



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Hálózati Rendszerek és Szolgáltatások Tanszék

Ulveczki Mihály Ádám

**SUGÁRZÁSI IMPEDANCIÁK
SZÁMÍTÁSA
VÉGESELEMMÓDSZERREL**

KONZULENS

Dr. Rucz Péter

BUDAPEST, 2018

Tartalomjegyzék

Összefoglaló	5
Abstract.....	6
1 Bevezetés	7
1.1 Problémafelvetés.....	7
1.2 Célkitűzés.....	7
1.3 A dolgozat felépítése	8
2 A végeselemmódszer	9
2.1 A módszer	9
2.2 A végeselemmódszer alkalmazásai.....	9
3 Akusztikai hullámterjedés kürtökben	10
3.1 Hullámegyenlet	10
3.2 Hullámegyenlet hengeres csőben.....	10
3.3 Sugárzási impedancia fogalma	12
3.4 Analitikus modellek	13
3.5 Hullámterjedés kürtökben.....	14
4 Végeselemmodell	15
4.1 Geometria (Gmsh)	15
4.2 Nyílt tér kezelése (Matlab)	17
4.3 Diszkrét egyenlet	20
4.4 Utófeldolgozás	21
4.4.1 Hengeres eset	22
4.4.2 Kúpos eset.....	23
5 Eredmények.....	24
5.1 Henger és validáció.....	24
5.2 Nyíló kúp	25
5.3 Záródó kúp.....	27
6 Kölcsönös impedancia	30
6.1 Geometria.....	30
6.2 A modell	30
6.3 Diszkrét egyenlet	31
6.4 Utófeldolgozás	32

6.5 Eredmény	34
7 Összefoglalás.....	36
Irodalomjegyzék.....	37

HALLGATÓI NYILATKOZAT

Alulírott **Ulveczki Mihály Ádám**, szigorló hallgató kijelentem, hogy ezt a szakdolgozatot meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, csak a megadott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Hozzájárulok, hogy a jelen munkám alapadatait (szerző(k), cím, angol és magyar nyelvű tartalmi kivonat, készítés éve, konzulens(ek) neve) a BME VIK nyilvánosan hozzáférhető elektronikus formában, a munka teljes szövegét pedig az egyetem belső hálózatán keresztül (vagy hitelesített felhasználók számára) közzétegye. Kijelentem, hogy a benyújtott munka és annak elektronikus verziója megegyezik. Dékáni engedéllyel titkosított diplomatervek esetén a dolgozat szövege csak 3 év eltelte után válik hozzáférhetővé.

Kelt: Budapest, 2018. 05. 18.

.....
Ulveczki Mihály Ádám

Összefoglaló

A légoszlopok akusztikai tulajdonságának meghatározása több alkalmazásban is lényeges feladat. Akár valamilyen fúvós hangszer tervezéséről, akár egy szellőzőrendszerről beszélünk. Ezen tulajdonságok meghatározásához az akusztikai hullámegyenlet, vagy az anyagok áramlását leíró kétszeres differenciálegyenlet megoldása a feladat. Ezt analitikusan elvégezni nagy kihívás és közel lehetetlen.

A megoldást közelítő módszerekkel (pl.: végelelem módszer) könnyebben el lehet végezni, éppen ezért számos helyen használják. Hangtechnikai szimulációktól kezdve, épületek tervezésén át, számos alkalmazási területe van.

Szaktervezésemben a végelelem módszerrel ismerkedtem meg, segítségével különféle kúrtok nyomásterét szimuláltam és sugárzási impedanciáját számoltam ki. Ezen túl két kúrtót egymás mellé helyezve vizsgáltam az egymásra való hatásukat, a kettőjük között lévő kölcsönös impedanciát is. Tárgyalom a módszer elméleti hátterét, az algoritmusomat lépésenként és az eredményeimet.

Az eredményeimből kiderül milyen hatással van egymásra a nyílt térbe helyezett gerjesztett rezonátor és maga a tér, vagy éppen két egymás mellé helyezett rezonátor, továbbá a rezonátorok nyílásszöge hogyan változtatja az ún. hosszkorrekciót és hogy milyen alakú hullámfrontok alakulnak ki egy gerjesztett rezonátorban.

Abstract

Determining the acoustic properties of air columns is a key task in many applications. Whether it's a wind instrument or a ventilation system. To determine these properties, the task is to solve the acoustic wave equation or the double differential equation describing the flow of materials. This is a huge challenge and almost impossible task to do analytically.

The solution can be made easier by approaching methods (eg finite element method) and is therefore used in many places. From the sound engineering simulations, through design of buildings, it has many applications.

In my thesis, I got to know the finite element method, calculated and simulated the pressure and the radiation impedance of various horns by this method. In addition, I placed two horns next to each other to examine their mutual effect, to calculate the mutual impedance between them. I am discussing the theoretical background of the method, my algorithm step by step and my results.

My results show how the excited resonator placed in the open space and the space itself or two adjacent resonators interact with each other, how the resonator angle of the resonators changes the so-called. length correction and they show the shape of the wavefronts in an excited resonator as well.

1 Bevezetés

1.1 Problémafelvetés

Számos alkalmazásban szükséges a légoszlopok akusztikai tulajdonságának meghatározása. Ilyen például a fűvós hangszerek rezonátorainak méretezése, vagy a hűtő-, fűtő- és szellőzőrendszerek csővezetékeinek tervezése. Mindkét esetben fontos jellemző a légoszlop és az azt körülvevő lesugárzási tér kölcsönhatásának leírása, ugyanis ez a kölcsönhatás jelentősen befolyásolja például a légoszlop-rezonátorok sajátfrekvenciáit, illetve hangszerek esetében a hanglesugárzás határfokát. A háromdimenziós nyílt tér hatását koncentrált paraméterré egyszerűsítve a frekvenciafüggő sugárzási impedancia adja meg, mely az alkalmazások jelentős többségében elegendő információt ad a csatolásról.

Probléma viszont, hogy tetszőleges geometriájú kürtök sugárzási impedanciáját bonyolult kiszámítani, a szakirodalomban is kevés tanulmány jelent meg a témában. Az alapvető nehézséget az okozza, hogy a hanghullámok terjedésének analitikus számítása nehéz feladat, a legegyszerűbb elrendezéseket leszámítva ily módon nem is kaphatunk megoldást. A számítógépes közelítő módszerek (mint a véges elem módszer) például e probléma kiküszöbölésében lehetnek segítségünkre. A numerikus modell segítségével kiszámított sugárzási impedanciák felhasználhatóak egy vagy több légoszlopból álló rendszerek és az akusztikai nyílt tér kölcsönhatásának leírására így pedig az ilyen rendszerek méretezésében, tervezésében is segítséget nyújtanak.

1.2 Célkitűzés

Célomnak a kürtök sugárzási impedanciájának számítását tűztem ki, közelítő megoldással, melyek közül konkrétan a véges elem módszerrel ismerkedtem meg. A módszer egyik kihívása a nyílt tér kezelése, ugyanis a módszer elemei végesek, a tér pedig végtelen.

Cél a módszer kidolgozása és implementálása, ugyanis a meglévő módszerrel már könnyen lehet különféle geometriájú rendszerek sugárzását, sugárzási impedanciáját, reflexiók tényezőjét, stb. számolni.

1.3 A dolgozat felépítése

Dolgozatom első részében az elméleti alapokat tárgyalom, nevesen a végeselemmétszert általánosságban és az akusztikai alapokat kezdve az egydimenziós modelltől a háromdimenziósig. A második részben a kidolgozott módszeremet ismertetem. Itt mutatom be az alkalmazott szoftvereket és alkalmazásuk módjait is. Ezt követően a módszerrel számított eredményeket közlöm. Végül pedig két kürt elhelyezésével a köztük lévő kölcsönös impedancia számításának eredményéről számolok be.

2 A végeselemmódszer [1][2][3]

2.1 A módszer

A végeselemmódszer egy numerikus módszer parciális differenciálegyenletek megoldásának közelítésére. Jelen esetben a hullámterjedés térben és időben másodrendű differenciálegyenletének megoldására van szükség, aminek az analitikus megoldása nehéz feladat. Másrészt az analitikus megoldás csak nagyon egyszerű esetekben áll rendelkezésre. Így már kicsit bonyolultabb esetekben is érdemes és kell valamilyen közelítő módszert alkalmazni, például a végeselemmódszert.

A közelítő módszerekkel a differenciálegyenletek algebrai egyenletekké „alakíthatóak”, melyeket utána már a standard módszerekkel meg lehet oldani. Ugyanakkor ezen megoldásokkal nem általános megoldást kapunk, hanem egy konkrét elrendezés egy konkrét peremfeltételére kapunk választ.

2.2 A végeselemmódszer alkalmazásai

A módszert más mérnöki ágakban is használják, például építész-, vagy gépészmérnökök. Miért is használják? Ugyanazért, amiért én is tettem. Az anyag/részecskemozgást leíró differenciálegyenletek megoldását kicsit bonyolultabb elrendezésekre már közel lehetetlen kiszámolni analitikusan. A módszerrel ezen számolásokat lehet elvégezni. Sok esetben a mérnöki gyakorlat is megelégszik a közelítő megoldásokkal, így a végeselemmódszerével is. Mivel közelítő megoldás, így van valamekkora hiba a számításban az analitikus megoldáshoz képest, de a végeredmény még tűréshatáron belül van, így a módszer alkalmazható.

3 Akusztikai hullámterjedés kürtökben

3.1 Hullámegyenlet

A hullámegyenlet a klasszikus mechanikában és elektrodinamikában egy olyan idő- és térkoordinátában is másodrendű parciális differenciálegyenlet, amely leírja a hullám terjedését az anyagon (közvetítő közegen) keresztül. Jelen esetben (időben harmonikus függvényeket feltételezve) a hullámegyenlet a Helmholtz-egyenletre egyszerűsödik:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (1)$$

ahol k a hullámszám, p pedig a hangnyomás.

A Helmholtz-egyenlet mellett másik fontos egyenlet az akusztikai végeselem módszer esetében az Euler-egyenlet:

$$\nabla \bar{p} + j\omega\rho_0 \bar{v} = \bar{0} \quad (2)$$

ahol ω a körfrekvencia, ρ_0 a közeg egyensúlyi (átlagos) sűrűsége, \bar{v} pedig a részecskesebesség. Ennek az egyenletnek is kell teljesülnie a teljes térfogatra, viszont a peremeken nagy jelentősége van, ugyanis ott esetenként ismert a részecskesebesség, így ezen egyenletből is számítható a \bar{p} hangnyomás gradiense.

3.2 Hullámegyenlet hengeres csőben

Az egydimenziós leírás azt jelenti, hogy minden mennyiség csak a tér x koordinátája mentén változik. Ez a feltétel megállja a helyét pl. olyan hullámvezetőkben (pl. csövekben), melyek keresztirányú mérete lényegesen kisebb a bennük haladó hanghullám hullámhosszánál.

Egydimenzióban a hangtér alapegyenletei a következőképpen alakulnak:

$$-p'(x, t) = \rho_0 \ddot{u}(x, t) \quad (3)$$

$$p(x, t) = -\kappa P_0 u'(x, t) \quad (4)$$

ahol κ a levegő fajhőállandója, P_0 a légköri nyomás, u' a levegődarabka elmozdulásának hely szerinti első, míg az \ddot{u} az idő szerinti második deriváltja. (3)-at és (4)-nek a hely szerinti első deriváltját összevonva az alábbi hullámegyenletet kapjuk:

$$u''(x, t) = \frac{\rho_0}{\kappa P_0} \ddot{u}(x, t) = \frac{1}{c^2} \ddot{u}(x, t) \quad (5)$$

(5)-ből $\frac{1}{c^2}$ helyére $\frac{k^2}{\omega^2}$ -et helyettesítve, illetve ω körfrekvenciájú harmonikus rezgést feltételezve már könnyen adódik az egydimenziós Helmholtz-egyenlet.

A következő lépésekben belátjuk, hogy egy hengeres hullámvezetőben egy adott frekvenciahatárig a háromdimenziós hangtér egydimenzióssá egyszerűsödik. Hengeres csőben $r = R$ helyen, (ami a henger falát jelenti), adott a peremfeltétel a normális irányú részecske sebességre:

$$v_n(r = R) = 0 \quad (6)$$

(6)-ot az Euler-egyenletbe (2) helyettesítve adódik a következő:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (7)$$

A peremfeltétel felhasználásával a 3D-s Helmholtz-egyenlet megoldása így alakul (hengerkoordináta-rendszerben) [4]:

$$p(r, \theta, x) = p_0 J_n(k_r r) \cos(n\theta) e^{-jk_x x} \quad (8)$$

(8) négy részből áll: egy konstans p_0 , az r -től függő J_n Bessel-függvény, a θ -tól függő harmonikus tag és egy x -től függő síkhullám. Ha figyelembe vesszük a (7) peremfeltételt, akkor

$$J_n'(k_r R) = 0 \quad (9)$$

egyenletnek teljesülnie kell. Ezt azt jelenti, hogy k_r nem lehet tetszőleges, értékei a J_n Bessel-függvények szélsőértékei lehetnek. Teljesen hengerszimmetrikus geometria és gerjesztés esetében csak a J_0 függvényt kell figyelembe venni, ugyanis a szimmetria miatt a többi függvény nem tud előfordulni. Amikor a hengerszimmetria megszűnik, a többi Bessel-függvényt is figyelembe kell venni.

A másik fontos egyenlet, ami a geometriából adódóan teljesül, a következő:

$$k^2 = k_r^2 + k_x^2 \quad (10)$$

ahol k_r és k_x a keresztirányú, illetve a hosszirányú hullámszám. A J_0 függvény első szélsőértéke 1, amit a 0 helyen vesz fel. Ezt (8)-ba helyettesítve

$$p(r, \theta, x) = p_0 \cos e^{-jk_x x} \quad (11)$$

adódik, tehát az egyszerű síkhullám egyenletét kapjuk vissza. J_0 következő szélsőérték helye ≈ 3.83 . Ezt az értéket (10)-be helyettesítve

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = 3.83^2 + k_x^2 \quad (12)$$

egyenletet kapjuk. Ebből a bal oldalt meghatározza a vizsgált frekvencia és a hangsebesség. Így, ha olyan frekvencián vizsgáljuk a rendszert, ahol a bal oldal kisebb marad 3.83^2 -nél, akkor a hosszirányú hullámszám komplex lesz. Ebből az következik, ha ezt az ún. vágási frekvenciát nem érjük el, akkor a nem longitudinális hullámok a gerjesztés közelében az x -tengely mentén exponenciálisan csillapodnak, vagyis evaneszcensek. Ezen okból az egydimenziós modell a vágási frekvencia alatt jól működik. Ez a frekvenciatartomány lefedi a fűvös hangszerek hangkeltésében fontos tartományt, így zenei akusztikai alkalmazásokban az egydimenziós modell sok esetben kielégítő.

Nem forgásszimmetrikus elrendezésnél a J_1 Bessel-függvény első szélsőértékét kell figyelembe venni, ami ≈ 1.84 , így a vágási frekvenciát, azaz a modell érvényességi tartományának felső korlátját ez a k_r érték határozza meg.

Így tehát a vágási frekvencia alatt maradv (tehát kisfrekvencián) hengeres elrendezésben a 3D-s Helmholtz-egyenlet egydimenziós hullámegyenletté egyszerűsödik. Az egydimenziós leírás azonban érvényét veszti a cső nyitott végénél, mivel itt megszűnik a (7) feltétel érvényessége. A nyitott végnél kialakuló bonyolult hangtér kiszámítása nemtriviális feladat, általános esetben csak numerikus közelítő módszerekkel lehetséges. A következő szakaszban tárgyalt sugárzási impedancia ezt a bonyolult kölcsönhatást egy koncentrált paraméterbe sűríti, mellyel a légoszlop és a nyílt tér közti kölcsönhatás az egydimenziós modellben is figyelembe vehető.

3.3 Sugárzási impedancia fogalma

A sugárzási impedancia a nyílt tér terhelő hatását fejezi ki a légoszlopra. Igaz, hogy ez „terhelésként” vagy „veszteségként” jelentkezik a légoszlop szempontjából, viszont a sugárzási impedancia nélkül nem valósulhatna meg a hangszerek hanglesugárzása. A sugárzási impedancia valós része a sugárzási ellenállás, míg képzetes része az együtt mozgó légtömeg hatását fejezi ki.

A végtelen (fél)térbe sugárzó cső lezáró impedanciája azonban kisfrekvencián L_0 effektív hosszú, ideálisan nyitott csővégződéssel ekvivalens (az ellenállás elhanyagolható az együtt mozgó tömeghez képest), amely L_0 hosszt hosszkorrekciónak is hívunk. Ez az L_0 hossz a következőképpen alakulhat:

- Fél térben, a térrészt egy merev dugattyúval gerjesztve: $L_0 = 0.85r$
- Fél térben, a térrészt egy légoszlopon keresztül gerjesztve: $L_0 = 0.82r$
- Teljes térben, a teret egy légoszlopon keresztül gerjesztve: $L_0 = 0.61r$,

ahol az r a gerjesztett rész sugara. Az első esetben a dugattyúval közvetlen van gerjesztve a tér, míg a másik két esetben a gerjesztő hullám egy csövön keresztül halad a tér előtt. Különbség a kettő között, hogy míg a dugattyúnál a teljes felületen állandó a sebesség, addig a gerjesztett cső végződésénél ez nem igaz.

Az impedancia képzetes részét szokás közelíteni frekvenciafüggő hosszkorrekciós tényezővel is. Ezen hosszkorrekcióról csak kisfrekvencián beszélhetünk a fent említett értékek mellett. Nagyobb frekvencián a hosszkorrekció csökken.

A hosszkorrekció kiszámítható a sugárzási impedanciából. Ehhez először a reflexiós tényezőt kell kiszámolni:

$$R = \frac{Z - 1}{Z + 1} \quad (13)$$

amiből a hosszkorrekció már közvetlenül számítható:

$$L_0 = -\frac{1}{2k} \arg\left(\frac{R}{-|R|}\right) \quad (14)$$

3.4 Analitikus modellek

A problémakörre létezik néhány ismert analitikus megoldás, viszont ezek egyike sem triviális, mindegyiknél bonyolult matematikai apparátust kellett alkalmazni.

Nomura [5] 1960-as, illetve Norris és Sheng [6] 1989-es cikkében olyan csövet tételtek fel sugárzónak, aminek falvastagsága végtelen, így lényegében olyan mintha egy henger a féltérbe sugározna. Kissé más geometriát foglal magában Ando [7] 1969-ben írt cikke. Ő véges falú csővel számolt immáron a teljes térbe sugározva. A teljesen ideális helyzetet Levine és Schwinger [8] feltételezte 1948-ban. Náluk egy végtelen

vékony falú cső sugárzott a teljes térbe. A továbbiakban részletezett megoldásom analitikus eredménnyel való összevetéséhez az ő eredményüket használtam.

Az eddigi modellek egyenes, párhuzamos falú sugárzókat feltételeztek. Hélie és Rodet [9] 2003-ban publikált cikke exponenciálisan nyíló tölcsérről szólt, annyi egyszerűsítéssel, hogy a tölcsér szájánál kialakuló hullámfrontot egy gömbhéj egy részének feltételezték, amely felületen a sebesség konstans. Ez a valóságnak egy meglehetősen durva közelítése, mivel a kürtök szájánál kialakuló akusztikai sebesség a nyílt térrel való kölcsönhatás következtében sosem lesz konstans.

A kölcsönös impedancia számítására analitikus módszer még nem ismert, ugyanis ezen módszer már komplex nehézségű, ugyanakkor végeselemmódszerrel ezen elrendezések is megoldhatóak.

3.5 Hullámterjedés kürtökben

Kürt alatt változó keresztmetszetű csöveket értünk. Fúvós hangszereknél a kürtök alkalmazásának kettős célja van. Egyrészt a táguló kürtök impedanciáttranszformátorok, melyek optimális teljesítményátvitelt eredményezhetnek egy csőszakasz és a végtelen szabad tér között. Másrészt a kürtök jelentős mértékben hangolják a fúvós hangszereket.

A kürtökben a hullámegyenlet a következő alakot ölti:

$$\Psi'' + \left(k^2 - \frac{r''}{r}\right)\Psi = 0 \quad (15)$$

ahol Ψ a hullámfüggvény, r pedig a kürt belső sugara (ez a kúpban haladva változik). A vonás a hely szerinti deriválást jelöli. Az $\frac{r''}{r}$ hányadost hívjuk kürtfüggvénynek is, ez a tag a kürt geometriáját jeleníti meg az egyenletben.

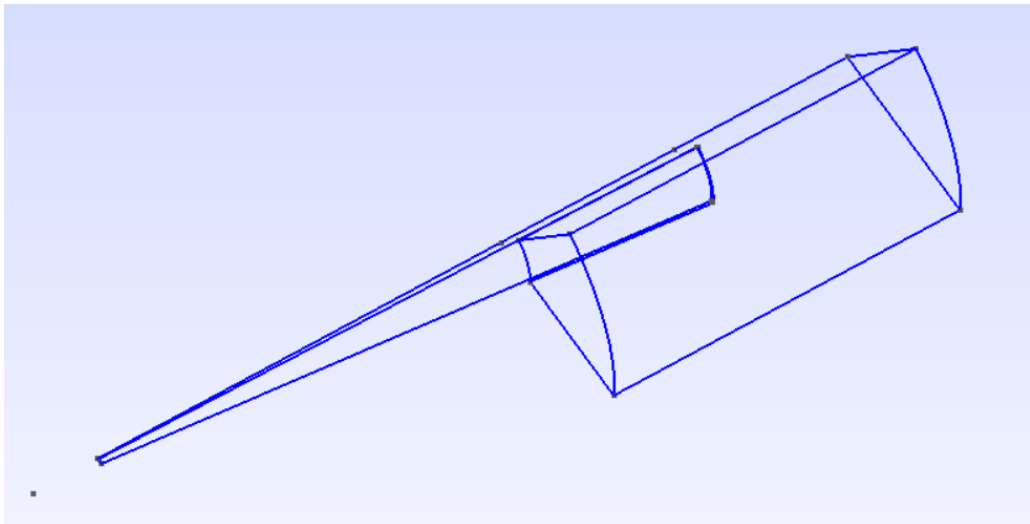
Elméleti és gyakorlati szempontból nagy jelentőséggel bírnak az úgynevezett Salmon-kürtök, melyeknek jellemzője, hogy a kürtfüggvény konstans. A Salmon-kürtök közé a kúpos (kürtfüggvény zérus), az exponenciális és a katenoid kürtök tartoznak. A továbbiakban részletesen a kúpos kürtökkel foglalkozom, azonban mivel a (15) Webster-egyenlet az exponenciális és katenoid kürtökben is érvényes, a számításaim minimális módosítással kiterjeszthetők az ilyen típusú kürtökre is.

4 Végeselemmodell

Az 1. fejezetben felvázolt probléma megoldásának a kiszámolt nyomástérből kiértékelt sugárzási impedanciát tekintetem, amihez több lépésben jutottam el. Elsőként definiáltam a vizsgálandó geometriát, majd ezt a geometriát megrajzolva és térbeli elemekkel behálózva elkészítettem a mesh-t. A mesh-t Matlab-ba [10] importálva, a szükséges peremfeltételek és anyagi jellemzők megadása utána futtattam a megoldást szolgáltató szimulációt. A kijött eredményekből pedig az utófeldolgozás során számoltam ki a számunkra szükséges értékeket (sugárzási impedancia, hosszkorrekció, stb.).

4.1 Geometria (Gmsh)

Az alábbi pontokban egy kürtre vonatkozó elrendezést tárgyalunk. Az elrendezés a 4.1. ábrán látható. Középen található egy kúp alakú kürt, amit a nyitott tér egy csonkított része vesz körbe. Az elrendezésem tehát magában foglalja a kürt testébe zárt légoszlopot, illetve az azt körülvevő tér egy részét. A számolási feladat megkönnyítése érdekében (mivel az elrendezésem forgásszimmetrikus) a teljes kürtnek és az azt körülvevő térnek csak egy szeletét használtam. Így ugyanazt a problémát kisebb számolási kapacitással tudtam megoldani, vagy azonos erőforrásokkal jobb felbontást tudtam elérni.



4.1. ábra - A geometria megrajzolva Gmsh-ben

A geometria megrajzolására a Gmsh [11] nevű programot használtam. Ez egy nyílt forráskódú, szkriptelhető program, ami a legegyszerűbb, szimmetrikus alakzatoktól kezdve, a kétdimenziós alakzatokon keresztül, a bonyolult 3D-sekig rengeteg síkidom és

térforma megrajzolására alkalmas. Majd ezek felületét és térfogatát is be tudja hálózni háromszögekkel, tetraéderekkel, vagy más alakzatokkal (2D-ben háromszög vagy négyszög, 3D-ben tetraéder vagy téglatest szokott lenni a választás).

Első lépésként tehát ebben a programban rajzoltam meg az elrendezést. Először pontokat vettem fel (a geometriám csúcsait), majd a pontokat összekötöttem. Egyes helyeken egyenesekkel, máshol körvonalakkal. Az összekötött pontokból felületeket alakítottam ki (sík, domború és gömbfelületeket), amik összekapcsolásával kialakult a végleges, zárt térfogatom, melyet végelemekkel kellett hálózni. Ezután legeneráltam egy mesh-t (lényegében egy csúcsokból és élekből álló térbeli gráfot), amit a továbbiakban a számításhoz használtam. Ez az eddig megrajzolt térfogat elem behálózását jelentette. A mesh-em tetraéderekből áll, a felülete pedig háromszögekből. Az élek hosszát (a mesh finomságát) a programban lehet állítani. Minél finomabb a felbontás, annál több elemből áll a mesh, így a számítási igény megnő, viszont az eredmény pontosabb, közelebb áll a valósághoz. Itt kisebb kihívás volt megtalálni az optimális finomságot, amivel a megoldásom még elég részletes volt, viszont a számítási igény is belátható keretek között maradt. Az elemméret határt szab a vizsgált maximális frekvenciának. Ökölszabályként fontos, hogy hullámhosszonként legalább 8 elemnek kell lennie (ha lineáris alakfüggvényeket használunk, ahogy én is tettem), különben nagy lesz a hiba. A jelenség oka az úgynevezett numerikus diszperzió.

A Gmsh egyik nagyon jó tulajdonsága, hogy minden egyes pontja paraméterezhető. Lehet létrehozni változókat és ezeket paraméterként beírva a pontok koordinátájának, később meg lehet változtatni a geometriát csak egy változó megváltoztatásával. Az általam alkalmazott paraméterek a 4.2. ábrán láthatóak.

A generált mesh-t beimportáltam Matlab-ba és innentől kezdve minden számítást abban végeztem. Matlab-ban akár a fentebb említett paramétereket is meg lehet változtatni az importálás után, habár ezután újra kell generálni a mesh-t. Ezzel is meg lehet kicsit könnyíteni a hasonló elrendezések tesztelését.

Parameters			
0.005			e
10			e2
0.5			l
0.15			la
0.005			r0
0.05			r1
0.15			ra
45			theta
0.002			v

4.2. ábra - Mesh paraméterek Gmsh-ben

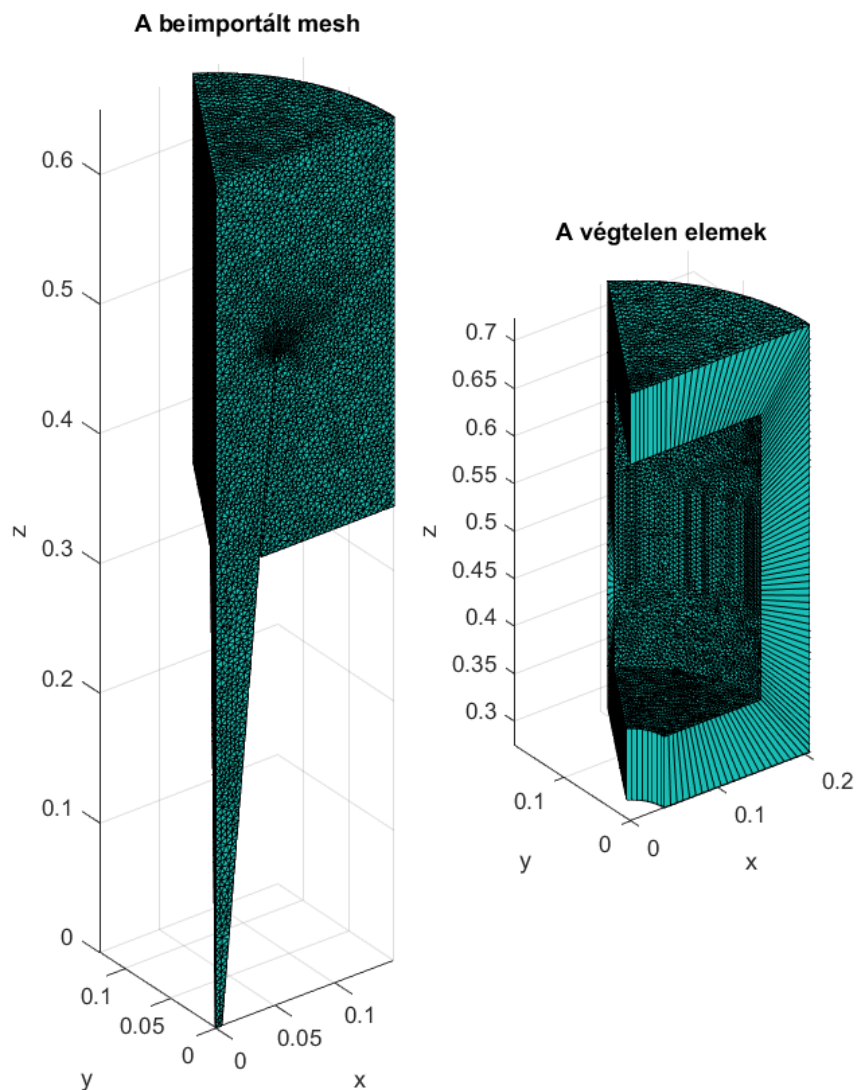
4.2 Nyílt tér kezelése (Matlab)

A probléma a valós világban nyitott térben van, viszont eddig csak egy véges térrészt rajzoltam meg. A nyílt tér szimulációjára a végtelen elemeket használtam (léteznek alternatív megoldások is, pl.: elnyelő rétegek, a végtelen elemek viszont relatíve kényelmes választásnak bizonyultak). A programban ezek is végesként vannak kirajzolva (de a tényleges méretük végtelen a programban is), viszont a hagyományos végelemekhez képest két fontos plusz tulajdonsággal bírnak. A végtelen elemeken belül az elem végelemmel érintkező oldalától távolodva a hangnyomás a geometriai $1/r$ -es csillapításnak megfelelően csökken. Másrészt a végelem-végtelen elem határon az illeszkedés tökéletes, ennek köszönhetően a reflexió elhanyagolható. Így számunkra a végtelen elem úgy viselkedik, mintha a hagyományos végelemekkel illeszkedő határa a nyílt térbe közvetítené a hullámot.

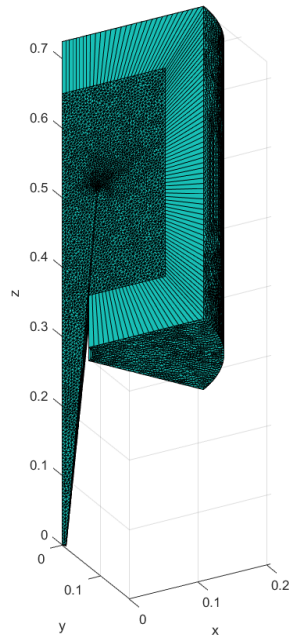
A számítás elvégzéséhez a teljes peremen meg kell adni a peremfeltételeket. A nyílt térben a végtelen elemek alkalmazása egyben a peremfeltételt is megadja. A gerjesztést megadó peremfeltételt a kürt torkánál lévő felületen definiáltam. Ez a felület egy gömbfelület. Ezen felületen lévő csúcsokat kijelölve és azon pontokban a nyomást egyre állítva, egység értékű gömbhullámot állítottam be mint gerjesztés. (Ezzel a keresett nyomástér ezen pontokban ismert.) A fennmaradó rész a kürt fala. Erre a peremfeltételhez a következő mondható: a kürt falait akusztikailag merevnek, vagyis tökéletesen visszaverőnek feltételezzük. Így a háromféle határolófelülettel előálltak a geometria szélén kimondható peremfeltételek.

Matlab-ban a végtelen elemeket is tartalmazó modell megvalósítása több lépésben történt. Először kiválasztottam a meglévő térrész felületét (amelyekhez a végtelen elemek fognak csatlakozni), majd ezeket összezsugorítva létrehoztam egy vetítési alapot. Ehhez a felület koordinátáit közelebb helyeztem a kürt szájához, külön a z-tengely irányút, külön

a sugár irányút, majd ezt számoltam vissza (x, y, z) koordinátákra. Az új koordináták által kiadott vetítési alapot vetítettem az eddigi téren kívülre. Ehhez segítségemre volt a már meglévő Matlab toolbox *project_ie_mesh()* függvénye. Így kialakultak újabb hosszúkás elemek, a végtelen elemek. A végtelenelemeim a 4.3. ábra jobb oldalán láthatóak még a mesh-től külön. Végül a két mesh összeillesztésével és az anyagjellemzők megadásával (jelen esetben a teljes terem homogén) kialakítottam a teljes modellt. A teljes modell (a Gmsh-sel megrajzolt mesh és a végtelen elemek) a 4.4. ábrán található.

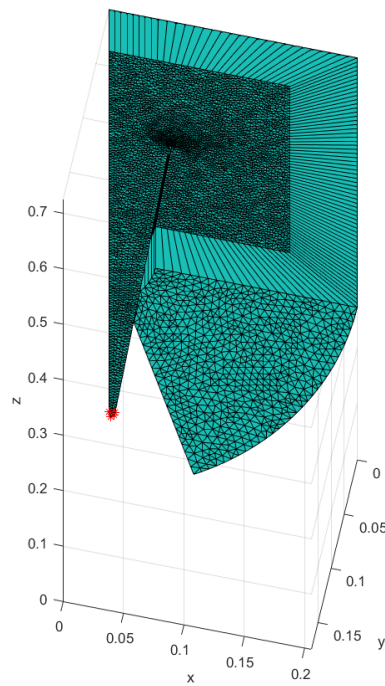


4.3. ábra - A Gmsh-ből beimportált mesh és a vetített végtelen elemek



4.4 ábra - A teljes mesh, immáron kiegészítve a végtelen elemekkel

Ezután már csak a gerjesztett pontok kijelölése maradt hátra a kürt torkánál, melyet a 4.5. ábra szemléltet.



4.5. ábra - A gerjesztett pontok

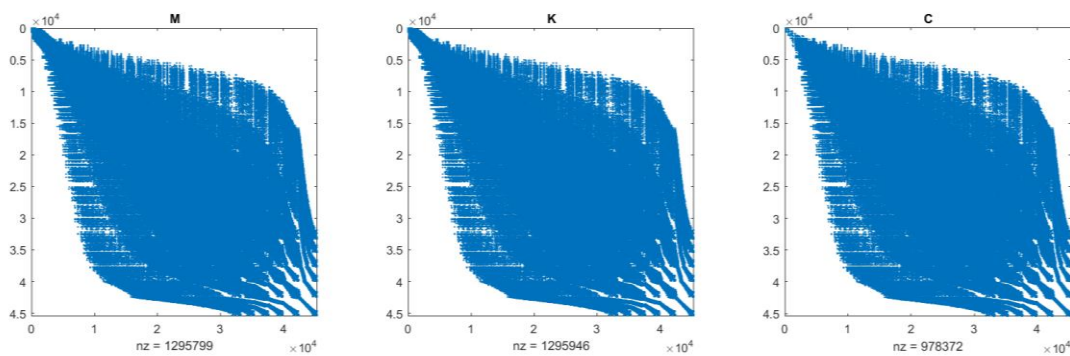
4.3 Diszkrét egyenlet

A végelemmodellben a hangnyomás folytonos függvényét szakaszonként polinom (esetemben lineáris) alakfüggvényekkel közelítettem. Így a nyomásvektorban szereplő súlyokat és az alakfüggvényeket összeszorozva kaptam meg a közelítő nyomást a teljes szimulált térfogatban.

Miután összeállt a teljes mesh, a nyomás értékeket a következő egyenlet megoldása adja:

$$[\bar{K} + j\omega\bar{C} - \omega^2\bar{M}]\bar{p} = -j\omega\bar{A}\bar{v} \quad (16)$$

ahol az \bar{M} , \bar{K} , illetve \bar{C} mátrixok az úgynevezett tömeg, merevség és csillapítás mátrixok (4.6. ábra), az általam keresett nyomás pedig a \bar{p} . Ebben a \bar{p} -ben megtalálható minden pontban (node) a nyomás értéke minden vizsgált frekvencián.



4.6. ábra - M, K és C mátrixok

A (16) egyenlet a (17) alakban is írható, a (18) és (19) megfeleltetésekkel:

$$\bar{S}(\omega)\bar{p} = \bar{Q}(\omega)\bar{v} \quad (17)$$

$$\bar{S}(\omega) = [\bar{K} + j\omega\bar{C} - \omega^2\bar{M}] \quad (18)$$

$$\bar{Q}(\omega) = -j\omega\bar{A} \quad (19)$$

A \bar{p} vektor esetében egy oszlopvektor melynek két eleme van: \bar{p}_1 , a kürt torkánál lévő felület, aminek a gerjesztése ismert, így a \bar{p}_1 is ismert. A \bar{p}_2 a keresett nyomás, ami ismeretlen. Ebben a \bar{p}_1 -ben lévő pontokon kívül minden benne van. A \bar{p} vektor meghatározza az \bar{S} mátrix méretét, ami így 2x2-es (blokkmátrix). Az egyenlet jobb oldala jóval egyszerűbben alakul. Mivel a modell semelyik részében nem mozognak a

részecskék, így a \bar{v} vektor egy nullvektor lesz, azt bármivel szorozva a jobb oldal 0 értéket vesz fel. A (17) egyenlet tehát így alakul mátrixos formában:

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \quad (20)$$

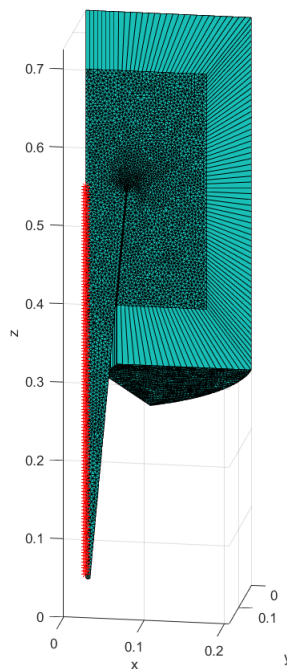
Az \bar{S} mátrix második sorához tartozó egyenlet felírásával és átrendezésével az ismeretlen \bar{p}_2 könnyen meghatározható:

$$\bar{p}_2 = -\bar{S}_{22}^{-1} \bar{S}_{21} \bar{p}_1 \quad (21)$$

A (21) megoldást kiszámítását több frekvencián is el kell végezni, így végül kiadódik a frekvenciafüggő nyomástér, majd később az impedancia.

4.4 Utófeldolgozás

Fontos megjegyezni, hogy a 3D hangtérből egyetlen koncentrált paramétert kellett kiszámítanom. Ez általában nemtriviális feladat, amit az 1D Helmholtz-egyenlet d'Alembert-féle megoldásának felhasználásával egy illesztéses módszerrel oldottam meg. A konkrét megoldást a következőkben tárgyalom.



4.7. ábra - Képzelt mikrofonok elhelyezkedése a kürt közepében

A nyomás értékekből elvégezhető az utófeldolgozás folyamata. Az utófeldolgozás során a nyomásból számoltam a kúpom reflexiós tényezőjét, sugárzási impedanciáját, stb. Ehhez képzeletben a kürt tengelyébe bizonyos távolságokba virtuális mikrofonokat helyeztem és ott számoltam ki a nyomás értékeket (ezekben a pontokban nem feltétlen van csúcsa a mesh-nek). Itt a 4.3. fejezetben említett alakfüggvényeket használtam fel, amikor a hangnyomást a virtuális mikrofonok pozícióiban értékeltem ki. A mikrofonok a kúp száját nem érik el, ugyanis az ott kialakuló nem tökéletes gömbhullámok elrontják az eredményt. A mikrofonok elhelyezését a 4.7. ábra mutatja.

Ezt lényegében a meglévő csúcsokban kiszámolt nyomásokból súlyozással tudtam kiszámolni. Ebben segítségemre volt a Matlab-os toolbox *fe_invmap()* és *fe_interp()* függvényei, amelyekkel ki tudtam számolni $\bar{p}(z)$ -t, ami adott z értékre (ami kijelöl egy mikrofont) tartalmazza a nyomást minden vizsgált frekvenciára. A vektoros jelölés azt jelenti, hogy a változóban az összes vizsgált frekvenciára vonatkozó értékek benne vannak.

4.4.1 Hengeres eset

A $\bar{p}(z)$ hengeres esetben felbontható a következőképpen:

$$\bar{p}(z) = p^+ e^{-jkz} + p^- e^{jkz} \quad (22)$$

ahol p^+ és p^- a $\bar{p}(z)$ z tengely szerinti pozitív és negatív irányú összetevőjének együtthatója. (22) mátrixos formában felírva:

$$\bar{p}(z) = \begin{bmatrix} e^{-jkz_1} & e^{jkz_1} \\ \vdots & \vdots \\ e^{-jkz_N} & e^{jkz_N} \end{bmatrix} [p^+ \quad p^-] \quad (23)$$

ami egy túlhatározott egyenletrendszer, ugyanis ebből csak a p^+ és p^- nem ismert, viszont minden mikrofonhoz tartozik egy egyenlet. Az én esetemben 128 egyenletre volt 2 ismeretlenem. Az egyenletrendszer

$$\bar{b} = \bar{A}\bar{x} \quad (24)$$

típusú, ami Matlab-ban egyszerűen az $x=A\b$ kóddal megoldható. (Ez a kód a legkisebb négyzetek módszerével oldja meg a túlhatározott egyenletrendszert, vagyis a megoldás hibája négyzetes értelemben minimális lesz.)

A p^+ és p^- értékekből már számolható a reflexiós tényező:

$$R = \frac{p^-}{p^+} \quad (25)$$

melyből tovább számítható a keresett sugárzási impedancia:

$$Z = Z_0 \frac{1 + R}{1 - R} \quad (26)$$

4.4.2 Kúpos eset

Az én szimulációmiban henger helyett kúp van és a gerjesztésem gömbhullám, így a sugárzási impedanciát kicsit másképp kellett számolnom, ugyanis a kúp sugara nem konstans. Így definiálható az $r(z)$ a kürt belső sugara z pozícióban. Ezzel felírva bevezethető a Ψ hullámfüggvény:

$$\bar{p}(z) = \frac{\bar{\Psi}(z)}{\bar{r}(z)} \quad (27)$$

Mivel kúpos esetben a (15) Webster egyenlet a Ψ változóra a Helmholtz-egyenletet adja vissza, így a Ψ hullámfüggvény (22)-höz hasonlóan felbontható Ψ^+ -ra és Ψ^- -ra. Az Euler-egyenlet, amiből a \bar{v} sebesség meghatározható a következő alakot ölti:

$$\bar{v}(z) = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial \left(\frac{\bar{\Psi}(z)}{\bar{r}(z)} \right)}{\partial z} \quad (28)$$

A sugárzási impedancia számítható a

$$\bar{Z} = \frac{\bar{p}(z)}{\bar{v}(z)} \quad (29)$$

képlettel, amibe behelyettesítve (27)-t és (28)-t (és egyszerűsítve az összefüggést) a következőképpen számítható a $z = l$ pontban:

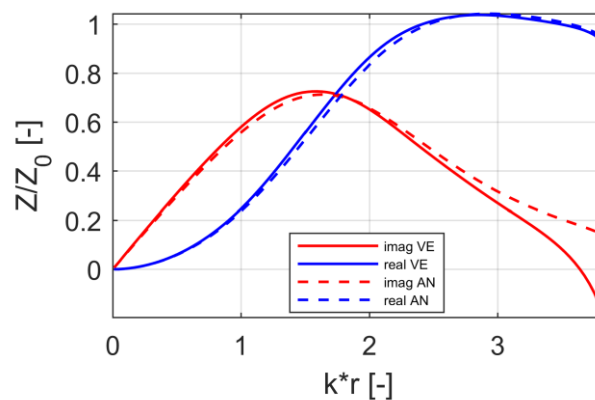
$$\bar{Z} = j\omega\rho_0 \frac{\bar{\Psi}\bar{r}}{\bar{\Psi} \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} \bar{r}} \quad (30)$$

5 Eredmények

Az eddig részletezett algoritmust elvégeztem több geometriára is. Először hengeresre, aminek analitikus megoldása ismert, így ezt össze tudtam vetni az én megoldásommal. Ezen kívül nyíló és záródó kúpokra is teszteltem, melyek eredményei a következők lettek.

5.1 Henger és validáció

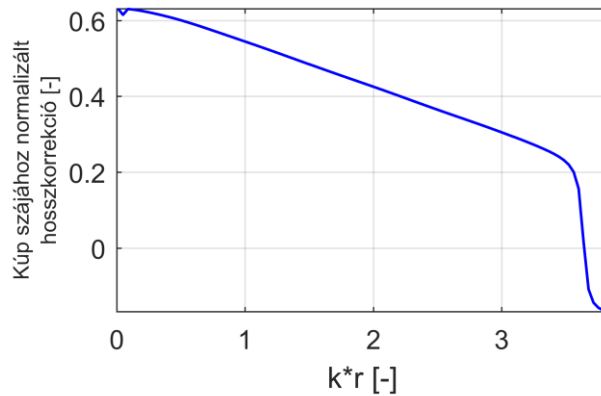
Az analitikus megoldás hengeres kialakítással ismert, így az algoritmusom validációját 0° -os kúpon tudtam elvégezni.



5.1. ábra – Sugárzási impedancia hengeres geometria esetében, összevetve az analitikus megoldással

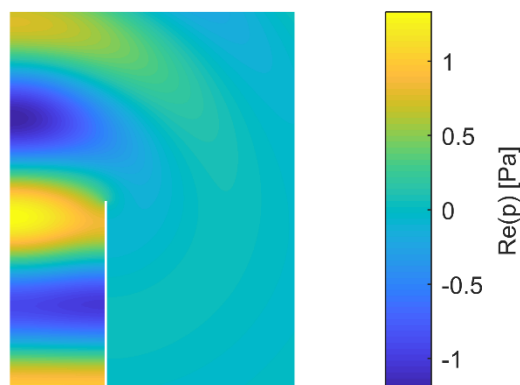
Eredményként azt kaptam, hogy nincs számottevő eltérés az én módszerem és az analitikus eredmény között, ahogy ezt az 5.1. ábra is mutatja. Az ábrán a piros görbék a sugárzási impedancia képzetes, míg a kék a valós része, a folytonos a végeselemmódszerrel számított, a szaggatott az analitikus eredményt reprezentálják. Az eltérést az okozza, hogy míg az analitikus geometria teljesen ideális elrendezést feltételez pl. végtelen vékony falvastagsággal, addig az én modellem falának van egy véges vastagsága.

Az 5.2. ábrán a hosszkorrekció látszik a henger sugara szerint normalizálva. Az elméletben már említett 0.61-es érték jelenik meg körülbelül az általam szimulált hosszkorrekció maximumaként, ami szintén azt mutatja, hogy a szimuláció helyesen működött.



5.2. ábra – Hosszkorrekció henger esetén

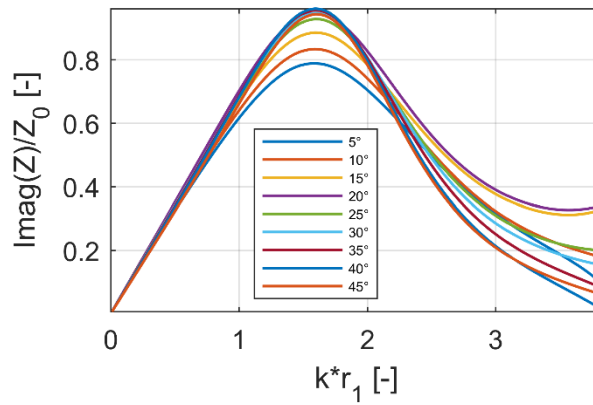
A henger nyomásterében (5.3. ábra) megfigyelhető, hogy a gerjesztésnél megadott egységnyi síkhullám a henger szája felé közeledve folyamatosan alakul gömbhullámmá. Továbbá az ábrán szépen látszanak a kialakuló hullámfrontok is. Látható a reflexió hatása is, az állóhullámok megjelenésének köszönhetően a csőben a gerjesztő 1 Pa-os nyomásértéknél nagyobb hangnyomások is megjelennek.



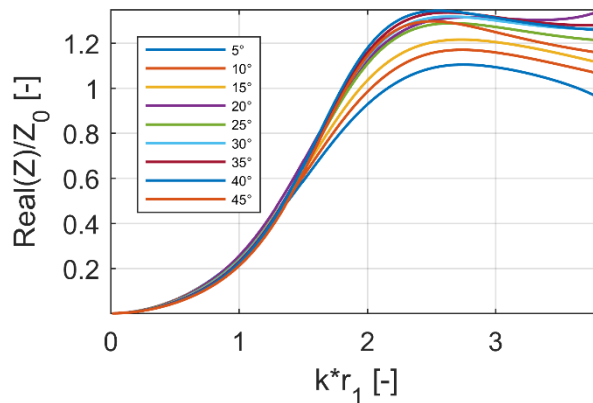
5.3. ábra - Henger nyomásterének valós része $k*r=3.48$ -as értéknél

5.2 Nyíló kúp

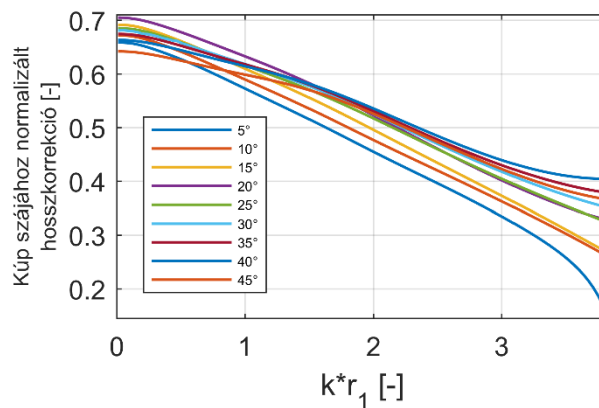
Mind a nyíló, mind a záródó esetben több kúpnyílásszöggel futtattam le a szimulációt 5° -os lépésközzel. Mindkét esetben szépen kiadódtak a fentebb megfogalmazott elméleti elvárások. Kezdetben (kisfrekvencián) a sugárzási impedancia képzetes része dominál, aminek meredeksége nagyban befolyásolja a kis frekvencián jelen lévő hosszkorrekciót. Ezen meredekségnek maximuma a 20° -os nyílásszögű kúpnál van, amit az 5.4. ábra szemléltet. Nagyobb frekvencián a sugárzási impedancia valós része válik dominánssá (5.5. ábra), ami a hosszkorrekció csökkenését okozza (5.6 ábra). A következő ábrákon szerepelnek a sugárzási impedancia képzetes és valós részei, a hosszkorrekció, illetve a kialakuló nyomástér a 20° -os kúp egyik vizsgált frekvenciájára.



5.4. ábra - Impedancia képzetes része Z_0 -hoz normalizálva nyíló kúp esetén

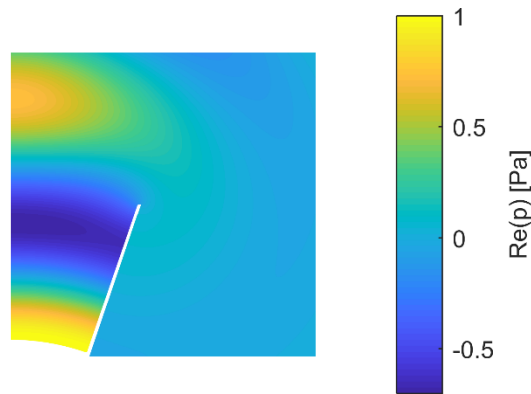


5.5. ábra - Impedancia valós része Z_0 -hoz normalizálva nyíló kúp esetén



5.6. ábra - Hosszkorrekció nyíló kúp esetén

A hosszkorrekció maximális értéke $0.7r$ érték körül áll az 5.6. ábra szerint. A dugattyús esetben (3.3. fejezet) ez az érték 0.61 a nyílt térben. A különbség oka, hogy míg a dugattyúban az egész hengerben síkhullám közlekedik, addig a kúpban gömbhullám terjed, és ez máshogy lép kölcsönhatásba a nyílt térrel, mint a síkhullám.

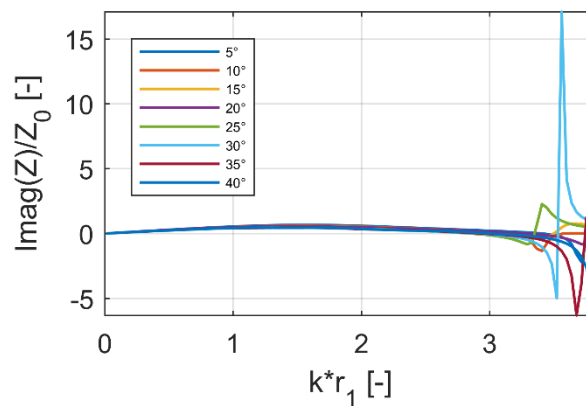


5.7. ábra - Nyíló kúp nyomásterének valós része $k \cdot r_1 = 3.48$ -as értéknél

Ahogy a hengernél, itt is megfigyelhető a gerjesztő hullám terjedése, a hullámfrontok és a reflexió (5.7. ábra).

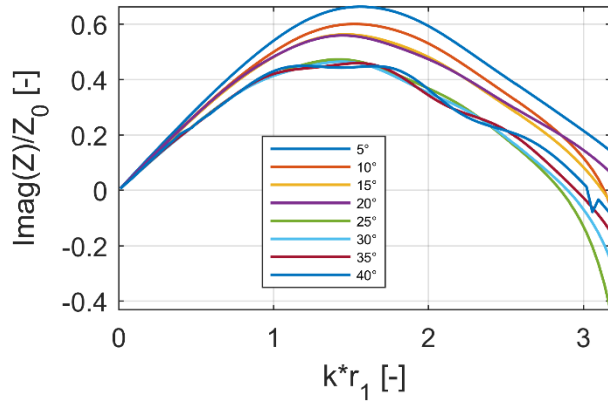
5.3 Záródó kúp

Záródó kúp esetén bizonyos frekvencia fölött elromlik a rendszer, ugyanis ott megjelennek a z tengely mentén mozgó hullámok mellett keresztirányú hullámok is, ami már az én modellelmen és a vizsgálandó tartományon kívül esik (5.8. ábra). Így a záródó kúp maximális vizsgált frekvenciáját csökkentettem $k \cdot r_1 = 3.17$ -re.

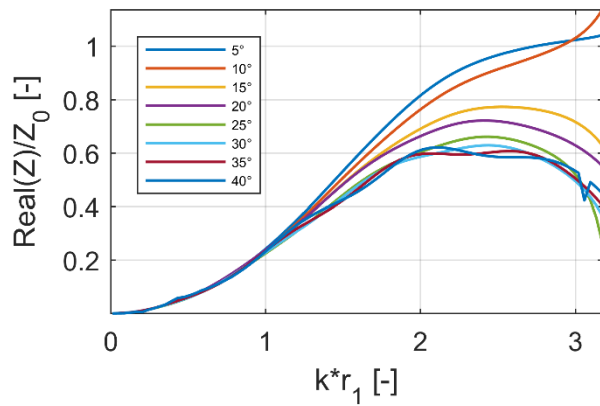


5.8. Ábra – Kritikus frekvencia a $k \cdot r_1 = 3.5$ körül

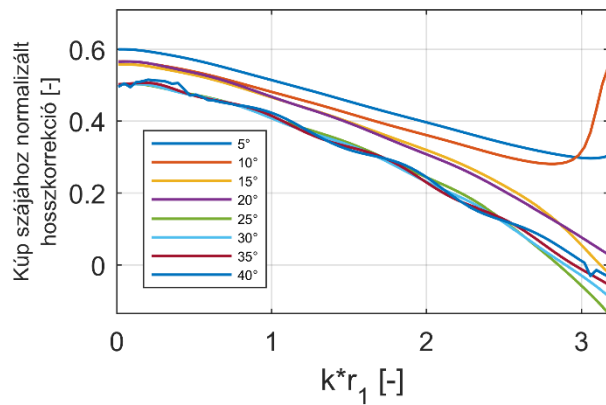
A maximális frekvenciát csökkentve az eredmény szépen megfigyelhető. A 45° -os esetben a kúp már eléggé torz. Körülbelül akkora a kúp szája, mint a hossza. Ezen geometriát ebből az okból nem is teszteltem. Kisebb nyílásszögeken a szimuláció megfelelően működik.



5.9. ábra – Impedancia képzetes része Z_0 -hoz normalizálva záródó kúp esetén

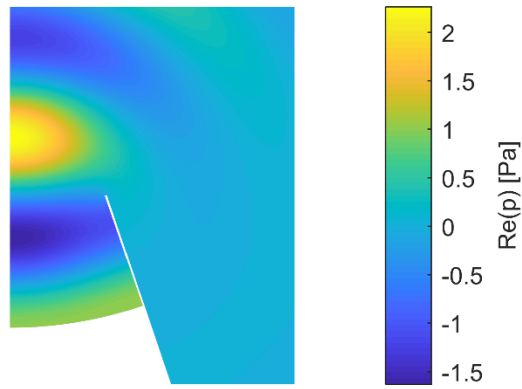


5.10. ábra - Impedancia valós része Z_0 -hoz normalizálva záródó kúp esetén



5.11. ábra - Hosszkorrekció záródó kúp esetén

A teljes nyomástéren (5.12. ábra) látszódik, hogy a gömbfelületen gömbhullámmal gerjesztett csökkenő sugarú kúp végén (a szájánál) síkhullám alakul ki. Ezen síkhullám a térben újra gömbbé alakul. Megfigyelhető az ábrán, hogy a térben a nyomás összpontosul és $2 Pa$ fölé is emelkedik.



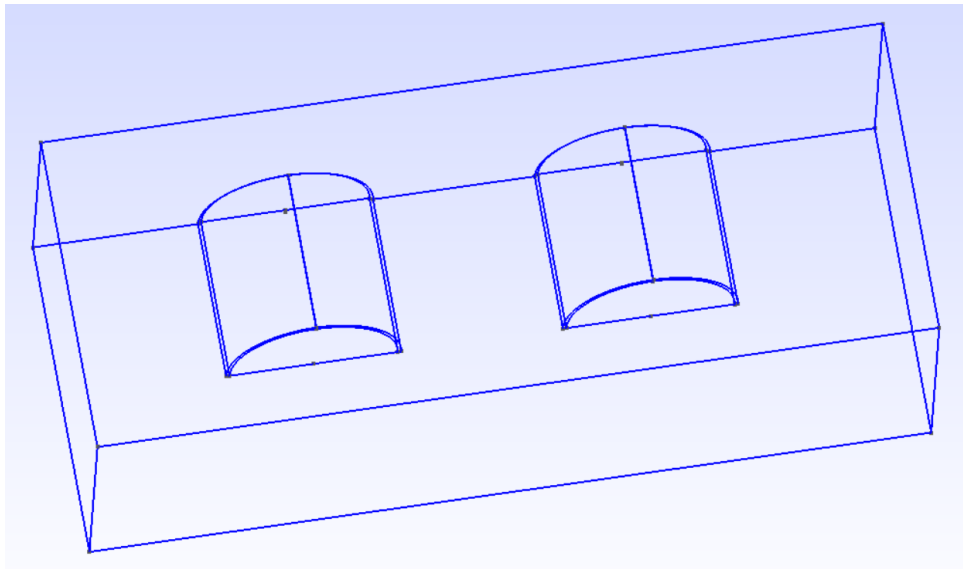
5.12. ábra – Záródó kúp nyomásterének valós része $k \cdot r_1 = 3.48$ -as értéknél

6 Kölcsönös impedancia

A kölcsönös impedancia számításához nagyrészt az eddig leírtakat használtam, mind elméletben, mind a futtatott Matlab programom szempontjából, csupán néhány módosítást kellett eszközölnöm.

6.1 Geometria

Mivel kölcsönös impedancia számításához nem elég egy kürt, így Gmsh-ben megrajoltam egy kéthengeres elrendezést. A két hengerem párhuzamos, sugarukat, hosszukat, távolságukat, és a tér méreteit lehet paraméterezni a programban. Az elrendezés a 6.1. ábrán látható.



6.1. ábra - Két henger elhelyezése Gmsh-ben kölcsönös impedancia számításához

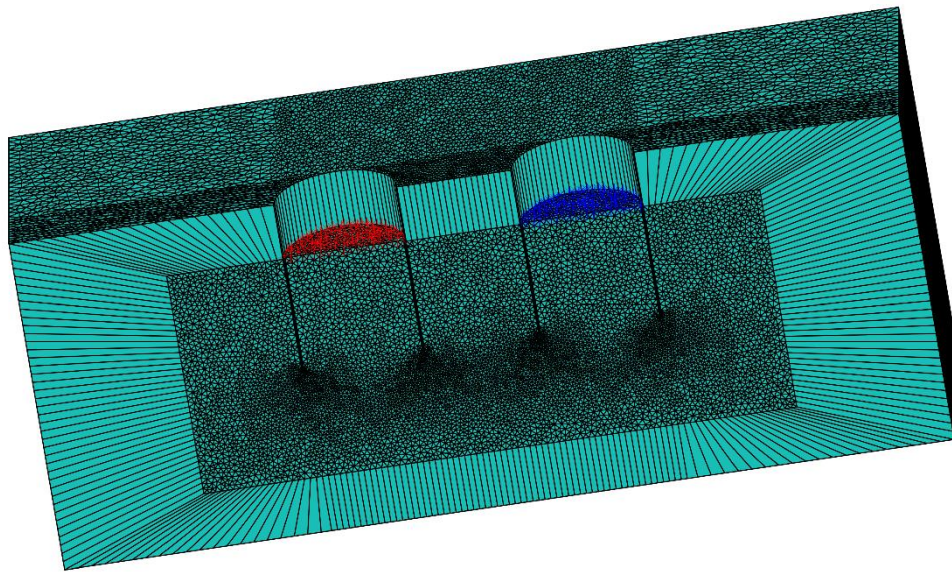
Ahogy a képen is látszik, az elrendezés immáron nem hengersizmetrikus, viszont szimmetriasíkja még van, így a teljes hengereket és teret nem rajzoltam meg, csak az egésznek a felét. Az ok ugyanaz, a számítási igény csökkentése.

6.2 A modell

A kéthengeres modellben az elrendezésem olyan, mintha egy hengeren keresztül sugároznánk a térbe, ahol egy végtelen hosszú másik henger található. Azt feltételezhetjük, hogy a kölcsönös sugárzási impedancia a hengerek szájának akusztikai

kölcsönhatása miatt alakul ki, a hengerek testeik közti (akár többszörös) reflexiók hatását másodlagosnak tekinthetjük.

A kúpos esetben kétféle pontjaim voltak. Egyik részben ismertem a nyomást (gerjesztett pontok), a másikban nem. A kölcsönös impedancia számításánál a pontok osztályozása kicsit másként alakultak. A gerjesztett rész megmaradt (az egyik henger torkánál), a másik henger torkánál lévő pontokat nem gerjesztettem, azon pontokon nincs reflexió, így azok is hasonlóan működnek, mintha végtelenelemek határolnák őket. A fennmaradó pontokban ugyanúgy kerestem a nyomást, mint a kúpnál.



6.2. ábra - A gerjesztett pontok

A képen a piros pontok mutatják a gerjesztést, ezen pontok nyomásai a \bar{p}_1 vektorral írható le, ami ismert. A kék pontok a másik henger torkánál lévő pontokat jelzik, ahol a nyomásérték nem ismert (\bar{p}_2). A többi pontot, mint ahogy az előző esetben is a \bar{p}_3 vektorral jellemezhetjük, ami ismeretlen.

6.3 Diszkrét egyenlet

A már egy kúpnál említett diszkrét egyenlet megoldása kölcsönös impedancia számítása esetén kicsit bonyolultabb, mivel itt a tér pontjait három részre osztottam fel. Továbbá a \bar{p}_2 -es pontoknak a v részecskesebessége nem nulla, mint ahogy előzőekben volt, viszont a 2-es csoportba tartozó pontok nyomása és sebessége között egy egyszerű összefüggés teremt kapcsolatot:

$$\bar{p}_2 = Z_0 \bar{v}_2 \quad (31)$$

Ebben az esetben a diszkrét egyenlet a következő mátrixos formában írható:

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} \\ \bar{S}_{31} & \bar{S}_{32} & \bar{S}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{Q}_{22} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{v}_2 \\ \bar{0} \end{bmatrix} \quad (32)$$

A második sor:

$$\bar{S}_{21}\bar{p}_1 + \bar{S}_{22}\bar{p}_2 + \bar{S}_{23}\bar{p}_3 = \bar{Q}_{22}\bar{v}_2 \quad (33)$$

(31)-t behelyettesítve és \bar{v}_2 -re rendezve:

$$\bar{v}_2 = (\bar{Q}_{22} - \bar{S}_{22}Z_0)^{-1}(\bar{S}_{21}\bar{p}_1 + \bar{S}_{23}\bar{p}_3) \quad (34)$$

Ezzel van egy egyenletünk \bar{v}_2 -re, amiben csak egy ismeretlen van: \bar{p}_3 . Ezt kiküszöbölendő, felírva a (32) harmadik sorának egyenletét:

$$\bar{S}_{31}\bar{p}_1 + \bar{S}_{32}\bar{p}_2 + \bar{S}_{33}\bar{p}_3 = \bar{0} \quad (35)$$

(31)-t, majd (34)-t is behelyettesítve:

$$\bar{S}_{31}\bar{p}_1 + \bar{S}_{32}Z_0(\bar{Q}_{22} - \bar{S}_{22}Z_0)^{-1}(\bar{S}_{21}\bar{p}_1 + \bar{S}_{23}\bar{p}_3) + \bar{S}_{33}\bar{p}_3 = \bar{0} \quad (36)$$

\bar{B} mátrixot a következő megfeleltetéssel bevezetve:

$$\bar{B} = \bar{Q}_{22} - \bar{S}_{22}Z_0 \quad (37)$$

és a (36) egyenletet \bar{p}_3 -ra rendezve megkapjuk a kicsit bonyolultabb megoldást amivel ki tudjuk számolni a nyomást a teljes térben:

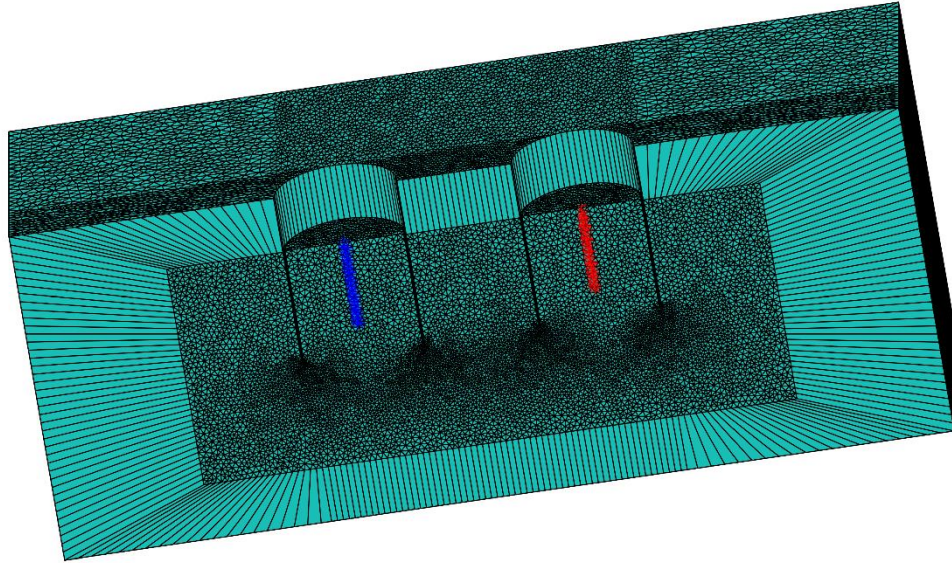
$$\bar{p}_3 = -(\bar{S}_{32}Z_0\bar{B}^{-1}\bar{S}_{23} + \bar{S}_{33})^{-1}(\bar{S}_{31} + \bar{S}_{32}Z_0\bar{B}^{-1}\bar{S}_{21})\bar{p}_1 \quad (38)$$

(38)-at visszahelyettesítve (32) második sorába, \bar{p}_2 már könnyedén számolható.

6.4 Utófeldolgozás

A virtuális mikrofonok elhelyezését egész hasonlóan tettem meg, mint a kúpos esetben, viszont itt mind a két hengerbe helyeztem mikrofonokat. Hasonlóképpen a kúpos esethez, a mikrofonokat itt is a hengerek szájától kicsit visszább helyeztem el.

A két hengerben a mikrofonoknál lévő nyomásértéket külön-külön számoltam ki, pont úgy, mint a kúpos esetben. Ezen 6.4-es fejezetben a p_1, p_2, v_1, v_2 a két hengerben elhelyezett mikrofonokhoz tartoznak.



6.3. ábra - A mikrofonok elhelyezése

A kéthengeres elrendezésben a kúpos esettel ellentétben a gerjesztésem síkhullám. Ezen esetben is az Euler-egyenlet segítségével számoltam ki az impedanciákat. A fentebb említett $\bar{p}_1(z)$ és $\bar{p}_2(z)$ már ismert, ezen értékeket már kiszámítottam. A két henger szájánál ($z = l$) lévő p nyomások és v részecskesebességek között a következő mátrixegyenlet írja le a kapcsolatot:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Mivel az én elrendezésem szimmetrikus és a két henger egyforma, így $Z_{11} = Z_{22} = Z_s$, ez a saját impedancia és $Z_{12} = Z_{21} = Z_m$, ami pedig a kölcsönös impedancia. A (39) tehát így alakul:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_s & Z_m \\ Z_m & Z_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Ebben az esetben is felbontható a \bar{p} p^+ -ra és p^- -ra, viszont itt a nyomás és a sebesség kapcsolatát a

$$\bar{v}(z) = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial \bar{p}(z)}{\partial z} \quad (41)$$

Euler-egyenlet írja le. Ebbe \bar{p} -t behelyettesítve, a deriválást elvégezve és kicsit átalakítva, (41) így alakul:

$$\bar{v}(z) = -\frac{1}{\rho_0 c} (-p^+ e^{-jkz} + p^- e^{jkz}) \quad (42)$$

A $z = l$ pontban behelyettesítve a (40) mátrixegyenlet első sorába a következő adódik:

$$p_1^+ e^{-jkl} + p_1^- e^{jkl} = Z_s \frac{1}{\rho_0 c} (p_1^+ e^{-jkl} - p_1^- e^{jkl}) + Z_m \frac{1}{\rho_0 c} (p_2^+ e^{-jkl} - p_2^- e^{jkl}) \quad (43)$$

A második sorra is hasonló a behelyettesített egyenlet, viszont az egyszerűbb átláthatóság érdekében bevezettem a következő jelöléseket:

$$a_1 = p_1^+ e^{-jkl} + p_1^- e^{jkl} \quad (44)$$

$$b_1 = p_1^+ e^{-jkl} - p_1^- e^{jkl} \quad (45)$$

Az a_2 és b_2 ehhez teljesen hasonló csak mindenhol 2-es indexek szerepelnek. Ezen jelölésekkel tehát a következő egyenletrendszert kaptam:

$$a_1 = \frac{Z_s}{Z_0} b_1 + \frac{Z_m}{Z_0} b_2 \quad (46)$$

$$a_2 = \frac{Z_s}{Z_0} b_2 + \frac{Z_m}{Z_0} b_1 \quad (47)$$

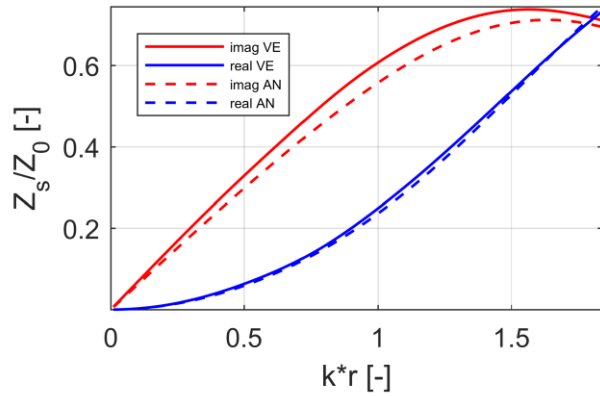
Mivel az a és b értékek már ismertek, így ez egy kétismeretlenes egyenletrendszer és mivel két egyenletünk van, így meg is oldható, és az impedanciák számíthatóak:

$$Z_m = \frac{(b_1 a_2 - b_2 a_1) Z_0}{b_1^2 - b_2^2} \quad (48)$$

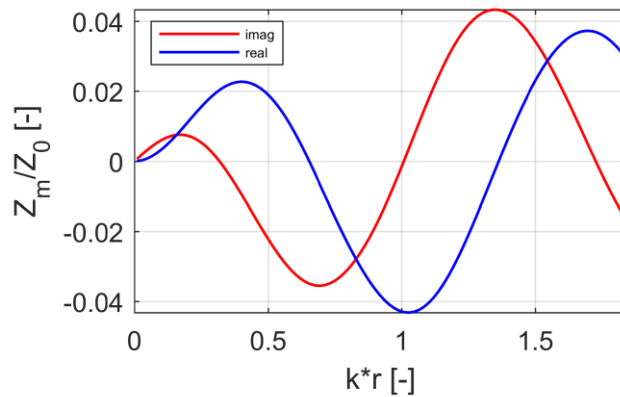
$$Z_s = \frac{Z_0 a_1 - Z_m b_2}{b_1} \quad (49)$$

6.5 Eredmény

Az én két hengeres esetemben a saját impedancia megegyezik az eddig vizsgált egyhengeres elrendezéssel, ugyanis két hengernél a nem gerjesztett henger nem zavarja túlságosan a szimulációt. A sajátimpedanciát így ismét az analitikus megoldással vettem össze (6.4. ábra), ahogy ezt az 5.1. fejezetben is tettem. Ezúttal is van eltérés, az ok hasonló, sőt itt a saját impedanciát a másik henger is zavarja kicsit, ugyanis itt nem a teljesen szabad akusztikai térbe történik a sugárzás.

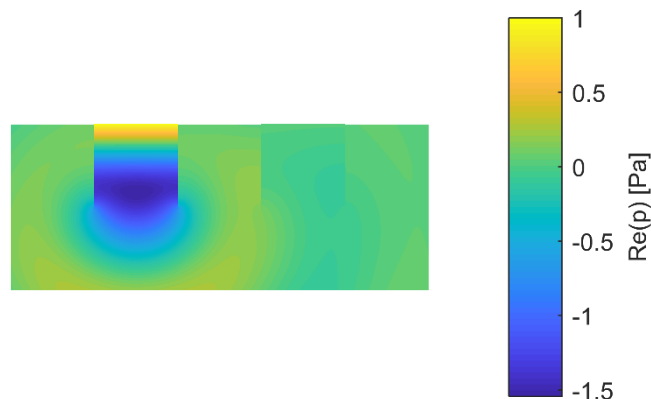


6.4. ábra – Sajátimpedancia összevetve az analitikus megoldással



6.5. ábra - Kölcsönös impedancia

A kölcsönös impedancia kisfrekvencián ($k \cdot r \approx 0.2$ -ig) úgy viselkedik, mint a saját impedancia, efölött viszont kissé hullámzóan viselkedik (6.5. ábra). Érdekességként megfigyelhető, hogy a kölcsönös impedancia valós és képzetes része is felvesz negatív értékeket. Ez a sajátimpedanciánál nem volt megfigyelhető.



6.6. ábra - Kéthengeres nyomástér valós része $k \cdot r=1.5$ -ös értéknél

7 Összefoglalás

A dolgozatomban leírtam egy végeselemmódszeren alapuló számítási eljárás összeállítását. A módszerem képes a sugárzási impedancia, a hosszkorrekció, több sugárzó esetén pedig a kölcsönös impedancia kiértékelésére is. Beimportálható számos különféle elrendezés, nyílásszögek, kúp paraméterek, az algoritmus minimális változtatással közvetlen futtatható rájuk is.

Elvégeztem a módszerem validációját is. Összevettem az egykúpos és a kéthengeres elrendezés esetében is az eredményt az analitikusan kiszámolt sugárzási impedanciával. Ez alapján az algoritmusom hibája kicsi, de nem zérus, ami a végeselemmmódszertől várható is volt. Jogosan feltételezhető az is, hogy a hálózás finomításával – és ezzel a szükséges számítási kapacitás növelésével – a módszer hibája csökkenthető.

A szakdolgozat készítése alatt megismerkedtem a végeselemmódszer alapjaival és alkalmazásával, megismertem továbbá a GMSH programot, illetve a Matlab végeselem szimulációhoz szükséges Toolbox-ot.

Irodalomjegyzék

- [1] R. J. Astley, G. J. Macaulaya, J-P. Coyette, L. Cremers: Three-dimensional wave-envelope elements of variable order for acoustic radiation and scattering. Part I. Formulation in the frequency domain, *Acoustical Society of America*, 103 (1), 0001-4966/98/103(1)/49/15/, January 1998
- [2] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J.Z. Zhu: *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals (Seventh Edition)*, ISBN: 978-1-85617-633-0
- [3] *Finite Elements in Acoustics*, Akuszikai szimulációs eljárások – előadásjegyzet, http://last.hit.bme.hu/download/akuszim/oravazlatok/08b_fem_acoust.pdf
- [4] Fiala Péter: *A hangszerek fizikája – jegyzet*, <http://last.hit.bme.hu/sites/default/files/documents/hangfiz.pdf>
- [5] Yukichi Nomura, Ichiro Yamamura, Sakari Inawashiro: *On the Acoustic Radiation from a Flanged Circular Pipe* – *Journal of the Physical Society of Japan* Vol. 15, No. 3, March 1960
- [6] A. N. Norris, I. C. Sheng: *Acoustic Radiation from a Circular Pipe with an Infinite Flange* – *Journal of Sound and Vibration* 135(1), pp. 85-93, 1989
- [7] Y. Ando: *On the Sound Radiation from Semi-Infinite Circular Pipe of Certain Wall Thickness* – *ACUSTICA*, Vol. 22, 1969/70
- [8] Harold Levine, Julian Schwinger: *On the Radiation of Sound from an Unflanged Circular Pipe* – *Physical review*, vol. 73, number 4, February 15, 1948
- [9] Thomas Hélie, Xavier Rodet: *Radiation of a Pulsating Portion of a Sphere: Application to Horn Radiation* – *Acta Acustica united with Acustica*, Vol. 89, pp. 565-577, 2003
- [10] Mathworks MATLAB, <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>
- [11] C. Geuzaine, J.-F. Remacle: *Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79(11), pp. 1309-1331, 2009., http://gmsh.info/doc/preprints/gmsh_paper_preprint.pdf