Hangszerek fizikája zárthelyi dolgozat

2010. március 30. 12.15-14.00

1. feladat: (5 pont)

Egy $L_x = 0{,}5\ \mathrm{m} \times L_y = 0{,}25\ \mathrm{m}$ méretű, $0{,}1\ \mathrm{mm}$ vastag négyszögletes feszített bőrmembránban $100\ \mathrm{N/m}$ feszítő erő hat. A membránt pontszerűnek tekinthető ütővel ütjük meg az $x = L_x/4$, $y = L_y/2$ pozícióban.

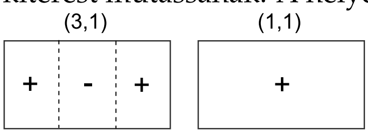
a. Mely módusok szerepelnek a szabadválaszban?

b. Vázolja fel előjelhelyesen az $(1,1)$ és $(3,1)$ módusok Chladni-ábráit, és adja meg a sajátfrekvenciáikat! A bőr sűrűsége $1{,}38 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$.

Megoldás:

a.) A válaszban azon (m, n) egész számpárok által megadott $\sin(m\pi x/L_x)\sin(n\pi y/L_y)$ módusalakok vesznek részt, melyek esetében m néggyel nem osztható, n pedig páratlan.

b.) A Chladni-ábrákat előjelhelyesen úgy kell ábrázolni, hogy a gerjesztési pozícióban pozitív kitérést mutassanak. A helyes ábrák tehát:



A rezgés terjedési sebessége a bőrben:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} = \sqrt{\frac{T}{t\rho}} = \sqrt{\frac{100\ \mathrm{N/m}}{10^4\ \mathrm{m} \times 1{,}38 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}}} = 26{,}9\ \mathrm{m/s} \tag{1}$$

Az (m, n)-es módus sajátfrekvenciája

$$f_{m,n} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2} = \frac{26{,}9\ \mathrm{m/s}}{2\ \mathrm{m}}\sqrt{4m^2 + 16n^2} \tag{2}$$

aminek értéke $(m, n) = (1, 1)$ esetére $60{,}2\ \mathrm{Hz}$, $(m, n) = (3, 1)$ esetére $97{,}1\ \mathrm{Hz}$.

2. feladat: (5 pont)

Adja meg Esz-alapú püthagoraszi hangolású tizenkétfokú skálán a D-dúr (D-Fisz-A) hármashangzat hangközeinek frekvenciaarányait, illetve adja meg a hangközök temperált hangközökhöz mért eltéréseit centben!

Megoldás:

Esz-alapú püthagoraszi kvintkörön a D-A kvint tiszta $2 : 3$ arányhoz tartozik, a D-Fisz nagyterc pedig négy egymásra épülő tiszta kvintből rakható össze. Ezek alapján a D-Fisz frekvenciaarány $(3/2)^4/2^2 = 81/64$ (a híres püthagoraszi nagyterc), a Fisz-A kisterc frekvenciaaránya pedig a kvintből visszaszámolva $(3/2)/(81/64) = 32/27$.

A püthagoraszi nagyterc temperált, azaz négyszáz centes nagyterctől való eltérése

$$1200 \log_2(81/64) - 400 = 7{,}82\ \mathrm{cent} \tag{3}$$

A püthagoraszi kisterc temperált, azaz háromszáz centes kisterctől való eltérése

$$1200 \log_2(32/27) - 300 = -5{,}87\ \mathrm{cent} \tag{4}$$

3. feladat: (5 pont)

Egy kör keresztmetszetű réz csőharang külső átmérője $D = 8$ cm, falvastagsága $t = 5$ mm.

a. Mekkora a csőharang inerciasugara?

b. Mekkorának válasszuk a cső hosszát, hogy alaphangja a 220 Hz-es A hang legyen? A rézben a longitudinális rezgés terjedési sebessége $c_L = 3700$ m/s.

c. Hogyan változik az alaphang frekvenciája, ha a külső átmérőt a felére csökkentjük (a falvastagság változatlan marad)?

Megoldás:

a.) A $K = \sqrt{I/A}$ inerciasugár kör keresztmetszetű cső esetére

$$K = \sqrt{\frac{(R^4 - r^4)\pi/4}{(R^2 - r^2)\pi}} = \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{2} = \frac{\sqrt{D^2 + (D - 2t)^2}}{4} = \frac{\sqrt{8^2 + 7^2}}{4} \text{ cm} = 2{,}66 \text{ cm} \tag{5}$$

b.) A csőharangban hajlító rezgés ébred, a peremfeltétel szabad-szabad lezárás. A megfelelő alapfrekvencia kifejezése

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\frac{\pi^2}{4L^2}3{,}0012^2 = \frac{9\pi c_L K}{8L^2} \tag{6}$$

ahonnan a hossz kifejezése

$$L = \sqrt{\frac{9\pi c_L K}{8 f_1}} = \sqrt{\frac{9\pi \cdot 3700 \text{ m/s} \cdot 2{,}66 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{8 \cdot 220 \text{ Hz}}} = 1{,}26 \text{ m}. \tag{7}$$

c.) Az alaphang frekvenciája a K inerciasugárral lineárisan változik. Az új inerciasugár

$$K' = \frac{\sqrt{4^2 + 3^2}}{4} \text{ cm} = 1{,}25 \text{ cm} \tag{8}$$

ahonnan az új alapfrekvencia

$$f_1' = f_1 \frac{K'}{K} = f_1 \frac{1{,}25 \text{ cm}}{2{,}66 \text{ cm}} = 103{,}48 \text{ Hz}. \tag{9}$$

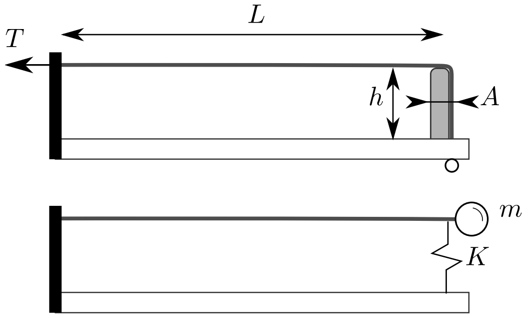
4. feladat: (5 pont)

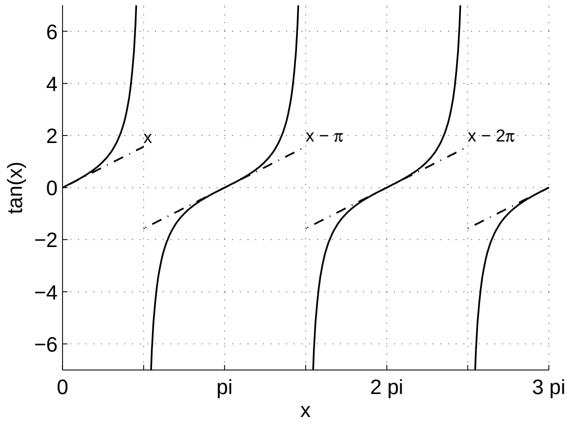
Egy $L = 60$ cm hosszú gitárhúrban $T = 70$ N feszítő erő hat. A rúd bal oldala mereven be van fogva, jobb oldalát egy fa húrláb tartja az alábbi ábrán vázolt módon. A húrláb keresztmetszetének átmérője $A = 25$ mm^2, magassága $h = 4$ cm. A fa sűrűsége $\rho = 1300$ kg/m^3, Young-modulusa pedig $E = 100$ MPa. A húrláb kis frekvencián jól közelíthető koncentrált elemes rendszerrel, melynek rugómerevsége $K = EA/h$, tömege pedig a húrláb tömegének fele.

a. Rugóként vagy tömegként látja a húr a lezárást? Válaszát indokolja!

b. Hogyan hat (kvalitatívan) a nemideális lezárás a húr sajátfrekvenciáira?

c. A sajátfrekvencia változása a húr effektív hosszának változásaként is felfogható. Adjon közelítő összefüggést a húr látszólagos relatív hosszváltozására! Segítségként használja fel a tangens függvény zérushelyek környékén érvényes $\tan x \approx x - n\pi$ lineáris közelítését!





Megoldás:

a.) A húrláb sajátfrekvenciája

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EA/h}{\rho A h/2}} = \frac{\sqrt{E/2\rho}}{\pi h} = 1{,}56\ \mathrm{kHz}. \tag{10}$$

Ez a frekvencia lényegesen magasabb, mint a gitárhúrok alapfrekvencia-tartománya, tehát a húr a lezárást rugóként látja.

b.) A nemideális (vagyis nem végtelen merevségű) rugalmas lezárás a húr sajátfrekvenciáinak csökkenését eredményezi.

c.) A sajátfrekvencia csökkenésének mértékét a K_0/K tényező határozza meg, ahol $K_0 = T/L = 100\ \mathrm{N}/0,4\ \mathrm{m} = 250\ \mathrm{N/m}$ a húr ekvivalens merevsége. A kialakuló k hullámszámot meghatározó egyenlet

$$-\frac{K_0}{K}kL = \tan kL \approx kL - n\pi \tag{11}$$

azaz

$$kL\left(1 + \frac{K_0}{K}\right) = n\pi \tag{12}$$

A képletből kiolvasható, hogy a nemideálisan lezárt húr látszólagos hossza $L' = L(1 + K_0/K)$. A relatív hosszváltozás tehát a K_0/K értékkel egyezik meg, ami jelen esetben

$$\frac{K_0}{K} = \frac{250\ \mathrm{N/m}}{62500\ \mathrm{N/m}} = 4 \cdot 10^{-3} \tag{13}$$

Ez közel hét centes hangmagassság-csökkenésnek felel meg.