűen vizsgálható PML segítségével, megkímélve a modell kiegészítését konvex tartományra, amely jelentősen megnövelheti a tartomány méreteit.

5.1.3. Összehasonlítás más módszerekkel

Nyílt térben terjedő hullámok szimulációjára alkalmas még a csatolt FEM/BEM és a végtelen elem módszer. A Nihu toolbox mindkét módszert támogatja, így lehetőség volt összehasonlítani a PML-lel mind sebesség, mind hiba szempontjából. Az alkalmazott fizikai geometria metszete az 5.3. ábrán látható közepén kivágott téglatest volt mindhárom esetben, a megoldást 100–700 Hz frekvencia között vizsgáltam. A

5.2. táblázat. 2 dimenziós PML teszteredményei

Frekvencia (Hz)	PML réteg vastagsága (m)	PML réteg felbontása (elem)	Relatív hiba (%)
50	1,0	8	0,16
		4	0,68
	0,25	8	0,18
		4	0,81
	0,1	8	0,18
		4	0,82
250	1,0	8	1,38
		4	3,82
	0,25	8	0,66
		4	2,04
	0,1	8	1,26
		4	2,16
750	1,0	16	4,66
		8	6,76
	0,25	8	5,41
		4	5,61
	0,1	8	5,34
		4	5,79

számított eredmények az 5.3. táblázatban és az 5.4. ábrákon láthatók.

A végtelen elemek és PML használata esetén a rendszermátrix létrehozásának ideje közel azonos. A PML rendszermátrixa frekvenciafüggő, látható, hogy nem okozott jelentősebb eltérést a frekvenciánkénti kiértékelés szemben a végtelen elem frekvenciafüggetlen rendszermátrixával. A csatolt véges-/peremelem módszer lassabb és amint az 5.4. ábrán látható, az alkalmazott geometrián a rezonanciafrekvenciák¹ közelében irregularitás lép fel, melynek köszönhetően a hiba is sokkal nagyobb lesz. A végtelen elemek és a PML rendszermátrixai ritkák, ellentétben a peremelem módszer telített mátrixával, melynek köszönhetően a szabadságfokok száma korlátozott.

5.3. táblázat. Módszerek összehasonlítása átlátszó geometrián

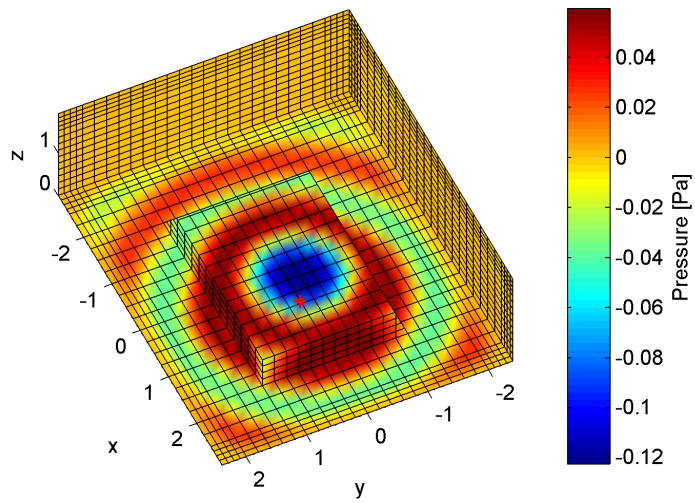
Módszer	Átlagos mátrix összerakási idő (s)	Átlagos megoldási idő (s)	Átlagos relatív hiba (%)	Átlagos kondíciós szám	Szabadságfokok száma
BEM	17,6477	2,8405	2,75	328	4184
IEM	9,9955	1,4242	1,69	11456	10336
PML	10,6621	3,2302	0,82	22142	14896

5.2. Hullámterjedés és reflexió vizsgálata

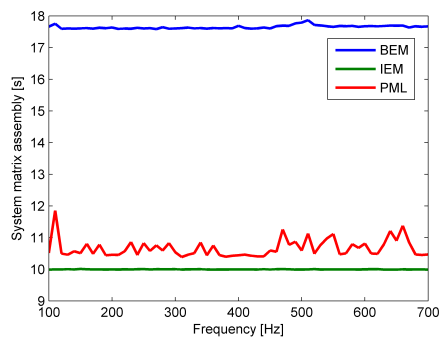
Visszaverődéses problémák esetén a kialakult hangnyomástér a beérkező hullámok és a reflektált hullámok superpozíciójával kapható:

$$\hat{p}_s(\mathbf{x}, \omega) = \hat{p}_{in}(\mathbf{x}, \omega) + \hat{p}_{refl}(\mathbf{x}, \omega).$$

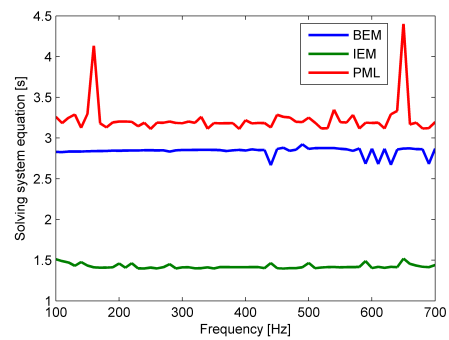
¹A belső kivágott térrész rezonanciafrekvenciáival esnek egybe



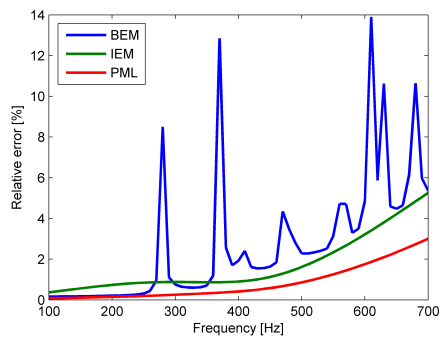
5.3. ábra. Háromdimenziós geometrián végrehajtott szimuláció



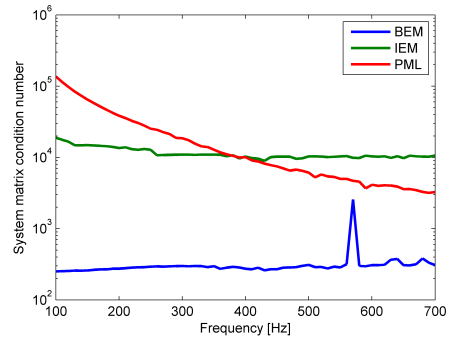
(a) A rendszermátrixok összerakási ideje



(b) Az egyenletrendszer megoldásának ideje



(c) A számított megoldás relatív hibája



(d) A rendszermátrixok kondíciósáma

5.4. ábra. Hullámterjedés vizsgálata: az alkalmazott módszerek jellemzői a frekvencia függvényében

A geometria felületén a sebességértékek megegyeznek a beeső hullámok és a visszavert hullámok sebességértékeinek összegével:

$$v_n(\mathbf{x}, \omega) = v_{\text{in}}(\mathbf{x}, \omega) + v_{\text{refl}}(\mathbf{x}, \omega).$$

A problémamegoldások során a geometria felületét merev falnak tekintjük ($v_n = 0$), így a beeső és a reflektált hullámok sebességértékei között a kapcsolat

$$v_{\text{refl}}(\mathbf{x}, \omega) = -v_{\text{in}}(\mathbf{x}, \omega)$$

lesz.

5.2.1. Eredmények értékelése

A szimuláció során alkalmazott modell részletes leírása megtalálható a C.1. függelékben. A C.2. ábrán látható a szimulációval kapott hullámter. A távolból érkező síkhullám reflektálódik a henger felületén, észrevehető az árnyékolás a henger jobb oldali térrészénél. Egy végtelen hosszú hengerről reflektált síkhullám által keltett hullámter analitikus megoldása [20]:

$$p_s(r, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(m\phi) (J_m(kr) + iY_m(kr)),$$

ahol

$$A_m = -\epsilon_m i^{m+1} e^{-i\gamma_m} \sin(\gamma_m), \quad (5.1)$$

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1, & \text{ha } m = 0, \\ 2, & \text{ha } m > 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\gamma_m = \begin{cases} \tan^{-1}\left(-\frac{J_1(ka)}{Y_1(ka)}\right), & \text{ha } m = 0, \\ \tan^{-1}\left(\frac{J_{m-1}(ka) - J_{m+1}(ka)}{Y_{m+1}(ka) - Y_{m-1}(ka)}\right), & \text{ha } m > 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

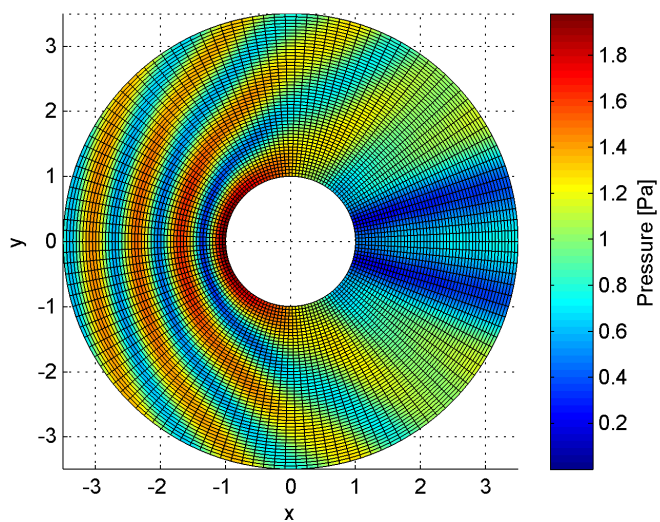
Itt J_m az elsőfajú, Y_m a másodfajú m -ed rendű Bessel-függvény. A C.1(a). ábrán látható szimulációval kapott megoldás alig tér el a C.1(b). ábrán látható ideális megoldástól.

5.2.2. Összehasonlítás más módszerekkel

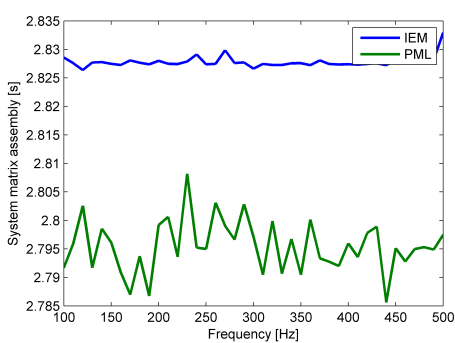
A nyílt téri hullámterjedési szimuláció segítségével összehasonlítottam a PML módszert a végtelen elem módszerrel. Az alkalmazott modell kör belső peremű és kör külső peremű geometria volt (5.5. ábra), melynek külső felületére PML vagy végtelen elemeket vetítettem. A PML réteg felbontása és a végtelen elemeknél alkalmazott polinomok fokszáma azonos volt, így a két modell szabadságfokszámai megegyeztek. A vizsgált frekvenciatartomány 100–500 Hz közötti, az átlagolt eredményeket az 5.4. táblázat tartalmazza. Az 5.6. ábrákon található eredményekből látható, hogy a frekvenciafüggő PML rendszermátrixai gyorsabban felépültek, mint a végtelen elemek frekvenciafüggetlen rendszermátrixai. A számolt megoldási idő között nem volt jelentős eltérés. Látható, hogy PML alkalmazása esetén kisebb frekvenciákon a számított megoldás jobban eltér az analitikus megoldástól, mint végtelen elem esetén, azonban még ezen a tartományon is viszonylag alacsony a hiba.

5.4. táblázat. Módszerek összehasonlítása visszaverődéses problémával

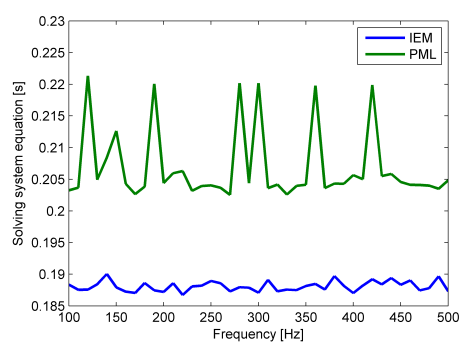
Módszer	Átlagos mátrix összerakási idő (s)	Átlagos megoldási idő (s)	Átlagos relatív hiba (%)	Átlagos kondíciós szám	Szabadságfokok száma
IEM	2,8279	0,1881	1,88	16479	7280
PML	2,7955	0,2069	2,68	6442	7280



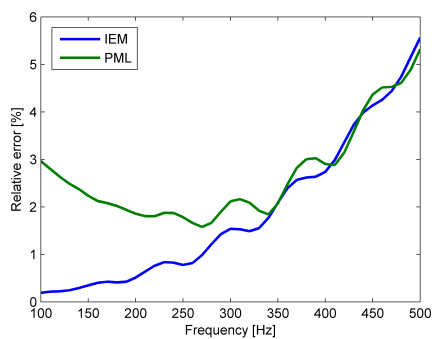
5.5. ábra. Kétdimenziós geometrián vizsgált visszaverődéses szimuláció



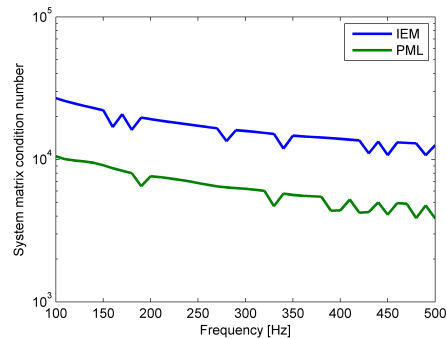
(a) A rendszermátrixok összerakási ideje



(b) Az egyenletrendszer megoldásának ideje



(c) A számított megoldás relatív hibája

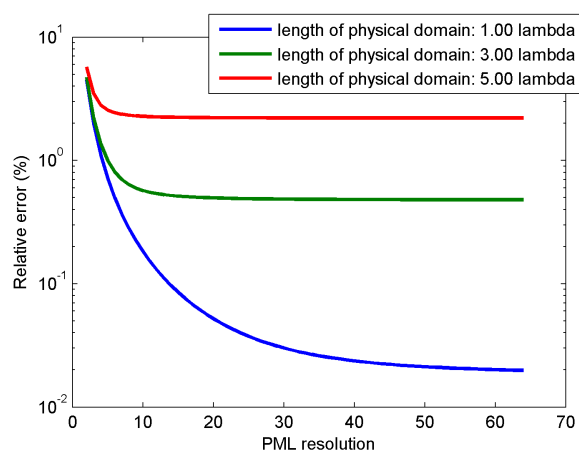


(d) A rendszermátrixok kondíciószáma

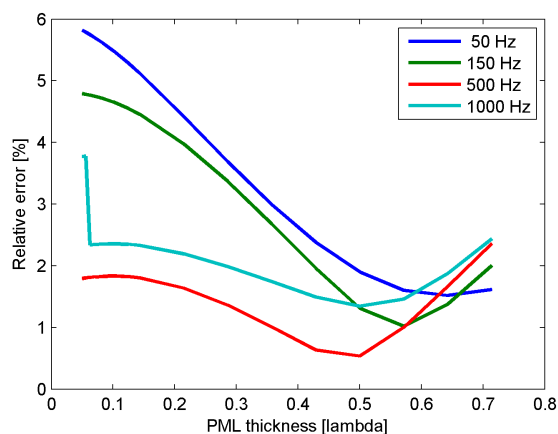
5.6. ábra. Visszaverődés vizsgálata: az alkalmazott módszerek jellemzői a frekvencia függvényében

5.3. PML paramétereinek optimális megválasztása

A megvalósított PML változtatható paramétereit a réteg vastagsága, felbontása és a csillapítás függvényei. A 4.1.1. fejezet bemutatott egy optimális csillapítás függvény választást, amely a legtöbb problémához megfelelő. Az 5.7(a). ábra mutatja a megoldás hibáját a réteg felbontásának függvényében. Viszonylag alacsony elemszám mellett is megfelelő eredmény érhető el, a végeelem modell merevsége miatt a PML felbontásának növelése nem csökkenti jelentősen az okozott hibát. Ez azt jelenti, hogy 6-8 elemnél nem érdemes nagyobbra venni a réteg felbontását, a PML megfelelően teljesít alacsony felbontás mellett is. A különböző rétegvastagság használata mellett okozott hibát mutatja az 5.7(b). ábra. Leolvasható, hogy a hiba akkor minimális, ha a réteg vastagsága közelítőleg a hullámhossz fele.



(a) PML relatív hibája a felbontás függvényében



(b) PML relatív hibája a rétegvastagság függvényében

5.7. ábra. PML paraméterek megválasztása

6. fejezet

Mérés és szimuláció összehasonlítása

Egy valós alkalmazás bemutatása érdekében egy mérést végeztem az akusztikai laboratórium süketszobájában. Építettem egy kocsit modellt, melynek belső felületére egy rezgésgerjesztőt (shaker) erősítettem. A kocsit külső felületére gyorsulásérzékelőket helyeztem, melyek segítségével mértem a rezgésgerjesztő által létrehozott gerjesztést. A modell körül kialakuló hullámtér mérése céljából barkácsoltam egy negyedkör alakú vázát, amelyre mikrofonokat erősítettem. Az eszköz segítségével félgömb felületen mértem a hangnyomást. A megalkotott modell által gerjesztett hullámtér szimulációjához létrehoztam a kocsit felületének hálóját MATLAB környezetben. A modell felületén mért gyorsulásértékeket felhasználva kiszámítottam a kocsit körül kialakuló hullámteret PML segítségével.

6.1. Az épített modell bemutatása

A modell létrehozásakor fontos szempont volt, hogy a belsejébe helyezett rezgésgerjesztőből kiáramló teljesítmény jelentős része a felületen létrejövő rezgés formájában legyen mérhető, ezért a kocsit 9 mm-es rétegelt falemezből készült. A kocsit méreteinek megtervezése után a falemezekből kivágtam a modell egyes darabjait, majd a lemezeket összecsavaroztam. A lemezek között lévő réseket szilikonanyaggal vontam be a belső felületen, hogy megelőzzem a hangteljesítmény kiszivárgását. A kocsit motorháztetőjének belső falára egy Solid Drive rezgésgerjesztőt csavaroztam, melynek tápellátását a modell elején fűrt apró lyukon át vezettem be.

Az elkészített modell méretei:

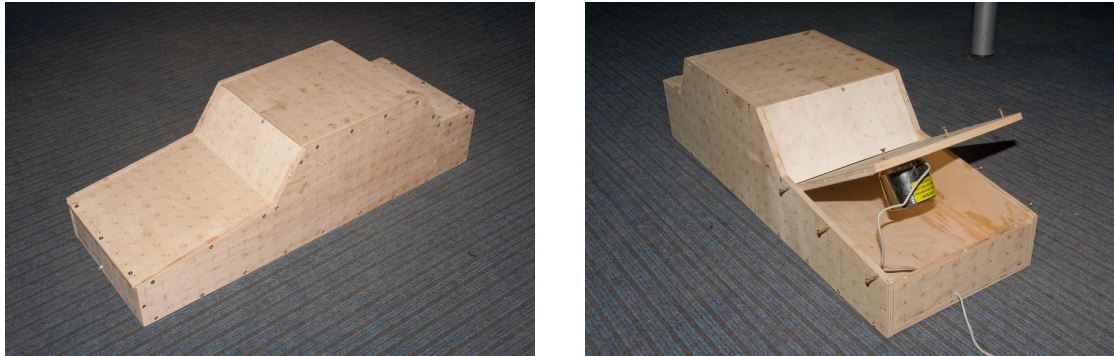
- Hosszúság: 60 cm,
- Szélesség: 21,9 cm,
- Magasság: 17 cm.

A felületen létrejövő gerjesztés méréséhez mérőpontokat rajzoltam a kocsit felületére, melyek közel azonos távolságra helyezkednek el egymástól. Az elkészített kocsit modell a 6.1 ábrán látható.

6.2. A modell felületén létrehozott gerjesztés mérése

A mérés elvégzéséhez a következő eszközöket használtam:

- NI 9234 és Compact RIO – A/D-D/A-adat átalakító,
- 5 darab PCB 353B13 5 mV/g, ICP rezgésérzékelő,
- 3 darab PCB 355M44 20 mV/g, ICP rezgésérzékelő,
- PCB Rezgéskalibrátor,



6.1. ábra. Az elkészített kocszi modell (bal) és a beépített rezgésgerjesztő (jobb).

- mérő- és feldolgozó szoftver.

Az eszközöket az Akusztikai Laboratórium félszabad hangterű szobájába helyeztem, majd kialakítottam a következő mérési elrendezést: A számítógépet, amelyen a mérő szoftver található összekötöttem az analóg-digitális adat átalakítóval. Az átalakítóra kötöttem a 8 darab rezgésérzékelőt és szintén ezen az eszközön keresztül köthető össze a rezgésgerjesztő kivezetése. A megfelelő eredmények érdekében mértem a Solid Drive-ot meghajtó erősítő kimenő jelét is.

6.3. A mérőszoftver alkalmazása

A kocszi felületén gerjesztett gyorsulás és a sugárzott akusztikai tér méréséhez is ugyanazt a mérő- és feldolgozó szoftvert használtam. A szoftver elindítása után az első lépés az átalakítóra kötött rezgésérzékelők beállítása és kalibrálása volt. A gyorsulásmérők érzékenységének beállításához a rendelkezésemre álló PCB rezgéskalibrátort használtam.

Megfelelő mintavételi frekvencia és mintaszám beállítása után a hangszóróra kötött gerjesztés paramétereit a következők voltak:

- 5 V MLS jel,
- 1 előciklus, 6 mérőciklus.

Az alkalmazott MLS jel egy álvéletlen generált sorozat, amely igen elterjedt akusztikai mérések esetén. Előnyei között említhető a mérési tartományban fehér energiaspektrum és a magas jel-zaj viszony. A rendszer állandósult állapotból való kilépése után lecsengő tranzienst jelenségek kiküszöbölése érdekében az átlagolt mérőciklusokat egy mérés nélküli ciklus előzi meg ugyanazon mérőjel használatával.

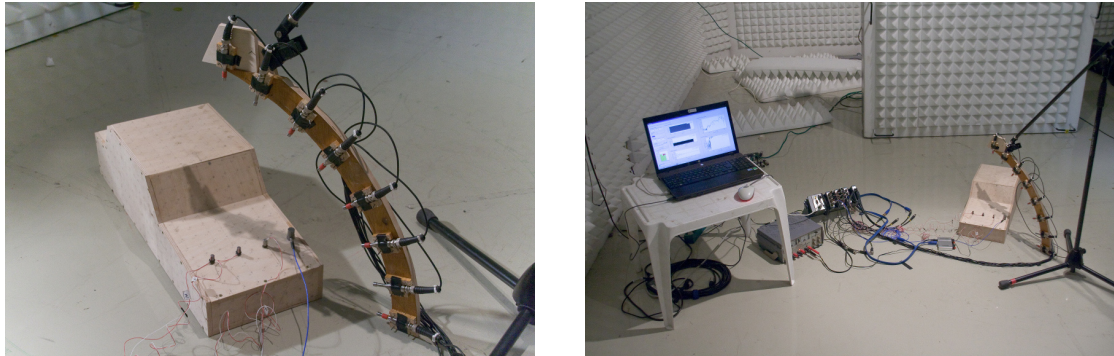
Mivel az alkalmazott analóg-digitális átalakítóra egy időben csak 8 érzékelő köthető, ezért egyszerre csak 8 pontban mértem a kocszi felületén létrejövő rezgéseket. A mérőciklusok lezajlása után az érzékelőket áthelyezve másik 8 mérőpontba megismételtem a folyamatot, amíg a felületen lévő összes mérőpontban meg nem mértem a gyorsulásértékeket, összesen 533 mérőpontban. A rezgésérzékelőket a kocszi felületén megfelelő távolságra helyeztem egymástól, hogy a mérőfejek súlya ne befolyásolja a mérési eredményeket.

A mérés végeztével megkaptam az adott pontokban mért gyorsulásértékek spektrumát széles frekvenciatartományban.

6.4. A modell által sugárzott akusztikai tér mérése

A lesugárzott hullámtér méréséhez az alábbi eszközöket használtam:

- NI 9234 és Compact RIO – A/D-D/A-adat átalakító,
- 8 darab TMS 130B10 mikrofon,



6.2. ábra. A süketszobában kialakított mérési elrendezés szemléltetése

6.1. táblázat. A szimulációs modell paraméterei

Szabadságfokok száma	Elemek száma	PML vastagsága (m)	PML felbontása	Maximális vizsgálható frekvencia (Hz)
49424	45000	0,17	5	1260

- Hangnyomásszint kalibrátor,
- mérő- és feldolgozó szoftver.

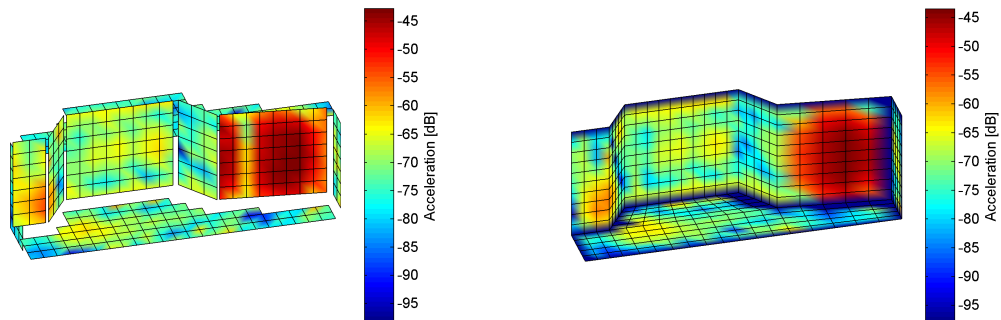
A mérési elrendezés hasonló volt, mint a rezgésmérés esetében. A mikrofonokat az adat átalakítóra kötöttem, majd egy negyedkör alakú vázra helyeztem a kocsi középpontjától 40 cm távolságra. A mérés elvégzéséhez a mérő szoftvert használtam. A mikrofonok kalibrálása után beállítottam a gyorsulásmérés esetében is alkalmazott gerjesztés paramétereit. A mérési ciklus lezajlása után a modellt 5° -onként elforgatva megmértem a kocsi körül kialakuló hullámteret, így megkaptam a hangnyomásértékek spektrumát egy félgömb alakú felületen. A süketszobában felállított gyorsulás- és hangnyomásmérés elrendezése a 6.2 ábrán látható.

6.5. A szimulációs modell

A szimulációk elvégzéséhez egy paraméterezhető modellt építettem MATLAB környezetben. A modell tartalmazza a megépített kocsi felületét, valamint a körülötte kialakuló hullámteret, amelyre PML réteget vetítettem. A kocsi körüli tér nagysága és a modell hálójának felbontása tetszőlegesen paraméterezhető. A nagyobb felbontás segítségével kiterjeszhető a vizsgált frekvenciatartomány, azonban ez memória- és számításiigényes.

A rendszermátrix nagy mérete miatt, a rendszeregyenlet megoldásához egy iteratív megoldó algoritmusra volt szükség, amely a megadott iterációk számának függvényében képes az egzakt megoldást bizonyos hibahatáron belül megközelíteni. Több algoritmus kipróbálása után a BICGSTAB (Biconjugate gradient stabilized method) megoldót választottam, mely a konjugált gradiens módszerek csoportjába tartozik, stabil konvergenciát biztosít aszimmetrikus lineáris egyenletek megoldása esetén [10]. Az algoritmus konvergenciájának gyorsítása érdekében a rendszermátrix LU faktorizációját használtam kondicionálómátrixként. Az alkalmazott szimulációs modell paraméterei láthatóak a 6.1. táblázatban. Az épített háló működőképességének vizsgálatához összevettem egy pontforrás által keltett tér analitikus és számított megoldását a modellen. A vizsgált frekvenciatartományon a relatív hiba nem volt nagyobb 3-4 %-nál.

Elkészítettem a kocsi felületére rajzolt mérőpontok hálóját, amely segítségével a mért gyorsulásértékek ráinterpolálhatóak a szimulációs modellre az adott frekvencián (6.3. ábra). A felületen lévő gyorsulásértékek ismeretében a sugárzott akusztikai tér szimulálható. A 6.4. ábrán a szimulált akusztikai tér síkmetszete



(a) A mért értékek

(b) Az interpolált értékek

6.3. ábra. A mért és az interpolált gyorsulásértékek 900 Hz-en

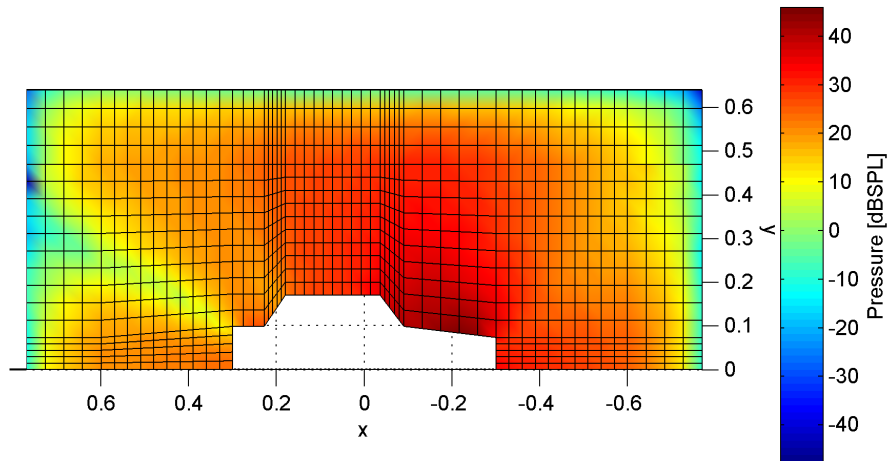
látható egy adott frekvencián. Jól látható a kocszi motorháztetőjére erősített rezgésgerjesztő által létrejövő lesugárzás, a PML rétegen belül a kifelé haladó hullámok fokozatosan csillapodnak. A hangnyomásértékek mértékegysége dB SPL, melynél a referenciaszint $20 \mu\text{Pa}$.

6.6. A mért és a szimulált eredmények összehasonlítása

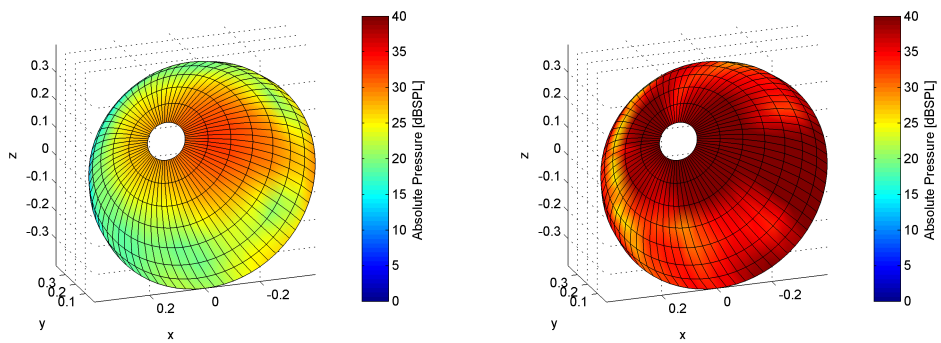
Az első mérés pontatlansága miatt megismételtem a kocszi felületén kialakuló gerjesztés és a körülötte lévő hullámtér mérését. A szimulációs modellben használt kocszi felületét teljesen merev testnek tekintettük, amely a valós eszköz idealizált modellje. A szimuláció segítségével kapott értékek és a mért értékek láthatók a 6.5. ábrán egy adott frekvencián. A félgömbfelszín hálóra interpolált számított értékek látszólag csak amplitúdóban különböznek, az átlagos eltérés körülbelül 8-10 dB. Az amplitúdóeltérés származhat talajrezgésekből, ugyanis a kocszi alja nem tökéletesen illeszkedett a padlóra, így talajirányban is sugárzott. A szimulációs modellben a talajt tökéletesen merev testnek tekintettük. A félgömbfelszínen mért hangnyomásértékek mérése esetén problémát okozott a mikrofonok tökéletes pozicionálása, melynek következménye lehet a szimulált és a mért amplitúdóértékek eltérése.

A hálóra vetített mért és szimulációs eredmények között a legtöbb frekvencián csak amplitúdóbeli eltérés volt, a félgömbfelszínen kialakuló hullámtér jellege hasonló volt. A szimulációs modell esetén a legtöbb tényező alkalmazásakor ideális esetet feltételezünk (homogén hullámegyenlet, tökéletesen merev test), melyek a valós esettől eltérnek, így nem várhatjuk el, hogy a mért és a szimulált eredmények tökéletesen megegyezzenek.

Egy javított mérési elrendezéssel és a szimulációs modellben alkalmazott tényezők korrigálásával pontosabb képet kaphatunk a valódi hullámtérről. Az alkalmazott szimulációs modell segítségével, bár nem tökéletes, de megfelelő képet kaptunk a lesugárzott térről.



6.4. ábra. A szimulált akusztikai tér 1 kHz-en



(a) Számított hangnyomás, frekvencia: 1 kHz

(b) Mért hangnyomás

6.5. ábra. A szimulált és a mért hangnyomásértékek összehasonlítása

7. fejezet

Összefoglalás

A dolgozat keretein belül bemutattam az akusztikai hullámterjedési problémák numerikus számítása során alkalmazott véges elem módszer egy lehetséges kiterjesztését nyílt térben terjedő hullámok szimulálására. A dolgozat írásakor jelenlévő és általam ismert irodalomban bemutatott PML megvalósítás csak szabályos geometriájú problémák számítására alkalmazható, szabálytalan tartományok vizsgálata esetén nagyon nehézkes, kényelmetlen lehet a használata. Az általam kidolgozott és bemutatott lokális csillapításfüggvényeket használó implementáció tetszőleges tartomány esetén egyszerűen és kényelmesen használható a megvalósítás mellé beépített függvénycsalád segítségével. Megmutattam, hogy az általam implementált PML módszerrel hatékonyan végezhetőek el numerikus akusztikai számítások nyílt térben, a technika az alkalmazási keretein belül felveszi a versenyt az alternatív nyíltterű kiterjesztési módszerekkel, sőt azoknál jobban is teljesíthet. A valós felhasználás szemléltetése érdekében bemutattam egy modellkísérletet és a számítógépes szimulációt mérési eredményekkel vettem össze.

Az itt bemutatott megvalósítás segítségével frekvenciatartománybeli analízis lehetséges. A megvalósított PML továbbfejleszthető időtartománybeli vizsgálatok lehetőségessé tételére. A dolgozat írásakor fellelhető irodalom elég hiányos e téren, ezért a témakör számos kutatási lehetőséget rejt magában.

A. Függelék

A PML gyenge alakjának levezetése 1 dimenzióban

A (4.3). egyenletben elvégezve a szorzat deriválását, majd beszorozva $\gamma(x)$ -el kapjuk a következő egyenletet:

$$\frac{1}{\gamma(x)} \frac{\partial^2 p_A(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{\gamma^2(x)} \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x} \frac{\partial p_A(x)}{\partial x} + k^2 \gamma(x) p_A(x) = 0.$$

A következőkben az egyszerűség miatt a $\frac{\partial}{\partial x}$ operátort a ∂_x operátorral jelölöm. A fizikai és PML tartományra felírható egyenletek gyenge alakjai:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_F} \phi(x) [\partial_x^2 p_F(x) + k^2 p_F(x)] dx &= 0, \\ \int_{\Omega_A} \phi(x) \left[\frac{1}{\gamma(x)} \partial_x^2 p_A(x) - \frac{1}{\gamma^2(x)} \partial_x \gamma(x) \partial_x p_A(x) + k^2 \gamma(x) p_A(x) \right] dx &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

A fizikai tartományra vonatkozó egyenletet tovább alakítva kapjuk¹:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_F} \phi(x) \partial_x p_F(x) dx - \int_{\Omega_F} \partial_x \phi(x) \partial_x p_F(x) dx + \int_{\Omega_F} k^2 \phi(x) p_F(x) dx &= 0 \\ \partial\Omega_F &= \partial\Omega_v \cup \partial\Omega_{FA}, \\ \int_{\partial\Omega_F} \phi(x) \partial_x p_F(x) dx &= \int_{\partial\Omega_v} \phi(x) \partial_x p_F(x) dx + \int_{\partial\Omega_{FA}} \phi(x) \partial_x p_F(x) dx, \\ \int_{\partial\Omega_{FA}} \phi(x) \partial_x p_F(x) dx &= \int_{\partial\Omega_{FA}} \phi(x) \frac{1}{\gamma(x)} \partial_x p_A(x) dx. \end{aligned}$$

Az (A.1). egyenlet középső tagját tovább alakítva

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_A} \frac{1}{\gamma^2(x)} \partial_x \gamma(x) \phi(x) \partial_x p_A(x) dx &= \int_{\partial\Omega_A} -\frac{1}{\gamma(x)} \phi(x) \partial_x p_A(x) dx \\ &+ \int_{\Omega_A} \frac{1}{\gamma(x)} \partial_x (\phi(x) \partial_x p_A(x)) dx \\ \partial\Omega_A &= \partial\Omega_{FA} \cup \partial\Omega_D \end{aligned}$$

egyenlethez jutunk. Az egyenlet utolsó tagját tovább alakíthatjuk

$$\int_{\Omega_A} \frac{1}{\gamma(x)} \partial_x (\phi(x) \partial_x p_A(x)) dx = \int_{\Omega_A} \frac{1}{\gamma(x)} \partial_x \phi(x) \partial_x p_A(x) dx + \int_{\Omega_A} \frac{1}{\gamma(x)} \phi(x) \partial_x^2 p_A(x) dx$$

¹felhasználva a $\nabla \cdot (\phi(x) \nabla p(x)) = \nabla \phi(x) \nabla p(x) + \phi(x) \nabla^2 p(x)$ összefüggést

módon. Ezeket felhasználva és visszahelyettesítve az (A.1). egyenletbe megkapjuk a

$$\int_{\partial\Omega_A} \frac{1}{\gamma(x)} \phi(x) \partial_x p_A(x) dx - \int_{\Omega_A} \frac{1}{\gamma(x)} \partial_x \phi(x) \partial_x p_A(x) dx + \int_{\Omega_A} k^2 \gamma(x) p_A(x) \phi(x) dx = 0$$

egyenletet. Felhasználva az

$$\int_{\partial\Omega_A} \frac{1}{\gamma(x)} \phi(x) \partial_x p_A(x) dx = - \int_{\partial\Omega_{FA}} \frac{1}{\gamma(x)} \phi(x) \partial_x p_A(x) dx + \int_{\partial\Omega_D} \frac{1}{\gamma(x)} \phi(x) \partial_x p_A(x) dx$$

egyenletet és összegezve az eddigi eredményeket jutunk az adott probléma gyenge alakjához:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_A} \frac{1}{\gamma(x)} \partial_x \phi(x) \partial_x p_A(x) dx - \int_{\Omega_A} k^2 \gamma(x) \phi(x) p_A(x) dx + \\ \int_{\Omega_F} \partial_x \phi(x) \partial_x p_F(x) dx - \int_{\Omega_F} k^2 \phi(x) p_F(x) dx = \int_{\partial\Omega_v} \phi(x) \partial_n p_F(x) dx. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

B. Függelék

PML beépítése a Nihu toolboxba

B.1. A mesh struktúra

A mesht struktúraként tároljuk MATLAB környezetben a következő mezőkkel:

- mesh.Nodes
- mesh.Materials
- mesh.Properties
- mesh.Elements

Az $N \times 4$ méretű Nodes mező tartalmazza a mesh csomópontjait (B.1. táblázat). Az ID a csomópont egyedi azono-

ID	x	y	z
----	---	---	---

B.1. táblázat. mesh.Nodes szerkezete

sítója, x , y és z a helykoordinátái. A Materials mező tartalmazza a struktúra anyagjellemzőit, amely a B.1. táblázatban látható folyadék vagy gáz halmazállapotú anyag esetében. Az első oszlop az anyagjellemző azonosítója, a

ID	type	rho	c	0	0
----	------	-----	---	---	---

B.2. táblázat. mesh.Materials szerkezete

második oszlop tartalmazza az anyag típusszámát, amely ebben az esetben 1, rho az anyag átlagos sűrűsége, c a hang terjedési sebessége a közegben. A Properties mező tartalmazza a struktúra jellemzőit, amely alapesetben nincs használva. Az Elements mező a mesh elemeit tárolja, egyes sorainak a szerkezete a B.1. táblázatban látható. Az első

ID	type	MatID	PropID	NodeID1	NodeID2	...	NodeIDN
----	------	-------	--------	---------	---------	-----	---------

B.3. táblázat. mesh.Elements szerkezete

oszlop tartalmazza az elemek egyedi azonosítószámait, type az elem típusa, MatID és PropID az elem anyag és jellemző azonosítói, ezeket követi az elem csomópontjainak azonosítószámai. Az egyes elemek esetén megadott azonosítók a Nodes, Materials és Properties mezők első oszlopaiban megadott azonosítószámokra hivatkoznak. Az elemek típusai a következő formátumban adhatóak meg:

$$\text{type} = \text{ModelType} * 100 + \text{dim} * 10 + \text{node},$$

ahol ModelType az elem feldolgozásakor alkalmazott modell típusa (0 alapesetben, 1 végtelen elemek esetén, 2 PML elemek esetén), dim az elem dimenziószáma, node a csomópontok száma. Így például egy alap kétdimenziós háromszögelem típusa 23, egy háromdimenziós négyszög PML elem típusa pedig 238.

B.2. PML-adatok megadása a mesh struktúrában

PML elemeket is tartalmazó struktúra szerkezete a következő mezővel bővül:

- mesh.PMLData

A PMLData tartalmazza a PML elemek feldolgozásához szükséges további adatokat, ennek szerkezete a B.2. táblázatban látható. Az első sorban látható adatokat a helykoordinátáktól függő $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ használata esetén, a második sorban

ID	@sigmax	@sigmay	@sigmaz	[min max]	[min max]	[min max]
ID	@sigma					

B.4. táblázat. PMLData szerkezete

látható adatokat a koordinátatranszformáció használata esetén kell megadni. Látható, hogy a koordinátatranszformáció használata esetén nincs szükség a PML réteg határainak megadására. Az oszlopok jelentései:

ID megegyezik a Properties-ben megadott PMLDataID-vel,

@sigma az adott gamma függvényhez használt csillapításfüggvény leírója¹,

xyz_min xyz_max az adott irányban lévő PML külső határai

A mesh.Elements mező type oszlopában szereplő ModelType PML elemek esetében 2, így az elemek típusa 200+ az alap elemtípus. A struktúra Properties része tartalmazza a PML elemek tulajdonságait, ennek egy sorának szerkezete látható a B.2. táblázatban. Az oszlopok tartalmi:

ID elem azonosító,

PropType PML elem esetén 3,

PMLDataID PMLData azonosító,

L PML réteg vastagsága,

N PML réteg felbontása (csak transzformáció használata esetén, egyébként 0),

n az adott elem hányadik a rétegben (csak transzformáció használata esetén, egyébként 0).

ID	PropType	PMLDataID	L	N	n
----	----------	-----------	---	---	---

B.5. táblázat. Properties szerkezete

B.3. pml_mk - PML mátrixok számítása

PML használata esetén szükség van a modell tömeg- és merevségi mátrixainak számítására, erre szolgál a pml_mk függvény, amely a mátrixok PML elemekre vonatkozó részét számítja ki. Ennek szintaxisa a következő:

$$[M K DOF] = \text{pml_mk}(\text{model}, \text{omega})$$

vagy

$$[I J M K DOF] = \text{pml_mk}(\text{model}, \text{omega}, \text{'ind'}).$$

Az első esetben a függvény kiszámolja a megadott modell PML mátrixait adott körfrekvencián, melyek a DOF vektor segítségével felépíthetők. Az index opció használatakor a visszatérési értékek között a mátrixértékek mellett megjelennek a sor- és oszlopindexek, mindegyik oszlopvektorként.

A modell fizikai geometriájához tartozó mátrixokat a model_mk függvény számítja ki, ezt és a PML elemekre számított mátrixokat összeillesztve kapjuk a teljes modell mátrixait. A sor- és oszlopindexek alapján gyorsabban összeilleszthetők a mátrixok, mint ha a DOF vektorok alapján számoznánk újra a mátrixokat (a model_mk függvénynek is megadható index opció).

A PML tömeg- és merevségi mátrixa nem frekvenciafüggetlen, ezért minden vizsgált frekvencián újra ki kell értékelni. Elég azonban csak a PML elemekre a mátrixokat frekvenciánként kiszámolni, így csak a pml_mk függvényt kell minden vizsgált frekvenciára meghívni.

¹function_handle

B.4. *project_pml* - PML réteg vetítése tetszőleges felületre

Általában jelentős könnyebbséget jelent, ha nem kell külön a vizsgált tartomány köré építeni a PML réteget. A *project_pml* függvénynek elég a geometria felszínét megadni, melyre a PML réteget vetíteni akarjuk. A kapott struktúra könnyen összeilleszthető az eredeti geometriával. A *project_pml* szintaxisa:

```
pml_mesh = project_pml(surface, L, N, method, varargin),
```

surface a geometria felszíne, **L** a PML réteg hossza, **N** a réteg felbontása, **method** a kívánt vetítési mód, **varargin** a megadott vetítési mód paraméterei. A vetítési módok a következők lehetnek:

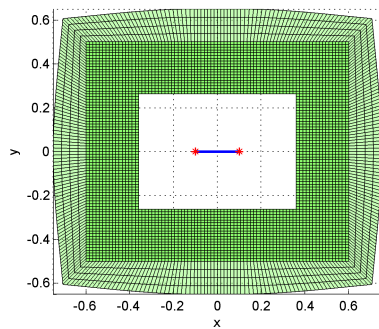
'**point**' Vetítés megadott pontból, paraméternek meg kell adni a pont koordinátáit.

'**line**' Vetítés vonalról, két paraméter szükséges hozzá, egy pont, amely a vonalon található és a vonal irányvektora.

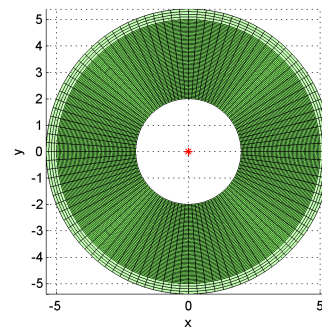
'**section**' Vetítés szakaszcsontról, meg kell adni a szakasz két végpontját.

'**plane**' Vetítés síkról, szükséges hozzá egy pont, amely a síkon található és a sík normál vektora.

'**nodes**' Vetítés független pontokból, meg kell adni hozzá a független pontok koordinátáiból álló mátrixot, a független pontok száma meg kell egyezzen a felszín csomópontjainak számával.



(a) Vetítés szakaszcsontról



(b) Vetítés pontból

B.1. ábra. PML réteg vetítése

C. Függelék

MATLAB demo-k PML alkalmazásával

C.1. Síkhullám reflexió hengerről PML alkalmazásával

Ez a demo bemutatja a nyílt térben terjedő, végtelen hosszú hengeren reflektált síkhullám terének szimulációját PML alkalmazásával. A számított megoldást összehasonlítja az analitikus megoldással.

Problémafelvetés és modellalkotás

Akusztikai és gerjesztés paraméterek megadása.

```
rho = 1.225;           % levegősűrűség [kg/m3]
c   = 340;            % hangsebesség [m/s]
f   = 250;            % frekvencia [Hz]

p_x0 = [1 0 0];       % síkhullám iránya
```

Geometria paraméterek.

```
R_arc = 0.5;          % henger sugara
N_arc = 10;           % negyed körív felbontása
L_slab_x = 3.5;       % tartomány szélessége
L_slab_y = 3.5;       % tartomány magassága
N_slab = 20;          % perem felbontása
Le = 0.1;             % elemek nagysága
```

PML paraméterek.

```
L_pml = 0.25;        % PML réteg vastagsága
N_pml = 5;           % PML felbontása
```

Mesh létrehozása. A megadott sugarú hengert körbe vesszük az adott szélességű és magasságú téglafelülettel, a vizsgált tartományt háromszög elemekkel egészítjük ki.

```
phi = linspace(0,pi/2,N_arc+1).'; % negyedhenger peremének szögei

% csomópontok koordinátái
cx1 = [R_arc*cos(phi) R_arc*sin(phi)];
cx2 = [zeros(ceil(N_slab/2)+1,1) linspace(R_arc,L_slab_y/2,ceil(N_slab/2)+1).'];
cx3 = [linspace(0,L_slab_x/2,N_slab+1).' L_slab_y/2*ones(N_slab+1,1)];
cx4 = [L_slab_x/2*ones(N_slab+1,1) linspace(L_slab_y/2,0,N_slab+1).'];
cx5 = [linspace(L_slab_x/2,R_arc,ceil(N_slab/2)+1).' zeros(ceil(N_slab/2)+1,1)];
coords = [cx1;cx2(2:end,:);cx3(2:end,:);cx4(2:end,:);cx5(2:end-1,:)];

% negyedtartomány hálójának létrehozása
sq.Nodes = (1:size(coords,1)).'; % csomópont azonosítók
```

```

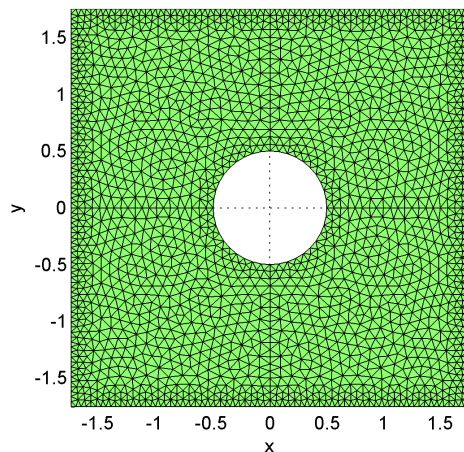
sq.Nodes(:,2:3) = coords; % csomópont koordináták
sq.Nodes(:,4) = 0;
sq.Elements = (1:size(coords,1)).'; % elem azonosítók
sq.Elements(:,2) = 12; % elemtípus
sq.Elements(:,3:4) = 1; % anyagjellemző és tulajdonság azonosító
sq.Elements(:,5) = (1:size(coords,1)).'; % elemekhez tartozó csomópontok beállítása
sq.Elements(:,6) = [(2:size(coords,1)).';1];
sq.Properties = 1; % anyagjellemző és tulajdonság megadása
sq.Materials = 1;

% tartomány kitöltése háromszög elemekkel és a háló tükrözése
sq = fill_polygon(sq,Le);
sqr = join_meshes(sq,reflect_mesh(sq,[-1 0 0]));
sqd = reflect_mesh(sqr,[0 -1 0]);
model = merge_coincident_nodes(join_meshes(sqr,sqd));
model.Properties = [1,1];
model.Materials = [1,1];

```

Modell kirajzolása.

```
plot_mesh(model);
```



PML háló építése a modell köré

A modell külső és belső pereme.

```

boundary = get_boundary(model);
[bxn bxe] = mesh_select(boundary, sprintf('x==%f',L_slab_x/2),'ind');
[byn bye] = mesh_select(boundary, sprintf('y==%f',L_slab_y/2),'ind');
boundx = boundary; % a jobb külső perem
boundx.Nodes = boundary.Nodes(bxn,:);
boundx.Elements = boundary.Elements(bxe,:);
boundy = boundary; % a felső külső perem
boundy.Nodes = boundary.Nodes(byn,:);
boundy.Elements = boundary.Elements(bye,:);

% PML háló létrehozása a peremek nyújtásával
pml_meshr = extrude_mesh(boundx,[1 0 0].*L_pml/N_pml,N_pml);
pml_meshl = reflect_mesh(pml_meshr,[-1 0 0]);
pml_mesht = extrude_mesh(boundy,[0 1 0].*L_pml/N_pml,N_pml);

```

```

pml_meshd = reflect_mesh(pml_meshu,[0 -1 0]);

% PML háló létrehozása a sarkokban
pml_slab = create_slab([L_slab_x/2 L_slab_y/2 0;
    L_slab_x/2+L_pml L_slab_y/2 0;
    L_slab_x/2+L_pml L_slab_y/2+L_pml 0;
    L_slab_x/2 L_slab_y/2+L_pml 0],N_pml);
pml_slabu = join_meshes(pml_slab,reflect_mesh(pml_slab,[-1 0 0]));
pml_slabd = reflect_mesh(pml_slabu,[0 -1 0]);

% PML hálók összeillesztése
pml_mesh = join_meshes(pml_meshr,pml_meshl,pml_meshu,pml_meshd,...
    pml_slabu,pml_slabd);

% PML háló ráillesztése a tartományra
pml_model = merge_coincident_nodes(join_meshes(model,pml_mesh));
pml_model.Elements = drop_IDs(pml_model);
pml_model.Nodes(:,1) = (1:size(pml_model.Nodes,1)).'; % csomópontok újraszámozása
pml_model.Materials = [1 1 rho c 0 0]; % anyagjellemzők megadása
pml_model.Properties(2,1:6) = [3 3 1 L_pml 0 0]; % PML tulajdonságok beállítása

% PML elemek beállítása, PML adatok megadása
pml_model.Elements(pml_model.Elements(:,2)==24,4) = 3;
pml_model.Elements(pml_model.Elements(:,2)==24,2) = 224;
pml_model.PMLData = {1 @pml_sigma_glob @pml_sigma_glob []...
    [-L_slab_x/2 L_slab_x/2] [-L_slab_y/2 L_slab_y/2] []};

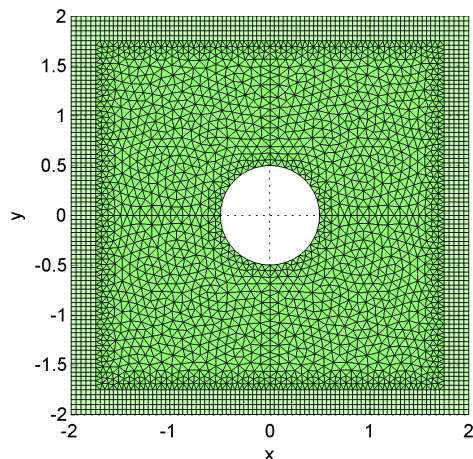
```

A kiterjesztett modell kirajzolása.

```

plot_mesh(pml_mesh); alpha .5;
plot_mesh(model);

```



Rendszermátrix összerakása

A rendszermátrixok megépítése külön történik a végelem hálóra és a PML hálóra. A függvények által generált mátrixindexek és -értékek segítségével megkapható a teljes modell rendszermátrixa.

```

om = 2*pi*f; % körfrekvencia

[I J M K DOF] = model_mk(pml_model,'ind'); % végelem modell értékek

```

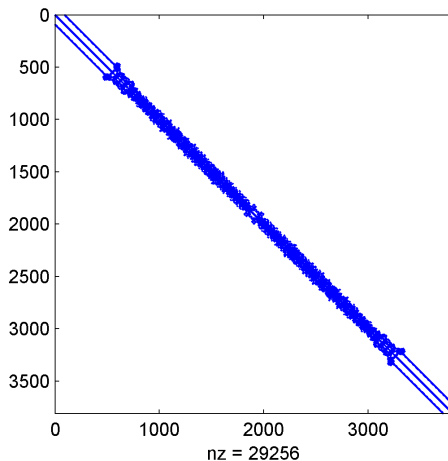


```
[Ip Jp Mp Kp DOFp] = pml_mk(pml_model,om,'ind'); % PML modell értékek
[M K DOF] = model_system({I J M K DOF},{Ip Jp Mp Kp DOFp}); % a két modell mátrixainak összeil
[A DOFa] = model_a(get_boundary(pml_model)); % felületi mátrix

S = K - om^2*M; % a modellhez tartozó rendszermátrix
```

A rendszermátrix struktúrája.

```
spy(S);
```



Megoldás számítása

A végtelen henger peremét merev falnak tekintjük. A nyílt térben terjedő és a henger falán reflektálódó síkhullám tere a rendszermátrix segítségével számítható. A szimulált hangnyomásértékek összevethetők az analitikus megoldással. Az eredő hullámter a nyílt térben terjedő síkhullám és a reflektált hullám szuperpozíciójával kapható meg.

```
% gerjesztés és megoldás indexek
iexc = mesh_select(pml_model,sprintf('r<%f',R_arc+1e-3),'ind');
ife = mesh_select(pml_model,sprintf('abs(x)<%f & abs(y)<%f',...
    L_slab_x/2,L_slab_y/2),'ind');

% csomópontok polárkoordinátái
[phi r] = cart2pol(pml_model.Nodes(:,2),pml_model.Nodes(:,3));

k = om/c; % hullámszám
```

Az analitikus reflektált megoldás megkapható a `planewave_cyl2d` függvény segítségével, amely a megadott polárkoordinátájú csomópontokban visszaadja az ideális megoldást.

```
prefl_an = planewave_cyl2d(r,phi,R_arc,k,100);

% síkhullám nyomás- és gradiensértékei
[pin, qin] = incident('plane',p_x0,pml_model.Nodes(:,2:4),...
    pml_model.Nodes(:,2:4)./ repmat(r,1,3),k);

% sebességértékek a gerjesztő felületen
vin = zeros(size(pml_model.Nodes,1),1);
vin(iexc) = qin(iexc)/(li*om*rho);

prefl = S\ (li*om*A*vin); % reflektált hangnyomásértékek
psol = prefl;
```

```
psol(ife) = psol(ife)+pin(ife); % számított eredő hangnyomásértékek
psol_an = pin+prefl_an; % analitikus eredő hangnyomásértékek
```

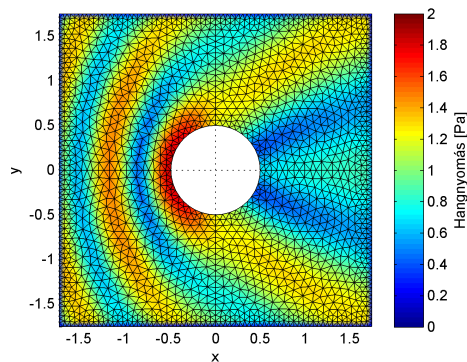
```
% relatív hiba
perr = norm(psol(ife)-psol_an(ife))/norm(psol_an(ife));
```

Eredmény kirajzolása.

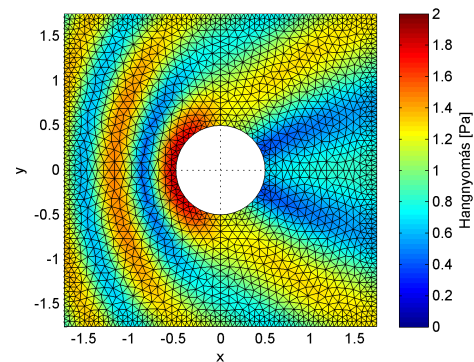
```
fe_model = pml_model;
fe_model.Elements = fe_model.Elements(fe_model.Elements(:,2)<200,:);
```

```
figure;
plot_mesh(fe_model,abs(psol));
ylabel(colorbar, 'Hangnyomás [Pa]');
caxis([0 2]);
```

```
figure;
plot_mesh(fe_model,abs(psol_an));
ylabel(colorbar, 'Hangnyomás [Pa]');
caxis([0 2]);
```



(a) Számított megoldás, PML: 0.25 m, felbontás: 5 elem, relatív hiba: 1.42 %



(b) Analitikus megoldás, frekvencia: 250 Hz

C.1. ábra. Síkhullám-reflexió hengeren, számított és analitikus megoldás

C.2. Hullámterjedés nyílt térben lokális PML alkalmazásával

Ez a demo bemutatja a lokális csillapításfüggvényt használó PML alkalmazását egy kör alakú tartományon. A szimuláció segítségével megkapjuk a kialakuló hullámteret egy gyűrű alakú geometria körül.

Problémafelvetés és modellalkotás

Akusztikai és gerjesztés paraméterek megadása.

```
rho = 1.225; % levegősűrűség [kg/m3]
c = 340; % hangsebesség [m/s]
f = 250; % frekvencia [Hz]
```

```
p_x0 = [0 0 0]; % pontforrás koordinátái
```

Geometria paraméterek.

```

R_ann    = 1;           % gyűrű belső sugara
L_ann    = 0.25;        % gyűrű vastagsága
phi_ann  = 3*pi/4;     % nyílási szög
R_circle = 3.5;        % vizsgált tartomány sugara
N_inncirc = 32;        % belső kör felbontása
N_circ_r = 3*N_inncirc; % kör felbontása sugár irányban

```

PML paraméterek.

```

L_pml = 0.5;          % PML réteg vastagsága
N_pml = 5;            % PML felbontása

```

Mesh létrehozása. A tartomány hálóját egy kör alakú mesh és a külső felületére görbített háló adja meg. A gyűrű alakú geometria a külső hálóból lesz kivágva a megfelelő elemilleszkedés érdekében.

```

inncirc = create_circle(R_ann,N_inncirc); % belső kör létrehozása
slab = create_slab([R_circle-R_ann,2*pi],[N_circ_r,4*N_inncirc]);
slab = translate_mesh(slab,[R_ann 0 0]); % a külső felület hálója

```

```

r = slab.Nodes(:,2); % x koordináták
p = slab.Nodes(:,3); % y koordináták
circle = slab;
circle.Nodes(:,2:3) = [r.*cos(p), r.*sin(p)]; % háló rágörbítése a belső körre
circle = merge_coincident_nodes(join_meshes(inncirc,circle)); % a két mesh összeillesztése
circle.Materials = [1 1 rho c 0 0]; % anyagjellemzők megadása
circle.Properties = [1 1 0 0 0 0];

```

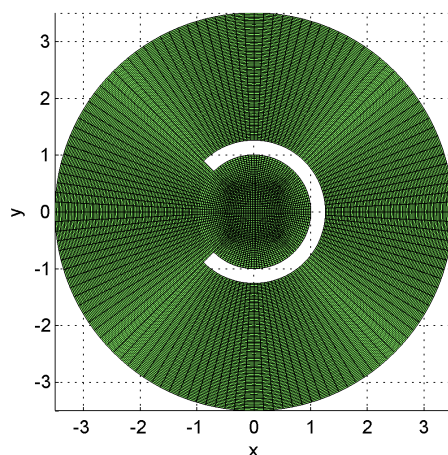
```

dR = (R_circle-R_ann)/N_circ_r; % elem nagysága sugár irányban
[indn inde] = mesh_select(circle,sprintf('r>%f & r<%f & abs(phi)<%f',...
    R_ann,R_ann+L_ann-dR/3,phi_ann),'ind','none'); % gyűrű geometria kivágása
circle.Elements = circle.Elements(inde,:);
circle = drop_unused_nodes(circle);

```

Modell kirajzolása.

```
plot_mesh(circle);
```



PML háló vetítése a modellre

A modell külső pereme.

```

boundary = get_boundary(circle);
[bn be] = mesh_select(boundary, sprintf('r>%f', R_circle-dR/3), 'ind');
boundary.Nodes = boundary.Nodes(bn, :);
boundary.Elements = boundary.Elements(be, :);

```

A megadott vastagságú és felbontású PML réteget a modell külső felületére vetítjük. Ehhez a `project_pml` függvényt használjuk, a vetítési pont a kör középpontja lesz.

```

pml_mesh = project_pml(boundary, L_pml, N_pml, 'point', [0 0 0]);
pml_model = merge_coincident_nodes(join_meshes(circle, pml_mesh));
pml_model.Elements = drop_IDs(pml_model);
pml_model.Nodes(:, 1) = (1:size(pml_model.Nodes, 1)).'; % csomópontok újraszámozása
pml_model.PMLData = {1 @pml_sigma_loc}; % PML adatok beállítása

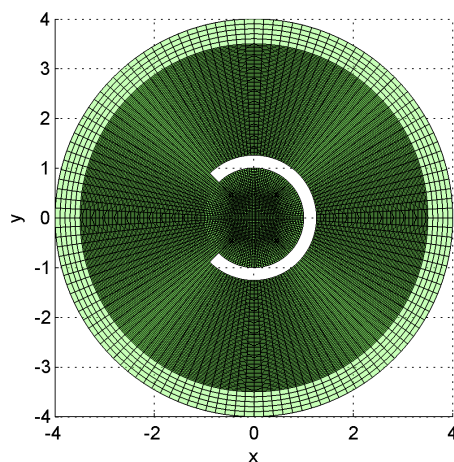
```

A kiterjesztett modell kirajzolása.

```

plot_mesh(pml_mesh); alpha .5;
plot_mesh(circle);

```



Rendszermátrix összerakása

A rendszermátrixok megépítése külön történik a végeselem hálóra és a PML hálóra. A függvények által generált mátrixindexek és -értékek segítségével megkapható a teljes modell rendszermátrixa.

```

om = 2*pi*f; % körfrekvencia

[I J M K DOF] = model_mk(pml_model, 'ind'); % végeselem modell értékek
[Ip Jp Mp Kp DOFp] = pml_mk(pml_model, om, 'ind'); % PML modell értékek
[M K DOF] = model_system({I J M K DOF}, {Ip Jp Mp Kp DOFp}); % a két modell mátrixainak összeil
[A DOFa] = model_a(get_boundary(pml_model)); % felületi mátrix

S = K - om^2*M; % a modellhez tartozó rendszermátrix

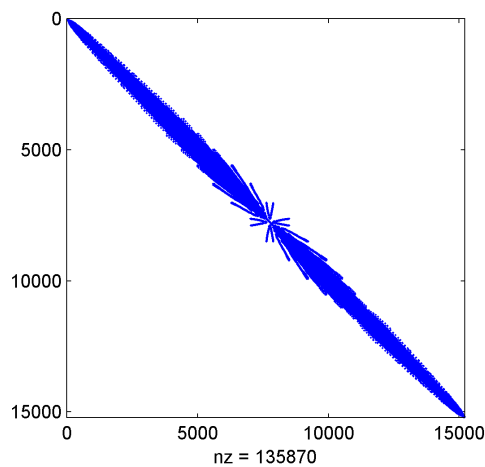
```

A rendszermátrix elemeinek elrendezése.

```

spy(S);

```



Megoldás számítása

A gyűrű alakú geometriát merev falnak tekintjük. A gyűrű közepére helyezett pontforrás tere egyszerűen generálható, a reflektált hullámter pedig a rendszermátrix segítségével számítható. A megoldás a két hullámter szuperpozíciójával kapható meg.

```
% modell külső és belső pereme
boundary = drop_unused_nodes(get_boundary(pml_model));

% gerjesztés és megoldás indexek
iexc = mesh_select(boundary, sprintf('r<%f', R_ann+dR/3));
iexci = mesh_select(boundary, sprintf('r<%f', R_ann+dR/3));
iexcu = mesh_select(boundary, sprintf('r>%f & r<%f & y>0', R_ann+dR/3, R_ann+L_ann-dR/3));
iexcd = mesh_select(boundary, sprintf('r>%f & r<%f & y<0', R_ann+dR/3, R_ann+L_ann-dR/3));
ife = mesh_select(pml_model, sprintf('r<%f', R_circle+dR/3), 'ind');

% gerjesztő felület normálvektorai
r = pml_model.Nodes(:, 2:4);
d0 = sqrt(dot(r, r, 2));
n = r./repmat(d0, 1, 3);
n(iexci, :) = -n(iexci, :);
n(iexcu, 1:2) = repmat([-1 1], length(iexcu), 1).*fliplr(n(iexcu, 1:2));
n(iexcd, 1:2) = repmat([1 -1], length(iexcd), 1).*fliplr(n(iexcd, 1:2));

% 2-dimenziós pontforrás nyomás- és gradiensértékei
k = om/c;
dv = r - repmat(p_x0, size(r, 1), 1);
d = sqrt(dot(dv, dv, 2));
dv = dv./repmat(d, 1, 3);

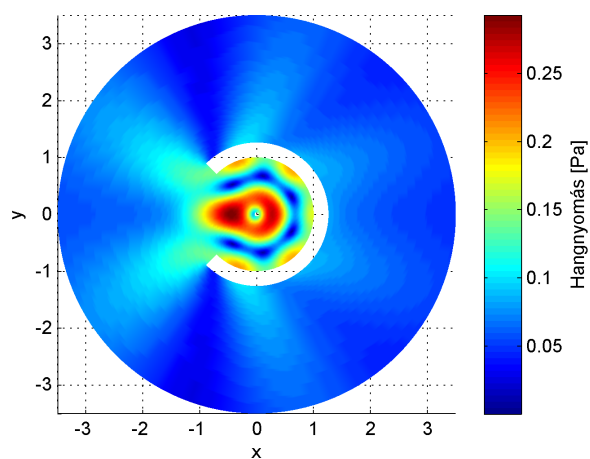
pin = 1i/4*besselh(0, 2, k*d);
qin = -1i/4*k*besselh(1, 2, k*d).*dot(dv, n, 2);

% sebességértékek a gerjesztő felületen
vin = zeros(size(pml_model.Nodes, 1), 1);
vin(iexc) = qin(iexc)/(1i*om*rho);

prefl = S\((1i*om*A*vin); % reflektált hangnyomásértékek
psol = prefl;
psol(ife) = psol(ife)+pin(ife); % a kialakult tér hangnyomásértékei
```

Eredmény kirajzolása.

```
fe_model = pml_model;  
fe_model.Elements = fe_model.Elements(fe_model.Elements(:,2)<200,:);  
  
figure;  
plot_mesh(fe_model,abs(psol)); shading interp;  
ylabel(colorbar, 'Hangnyomás [Pa]');
```



Számított megoldás, PML: 0.5 m, felbontás: 5 elem, frekvencia: 250 Hz

C.2. ábra. Hullámtér gyűrű alakú geometria körül

Irodalomjegyzék

- [1] R. J. Astley, J-P. Coyette, and L. Cremers. Three-dimensional wave-envelope elements of variable order for acoustic radiation and scattering: Part II. formulation in the time domain. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103:64–72, 1998.
- [2] R. J. Astley, G. J. Macaulay, J-P. Coyette, and L. Cremers. Three-dimensional wave-envelope elements of variable order for acoustic radiation and scattering: Part I. formulation in the frequency domain. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103:49–63, 1998.
- [3] J.-P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114:185–200, 1994.
- [4] A. Bermúdez, L. Hervella-Nieto, A. Prieto, and R. Rodríguez. Perfectly matched layers. In Marburg and Nolte [17], chapter 6, pages 167–196.
- [5] J. Biermann, O. von Estorff, S. Petersen, and C. Wenterodt. Higher order finite and infinite elements for the solution of Helmholtz problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198:1171–1188, 2009.
- [6] J. H. Bramble and J. E. Pasciak. Analysis of a finite PML approximation for the three dimensional time-harmonic maxwell and acoustic scattering problems. *Computation of Mathematics*, 76(258):597–614, 2007.
- [7] Z. Chen, G. Hofstetter, and H. Mang. A Galerkin-type BE-formulation for acoustic radiation and scattering of structures with arbitrary shape. In Marburg and Nolte [17], chapter 16, pages 435–458.
- [8] F. Collino and P. B. Monk. Optimizing the perfectly matched layer. *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, 164:157–171, 1998.
- [9] J. P. Coyette and J. Van de Peer. Acoustic Boundary Elements. chapter VII., pages 1–32.
- [10] J. W. Demmel. *Applied Numerical Linear Algebra*, pages 300–320. SIAM, 1997.
- [11] D. Dreyer, S. Petersen, and O. von Estorff. Effectiveness and robustness of improved finite elements for exterior acoustics. *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, 195:3591–3607, 2006.
- [12] S. Gisbert and G. Takó. *Numerikus módszerek I*. ELTE, 2002.
- [13] D. Givoli. Computational absorbing boundaries. In Marburg and Nolte [17], chapter 5, pages 145–166.
- [14] D. Givoli, T. Hagstrom, and I. Patlashenko. Finite element formulation with high-order absorbing boundary conditions for time-dependent waves. *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, 195:3666–3690, 2006.
- [15] P. Göransson. Acoustic Finite Elements. chapter VI., pages 1–45.

- [16] I. Harari, M. Slavutin, and E. Turkel. Analytical and numerical studies of a finite element PML for the Helmholtz equation. *Journal of Computational Acoustics*, 8(1):121–137, 2000.
- [17] S. Marburg and B. Nolte, editors. *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids – Finite and Boundary element methods*. Springer, 2008.
- [18] S. Marburg and B. Nolte. A unified approach to finite and boundary element discretization in linear time-harmonic acoustics. In *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids – Finite and Boundary element methods* [17], chapter 0, pages 1–34.
- [19] S. Marburg and T.-W. Wu. Treating the phenomenon of irregular frequencies. In Marburg and Nolte [17], chapter 15, pages 411–434.
- [20] P. M. Morse and K. U. Ingard. *Theoretical acoustics*. McGraw-Hill, 1968.
- [21] Q. Qi and T. Geers. Evaluation of the perfectly matched layer for computational acoustics. *Journal of Computational Physics*, 139:166–183, 1998.
- [22] O. von Estorff, S. Petersen, and D Dreyer. Efficient infinite elements based on Jacobi polynomials. In Marburg and Nolte [17], pages 231–250.
- [23] C. H. Wilcox. A generalisation of theorems of Rellich and Atkinson. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7:271–276, 1956.