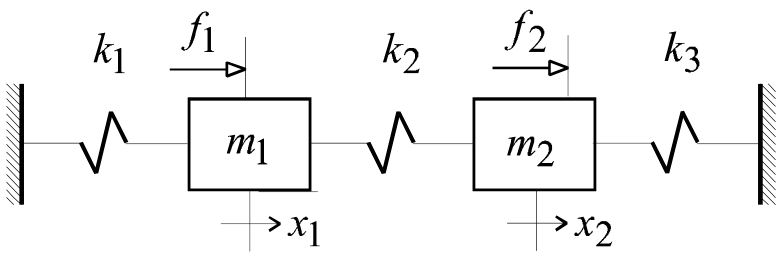
4. Több szabadságfokú mechanikai rendszerek modális elemzése

4.1 Megoldás az idotartományban

Folytassuk elemzésünket olyan rendszerekkel, amelyek egynél több tömeget tartalmaznak, de egyelore csak egyirányú kitéréseket engedjünk meg és zárjuk ki a forgási szabadságfokok lehetoségét is! A 4.1 ábra mutat egy egyszeru példát, amelyen két tömeget három rugó és csillapító kapcsol a végtelen tömegnek tekintett, kétoldali merev falakhoz. A tömegek csak x irányú kitérést végezhetnek. A rendszert a tömegek súlypontjában ható f_1 és f_2 erok támadják (az ábrán csak rajztechnikai okok miatt nem ott tüntettük fel oket), a két tömeg ezek hatására fellépo kitérése x_1 és x_2. Írjuk fel a rendszer mozgásegyenleteit és oldjuk meg oket a korábbiakhoz hasonló módon!



4.1 ábra

Az 1-es jelu tömegre ható ero egyfelol gyorsítja a tömeget, másfelol nyújtja az 1-es jelu rugót és csillapítót. A két tömeget összeköto elemeken is léphet fel ero (hacsak nem azonos kitéréssel mozog a két tömeg), amelynek iránya attól függ, hogy az x_1, vagy az x_2 kitérés nagyobb-e. Mindezeket összegezve az alábbi egyenlet írható fel (ahol – egyelore – mind az erok, mind a kitérések idofüggvényeknek tekintendok, de az idofüggést helytakarékosság okán nem jelöljük):

$$f_1 = m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1 x_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2(x_1 - x_2) \qquad (4.1a)$$

Teljesen analóg módon írható a másik tömegre vonatkozó egyenlet is:

$$f_2 = m_2\ddot{x}_2 + c_3\dot{x}_2 + k_3 x_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) \qquad (4.1b)$$

A két egyenlet célszeruen egy mátrixegyenletben foglalható össze:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \left[\begin{array}{c:c} c_1 + c_2 & -c_2 \\ \hdashline -c_2 & c_2 + c_3 \end{array}\right]\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \left[\begin{array}{c:c} k_1 + k_2 & -k_2 \\ \hdashline -k_2 & k_2 + k_3 \end{array}\right]\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Az elso mátrixot ***tömegmátrix***nak, a másodikat ***csillapításmátrix***nak, a harmadikat ***merevségmátrix***nak nevezik. Az $[M]$, $[C]$ és $[K]$ mátrixjelölések bevezetésével az egyenlet az elegáns és tömör

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\} = \{f\} \tag{4.1c}$$

alakra hozható.

A mátrixegyenletek megoldásánál most is a korábban bevált módszert követjük: feltesszük, hogy a megoldást az exponenciális

$$\{x\}=\{X\}e^{pt} \tag{4.2}$$

alakban kapható meg. Ennek deriváltjai

$$\{\dot{x}\}= p\{X\}e^{pt} = p\{x\} \quad \text{és}$$

$$\{\ddot{x}\}= p^2\{X\}e^{pt} = p^2\{x\}$$

Egyszerusítsük egyelore a problémát azzal, hogy a csillapításokat elhanyagoljuk! A homogén egyenlet eloállítása céljából nulla gerjesztéseket feltéve a

$$\left[p^2[M] \ +[K]\right]\{x\}=\{0\} \tag{4.3}$$

mátrixegyenletet kapjuk, amelyben a baloldalon álló négyzetes mátrix az ún. ***rendszermátrix*** vagy ***dinamikus mátrix***. Az egyenletben nem csak a kitérések oszlopvektora, hanem a rendszermátrixban szereplo p paraméter is ismeretlen. Az egyenlet csak akkor szolgáltat triviálistól különbözo megoldást, ha a rendszermátrix szinguláris, azaz ha sorai és/vagy oszlopai nem függetlenek egymástól. Ebben az esetben a rendszermátrix determinánsa nulla, amikbol a p-re kapunk egyenletet. Azt megoldva és visszahelyettesítve az egyenlet megoldásai is nyerhetok.

Ez a megoldás elvben egyszeru, de kettonél több szabadságfok esetén a determináns kifejtése és megoldása fáradságos és nem hatékony. Sokkal jobb módszer, ha a mátrixegyenletet két lépésben egy nevezetes alakra hozzuk. Szorozzuk meg (4.34) mindkét oldalát balról a tömegmátrix inverzével, majd rendezzük:

$$\left[p^2[I]+[M]^{-1}[K]\right]\{x\} = \{0\} \tag{4.4a}$$

$$\left[[M]^{-1}[K]\right]\{x\} = -\,p^2\{x\} \tag{4.4b}$$

Ez utóbbi egyenlet a mátrixanalízisbol jól ismert forma: azt állítja, hogy az $[M]^{-1}[K]$ mátrixot egy $\{x\}$ vektorral szorozva éppen az $\{x\}$ vektor valahányszorosát kapjuk vissza. Ez viszont azt jelenti, hogy a (4.3) egyenlet rendszerint $\{Y\}$-vel jelölt megoldása éppen az $[M]^{-1}[K]$ mátrix ***sajátvektor***aival egyenlo, a p paraméterre vonatkozó megoldás pedig nem más, mint a mátrix ***sajátérték***einek négyzetgyöke. Amennyiben a mátrixok ismertek, a sajátértékek és sajátvektorok meghatározására nagyon hatékony és minden mátrixszámításra szolgáló programkönyvtárban megtalálható algoritmusok és rutinok állnak rendelkezésre. A kapott matematikai eredmény fizikai tartalmának alapján a szerkezetdinamikában a $\{Y\}$ sajátvektorokat ***módusalak***nak vagy ***módusvektor***nak is nevezik.

4.1.1 Példa két szabadságfokú rendszer számítására

Legyen a 4.1 ábrán bemutatott rendszer elemeinek értéke az alábbi:

$m_1 = 5$ $m_2 = 10$

$k_1 = 2$ $k_2 = 2$ $k_3 = 4$

$c_1 = 0$ $c_2 = 0$ $c_3 = 0$

A rendszer homogén mátrixegyenlete a (4.1c) egyenletbe való helyettesítéssel az alábbi alakot ölti:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A deriválást és beszorzást elvégezve a rendszermátrixra az

$$\left[\begin{array}{c:c} 5p^2+4 & -2 \\ \hdashline -2 & 10p^2+6 \end{array}\right]$$

alakot kapjuk, amelynek determinánsa

$$\left(5p^2+4\right)\left(10p^2+6\right) - (-2)(-2) = 0$$

A beszorzásokat elvégezve és a $p^2 = r$ *helyettesítést alkalmazva az*

$$5r^2 + 7r + 2 = 0$$

karakterisztikus egyenletet nyerjük, amelynek gyökei –1 és –2/5. Ezekbol négyzetgyököt vonva kaphatjuk meg a keresett p *értékeket:*

$$p_{1.1,2} = \pm j \quad \text{és} \quad p_{2.1,2} = \pm j\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Az elso gyökpárt visszahelyettesítve a rendszermátrix a $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ *alakot ölti. Ebbol jól látható, hogy a két egyenlet valóban nem független egymástól, és a* *megoldásról is csak annyit tudhatunk meg, hogy* $x_2 = \frac{-x_1}{2}$. *Minden olyan* x_1, x_2 *számpáros megoldás tehát, ami ezt kielégíti.*

A számítást a $p_{2.1,2}$ *gyökpárra elvégezve az* $x_1 = x_2$ *eredményt kapjuk.*

A fenti probléma megoldása tehát kétféle eredményre vezet:

- *az alacsonyabb,* ω=0,63 rad/s *körfrekvencián a két tömeg azonos amplitúdóval és azonos fázisban mozog;*
- *az* ω=1 rad/s *körfrekvencián olyan sajátrezgés-alak lehetséges, amelynél a kisebbik tömeg kétszeres amplitúdóval és ellenfázisban rezeg a nagyobbikhoz képest.*

A mérnöki és tudományos számításokban gyakran alkalmazott matematikai programcsomagokkal a fenti probléma nagyon könnyen és egyszeruen oldható meg. MATLAB programnyelven például az alábbi pár sor beírásával kapjuk meg az eredményt (a vastag betuvel szedett szöveg a program felhasználója által begépelendo szöveg, a vékonybetus rész a program válasza):

```
» M=[5 0; 0 10]

M =
     5     0
     0    10

» K=[4 -2; -2 6]

K =
     4    -2
    -2     6

» S=inv(M)*K

S =
    0.8000   -0.4000
   -0.2000    0.6000

» [sajvektor,sajertek]=eig(S)

sajvektor =
    0.8944    0.7071
   -0.4472    0.7071

sajertek =
    1.0000         0
         0    0.4000
```

A `sajvektor` mátrix oszlopai tartalmazzák az egyes sajátvektorokat, a `sajertek` (mindig diagonális) mátrix átlójában levo számok négyzetgyöke adja a sajátfrekvenciákat.

4.1.2 A megoldás általánosítása: a modális modell

A fenti számítással kapcsolatban helyénvaló itt néhány általános megjegyzést tennünk.

1. A (4.3), ún. másodrendu modális alaknak vagy homogén egyenlet-rendszernek nincs egyértelmu (idegen szóval: unikális) megoldása. Egy lehetséges megoldásvektor konstanssal szorzott értékei és ezek bármely lineáris kombinációja is megoldás. Ennek az a nyilvánvaló oka, hogy a homogén egyenlet dinamikus mátrixának kisebb a rangja, mint a mérete.
2. A legegyszerubb módusalak (több szabadságfokú rendszernél nem csak egy, hanem gyakran több is) mindig a legalacsonyabb sajátfrekvenciához tartozik. Ezek a módusok olyan rezgésformát képviselnek, aminél minden tömeg azonos amplitúdóval és kitéréssel rezeg, ezért az ilyen módusokat „merev test módusnak" nevezik.
3. A módusok száma mindig egyenlo a szabadságfokok – és ennek következtében a rendszermátrix sorai/oszlopai, valamint a sajátértékek – számával. (Ez azonban nem szükségszeruen jelenti azt, hogy minden sajátérték különbözo. A gyakorlati rendszerekben gyakran meglevo szimmetria esetén a rendszernek több azonos sajátértéke is lehet, az ezekhez tartozó módusalakok azonban különbözok.)
4. Megfigyelheto, hogy a két tömeg közötti fizikai csatolást létrehozó k_2 rugó a mátrixegyenletben is csatolási szerepet játszik, amennyiben a foátlón kívül helyezkedik el a mátrixban. Ha k_2 értéke nulla lenne (azaz nem is lenne ott rugó), a mátrixban csak a foátlóban lennének elemek, ami azt jelenti, hogy az egyenletrendszer egyenletei egymástól függetlenek lennének. Az eredetileg egy darab két szabadságfokú rendszer ilyenkor két darab egy szabadságfokú rendszerre bomlik.

Fontos itt megérteni és megjegyezni, hogy akár a determináns számításán, akár a sajátérték/sajátvektor meghatározását keresztül jutunk el az eredeti, (4.3) egyenlet megoldásáig, az N szabadságfokú rendszer mátrixegyenletének megoldásával végül mindig a

$$p_1,\ p_2, ...,\ p_r, ...,\ p_N \tag{4.5a}$$

paraméterekhez és a hozzájuk tartozó

$$\{Y\}_r, \quad r = 1, 2, \dots, r, \dots, N \tag{4.5b}$$

megoldásvektorokhoz jutunk. Csillapítatlan esetben a megoldást képviselo p paraméterek mindig tiszta képzetes, komplex konjugáltat alkotó számpárok. A sajátértékek és a frekvencia matematikában szokásos jelöléseivel

$$p_r \equiv l_r = \pm jw_r, \quad r = 1, 2, \ldots, r, \ldots, N \tag{4.6a}$$

A sajátfrekvenciáknak megfelelo sajátvektorokat vagy módusvektorokat egy mátrixba összefoglalva kapjuk a ***módusmátrixot***:

$$[Y] = \left[\begin{Bmatrix} \\ Y \\ \\ \end{Bmatrix}_1 \begin{Bmatrix} \\ Y \\ \\ \end{Bmatrix}_2 \begin{Bmatrix} \\ Y \\ \\ \end{Bmatrix}_r \begin{Bmatrix} \\ Y \\ \\ \end{Bmatrix}_N \right] \tag{4.6b}$$

E kétféle jellemzo együttese a szóban forgó rendszert maradéktalanul meghatározza, ezért a (4.6a) és (4.6b) jellemzoket összefoglaló néven ***modális modellnek*** is nevezzük.

Térjünk most vissza a (4.3) egyenletre, amelyet most a rendszermátrix $[B(p)]$ jelölését bevezetve a

$$[B(p)]\{x\} = \{0\} \tag{4.7}$$

alakban írunk fel. Ennek az egyenletnek megoldása l_r és a hozzátartozó $\{Y\}_r$, tehát visszahelyettesítve igaz, hogy

$$[B(l_r)]\{Y\}_r = \left[l_r^2 \; [M] + [K] \right]\{Y\}_r = \{0\} \tag{4.8a}$$

vagy átrendezve

$$l_r^2 [M]\{Y\}_r = -[K]\{Y\}_r \tag{4.8b}$$

Szorozzuk most meg ezt az egyenletet a mátrixalgebra szabályai szerint balról egy másik, pl. a $[Y]_s$ módusvektorral:

$$l_r^2 \{\; Y \;\}_s \begin{bmatrix} \\ \quad M \quad \\ \\ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \\ Y \\ \\ \end{Bmatrix}_r = -\{\; Y \;\}_s \begin{bmatrix} \\ \quad K \quad \\ \\ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \\ Y \\ \\ \end{Bmatrix}_r$$

azaz

$$l_r^2 \{Y\}_s^T [M]\{Y\}_r = -\{Y\}_s^T [K]\{Y\}_r \tag{4.9a}$$

Teljesen hasonlóan, csak most az s-edik módusvektorból kiindulva írható:

$$l_s^2 \{Y\}_r^T [M]\{Y\}_s = -\{Y\}_r^T [K]\{Y\}_s \tag{4.9b}$$

A (4.9b) és (4.9a) egyenletet egymásból kivonva kapjuk:

$$\left(l_s^2 - l_r^2\right)\{Y\}_r^T [M]\{Y\}_s = -\{Y\}_r^T [K]\{Y\}_s + \{Y\}_s^T [K]\{Y\}_r = \\ = -\{Y\}_r^T [K]\{Y\}_s + \{Y\}_r^T [K]^T \{Y\}_s = 0 \tag{4.10}$$

hiszen a merevségmátrix szükségszeruen szimmetrikus, így transzponáltjával egyenlo.

A (4.10) egyenlet bonyolultnak tunhet, pedig valójában két szám szorzata csupán: a kerek zárójelben levo különbséget a vektor-mátrix-vektor (skaláris) szorzásból kiadódó konstanssal szorozva nullát kell kapnunk. Ha $s \neq r$, azaz két különbözo sajátértéket vizsgálunk, akkor csak a skaláris szorzat lehet nulla:

$$\{Y\}_r^T [M]\{Y\}_s = 0 \tag{4.11}$$

Ha viszont $s = r$, akkor $l_s^2 - l_r^2 = 0$ és a skaláris szorzat értéke véges marad:

$$\{Y\}_r^T [M]\{Y\}_r = M_r \tag{4.12a}$$

és teljesen hasonlóan

$$\{Y\}_r^T [K]\{Y\}_r = K_r \tag{4.12b}$$

A (4.11) egyenlet fizikai értelme az, hogy a mechanikai rendszer különbözo sajátvektorai ortogonálisak, mégpedig nem közönséges, hanem súlyozott értelemben; a súlyozótényezo éppen a tömegmátrix. A (4.12) egyenletekkel meghatározott konstansokat ***modális tömeg***nek és ***modális merevség***nek nevezzük, hiszen a rendszer egészére (de csak annak egy, mégpedig az r-edik módusára) nézve tartalmaznak fontos információt.

4.1.3 Analitikus móduselemzés

A 4.1.1 szakasz példájában láttuk, hogy a rendszert a k_2 rugó jelenléte tette csatolttá, azt is mondhatjuk, hogy a rendszer „merevséggel csatolt". Matematikailag ez azt jelenti, hogy a $[K]$ merevségmátrix nem diagonálmátrix, ezért van szükségünk determinánsok vagy a sajátértékek meghatározására. Sokkal egyszerubb lenne, ha mind a merevség-, mind a tömegmátrix diagonálmátrix lenne, hiszen akkor a megoldás csupa egymástól független egyszabadságfokú rendszer megoldására egyszerusödne. Az alábbiakban belátjuk, hogy van olyan koordinátatranszformáció, amellyel ez könnyen elérheto.

A (4.3) egyenletet – egyszeruség okáért ismét csillapítás nélküli esetre – felírva azt látjuk, hogy az a gerjeszto ero mint bemenet és a tömegek kitérése, mint kimenet között teremt kapcsolatot:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \tag{4.13}$$

Vezessünk be most a kitérések $\{x\}$ vektora helyett egy alkalmasan választott új $[q]$ vektort – a modális koordinátát – úgy, hogy

$$\{x\} = [Y]\{q\} \tag{4.14}$$

azaz a transzformációs mátrix éppen a módusmátrix legyen! Ezzel a (4.13) egyenlet az alábbi:

$$[M][Y]\{\ddot{q}\} + [K][Y]\{q\} = \{f\}$$

Szorozzuk most meg mindkét oldalt a módusmátrix transzponáltjával:

$$[Y]^T [M] [Y]\{\ddot{q}\} + [Y]^T [K][Y]\{q\} = [Y]^T \{f\} \tag{4.15}$$

Fejtsük ki példaként az elso három mátrix szorzatát részletesen:

$$\begin{bmatrix} \{ & Y & \}_1 \\ \{ & Y & \}_2 \\ & \dots & \\ \{ & Y & \}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} \\ Y \\ \\ \end{Bmatrix}_1 & \begin{Bmatrix} \\ Y \\ \\ \end{Bmatrix}_2 & \dots & \begin{Bmatrix} \\ Y \\ \\ \end{Bmatrix}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & M_n \end{bmatrix}$$

minthogy a (4.12a) egyenlet értelmében a módusvektorokkal balról és jobbról szorzott tömegmátrix éppen az $M_1, M_2, \ldots, M_n$ modális tömegeket adja. Az eredmény tehát egy diagonálmátrix – éppen olyan, amilyenre törekedtünk. Hasonló módon járhatunk el a merevségmátrixszal is:

$$[Y]^T [K][Y] = \lceil {}^d K \rfloor \tag{4.16}$$

Ezzel a (4.13) egyenlet a következo alakot ölti:

$$\lceil {}^d M \rfloor\{\ddot{q}\} + \lceil {}^d K \rfloor\{q\} = \{{}^d f\} \tag{4.17}$$

amibol a modális koordinátákra az alábbi egyszeru összefüggés adódik:

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{q}_1 + K_1 q_1 &= {}^d f_1 \\ M_2 \ddot{q}_2 + K_2 q_2 &= {}^d f_2 \\ \dots\dots & \end{aligned} \tag{4.18}$$

A megoldás kétségkívül elegáns. Hibája mindössze annyi, hogy csak akkor alkalmazható, ha elore ismerjük a modális mátrixot – ahhoz viszont eddigi ismereteink szerint meg kell oldanunk az eredeti egyenletrendszert. A *circulus vitiosus* akkor lenne feloldható, ha a módusmátrixot az egyenlet megoldása nélkül is meg tudnánk határozni. Ennek érdekében tovább folytatjuk az elemzést, a gyakorlat szempontjait szem elott tartva azonban nem ido-, hanem komplex frekvenciatartományban.

4.2 Megoldás a komplex frekvenciatartományban

Térjünk kissé vissza a (4.3) egyenlethez, és írjuk fel az összefüggést a komplex frekvenciatartományban (ami formálisan nem jelent egyebet, minthogy az idotartománybeli p paramétert az s komplex frekvenciára cseréljük):

$$\left\lfloor s^2[M]+[K]\right\rfloor\{X\} \equiv [B(s)]\{X\} = \{0\} \tag{4.19}$$

ahol $[B(s)]$ a már ismert rendszermátrix. Ennek inverze a mátrixalgebra közismert összefüggéseivel

$$[B(s)]^{-1} = \frac{adj([B(s)])}{\det([B(s)])} \equiv \frac{[B(s)]^A}{\det([B(s)])} \tag{4.20}$$

ahol az adjungált mátrixot a rövidebb írásmód kedvéért az A felso indexszel jelöltük.

A rendszermátrix és inverzének szorzata definíció szerint az egységmátrixot adja (amelynek foátlójában mindenütt 1, másutt 0 áll):

$$[B(s)]\,[B(s)]^{-1} = [I] \tag{4.21}$$

Ha felidézzük, hogy l_r a karakterisztikus egyenlet valamelyik gyöke, akkor világos, hogy

$$\det([B(s)])\big|_{s=l_r} = 0$$

(4.20)-at (4.21)-be helyettesítve, kissé rendezve és a szorzatot az $s = l_r$ helyen véve

$$[B(l_r)][B(l_r)]^A = \det([B(l_r)])[I] = [0] \tag{4.22a}$$

vagy kissé részletesebben, az adjungált mátrixot oszlopaiból összeállítva

$$[B(l_r)]\begin{bmatrix} \left\{B(l_r)\right\}_1^A & \left\{B(l_r)\right\}_2^A & \cdots & \left\{B(l_r)\right\}_n^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.22b}$$

Az egyenlet az adjungált mátrix bármely oszlopvektorára külön is felírható:

$$[B(l_r)]\ \{B(l_r)\}_i^A = \{0\} \tag{4.22c}$$

Ha most ezt összehasonlítjuk a (4.19) egyenlet jobb oldalával, miközben ott is $s = l_r$ értéket helyettesítünk, nagyon hasonló alakot kapunk:

$$[B(l_r)]\ \{X\}_r = \{0\} \tag{4.23}$$

Ebbol fontos következtetés adódik: láthatjuk, hogy az eredeti egyenletünk r-edik sajátértékhez tartozó sajátvektora – természetesen most is egy konstanstól eltekintve – egyenlo a rendszermátrix adjungáltjának egyik oszlopával:

$$\{Y\}_r = b_{ir}\{B(l_r)\}_i^A \tag{4.24}$$

Ez azt jelenti, hogy a módusvektorok meghatározásához nem kell a kiinduló alapegyenletet feltétlenül megoldanunk. Elegendo, ha adjungáltját elo tudjuk állítani, hiszen annak oszlopai a megoldással egyenértékuek. További fontos felismerés, hogy bármelyik oszlopvektort vehetjük, a megoldást ugyanúgy megkapjuk, legfeljebb az r módusszámtól és az oszlop i indexétol függo b_{ir} konstans lesz más. Ebbol kiindulva, egy itt nem részletezett bizonyítás alapján megadhatjuk az adjungált rendszermátrix és a módusmátrix általános kapcsolatát:

$$[B(l_r)]^A = \left[\begin{array}{c:c:c:c} q_1\begin{Bmatrix} Y_1Y_1 \\ Y_2Y_1 \\ \dots \\ Y_nY_1 \end{Bmatrix} & q_2\begin{Bmatrix} Y_1Y_2 \\ Y_2Y_2 \\ \dots \\ Y_nY_2 \end{Bmatrix} & \dots\dots & q_n\begin{Bmatrix} Y_1Y_n \\ Y_2Y_n \\ \dots \\ Y_nY_n \end{Bmatrix} \end{array}\right] = Q_r\,[Y]_r\,[Y]_r^T \tag{4.24}$$

A kapcsolat megteremtésének egyetlen feltétele, hogy a sajátértékek ismertek legyenek.

Ez az újabb lépés látszólag még mindig nem segít a feladatok egyszerusítésében, hiszen nem sokkal egyszerubb az adjungált mátrixot eloállítani, mint a rendszeregyenletet megoldani – ráadásul még a sajátértékek ismeretére is szükség van. Nagyon fontos azonban az a különbség, hogy a rendszermátrixot vagy annak inverzét – legalábbis a valós frekvenciákra – méréssel akkor is meg lehet határozni, ha a rendszer modellje – és így a tömegek, rugók és csillapítók értékei, vagyis a komplex frekvenciával paraméterezett numerikus mátrix – nem ismert. Ez a felismerés veti meg a kísérleti móduselemzés elméleti alapját.

4.3 Kísérleti móduselemzés

4.3.1 Elméleti alapok: a transzfer függvény és a módusmátrix kapcsolata

Az

$$\{X(x)\} = [B\{s\}]\{F(s)\} \tag{4.25}$$

egyenlet a rendszermátrix segítségével a komplex frekvenciatartományban fejezi ki a rendszert gerjeszto erok és a rendszer válaszát képezo kitérések viszonyát. A mátrixot egy kétszabadságfokú rendszerre részletesen kifejtve:

$$[B(s)] = \left[\begin{array}{c:c} M_{11}s^2 + K_{11} & M_{12}s^2 + K_{12} \\ \hdashline M_{21}s^2 + K_{21} & M_{22}s^2 + K_{22} \end{array}\right] \tag{4.26a}$$

Ennek inverze a (4.20) definíció alapján, elemi úton kiszámolva:

$$[B(s)]^{-1} = \frac{\left[\begin{array}{c:c} M_{22}s^2+K_{22} & -\left(M_{12}s^2+K_{12}\right) \\ \hdashline -\left(M_{21}s^2+K_{21}\right) & M_{11}s^2+K_{11} \end{array}\right]}{\left(M_{11}s^2+K_{11}\right)\left(M_{22}s^2+K_{22}\right)-\left(M_{21}s^2+K_{21}\right)\left(M_{12}s^2+K_{12}\right)} \qquad (4.26b)$$

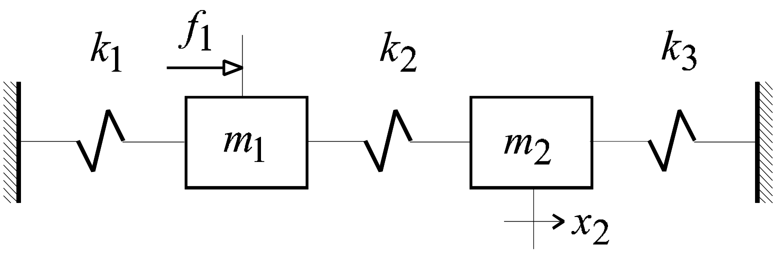
Alakítsuk most át a (4.25) egyenletet:

$$\{X(s)\} = [B(s)]^{-1}\{F(s)\} \qquad (4.27)$$

A rendszermátrix elemei bemenet/kimenet típusú elemeket tartalmaznak, ezért inverze kimenet/bemenet, azaz átviteli függvény típusú elemekbol áll:

$$[B(s)]^{-1} \equiv [H(s)] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2n} \\ \dots & \dots & H_{ij} & \dots \\ H_{n1} & H_{n2} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \qquad (4.28)$$

ahol az elso index a kimeno, a második pedig a bemeno pontra vonatkozik. A $[H(s)]$ transzfer függvény mátrix bármely $H(s)_{ij}$ eleme tehát az i-edik tömeg kitérését adja meg a komplex frekvenciatartományban akkor, amikor a j-edik tömeget valamely f_j erovel gerjesztjük, miközben a többi tömegre ero nem hat, amint azt a 4. ábra mutatja.



4.2 ábra

A transzfer függvény mátrix a 3.2.2 fejezetben már ismertetetthez hasonló módon gyöktényezos alakba írható át:

$$[H(s)] = \frac{1}{\det([B(s)])}[B(s)]^A = \frac{[B(s)]^A}{E(s-l_1)(s-l_2)\dots(s-l_{2n})} \qquad (4.29)$$

Mindezek alapján egy egyszeru, kétszabadságfokú rendszer 1-es bemenetére és 1-es kimenetére vonatkozó transzfer függvényre írhatjuk:

$$H_{11}(s)=\frac{X_1(s)}{F_1(s)}=\frac{c_1}{s-l_1}+\frac{c_2}{s-l_2}+\frac{c_3}{s-l_3}+\frac{c_4}{s-l_4} \tag{4.30}$$

Mivel a karakterisztikus egyenlet együtthatói valósak, a 4 megoldás 2 db komplex konjugált gyökpárt fog tartalmazni:

$$l_2 = l_1^*,\quad l_4 = l_3^* \quad (\textit{és általában}\ \ l_{2n} = l_{2n-1}^*)$$

Az egyes együtthatókat, a reziduumokat az egyszabadságfokú rendszernél megismert módon számíthatjuk és kapjuk:

$$c_1=\frac{M_{22}l_1^2+K_{22}}{E\ \left(l_1-l_1^*\right)\left(l_1-l_2\right)\left(l_1-l_2^*\right)} \tag{4.31a}$$

$$c_2=\frac{M_{22}l_1^{*2}+K_{22}}{E\ \left(l_1^*-l_1\right)\left(l_1^*-l_2\right)\left(l_1^*-l_2^*\right)}=c_1^* \tag{4.31b}$$

$$c_3=\frac{M_{22}l_2^2+K_{22}}{E\ \left(l_2-l_1\right)\left(l_2-l_1^*\right)\left(l_2-l_2^*\right)} \tag{4.31c}$$

$$c_4=\frac{M_{22}l_2^{*2}+K_{22}}{E\ \left(l_2^*-l_1\right)\left(l_2^*-l_1^*\right)\left(l_2^*-l_2\right)}=c_3^* \tag{4.31d}$$

Ezeket behelyettesítve nyerjük

$$H_{11}(s)=\frac{A_{111}}{s-l_1}+\frac{A_{111}^*}{s-l_1^*}+\frac{A_{112}}{s-l_2}+\frac{A_{112}^*}{s-l_2^*}=\sum_{r=1}^{2}\left[\frac{A_{11r}}{s-l_r}+\frac{A_{11r}^*}{s-l_r^*}\right] \tag{4.32}$$

ahol az c konstansokat helyettesíto A együtthatók ismét az ún. reziduumok, amelyek minden egyes gyökre és minden egyes bemenet/kimenet párra külön-külön meghatározandók.

A teljes H mátrix a reziduumokat is mátrixba rendezve kapható:

$$[H(s)] = \frac{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}_1}{s-l_1} + \frac{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}_1^*}{s-l_1^*} + \frac{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}_2}{s-l_2} + \frac{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}_2^*}{s-l_2^*} = \qquad (4.33)$$

$$= \sum_{r=1}^{2} \left(\frac{[A]_r}{s-l_r} + \frac{[A]_r^*}{s-l_r^*} \right)$$

A (4.33) egyenletnek fontos fizikai tartalma van: azt jelenti, hogy az eredeti kétszabadságfokú, tehát két különbözo pólussal rendelkezo rendszer átvitele két egyszabadságfokú rendszer átvitelének összegével egyenlo. (Általános, n-szabadságfokú rendszernél ez n db pólusra és n db egyszabadságfokú rendszerre bovül.) Minden pólushoz egy külön reziduum-mátrix tartozik. Ezek közül pl. a l_1 pólushoz tartozó, elso reziduum-mátrixot részletesen kiszámítva kapjuk

$$\frac{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}_1}{s-l_1} = \frac{\left[\begin{array}{c|c} M_{22} l_1^2 + K_{22} & -\left(M_{12} l_1^2 + K_{12}\right) \\ \hline -\left(M_{21} l_1^2 + K_{21}\right) & M_{11} l_1^2 + K_{11} \end{array}\right]}{E \quad \left(l_1 - l_1^*\right)\left(l_1 - l_2\right)\left(l_1 - l_2^*\right)\left(s - l_1\right)} = \qquad (4.34)$$

$$= const \, \frac{\left[\begin{array}{c|c} M_{22} l_1^2 + K_{22} & -\left(M_{12} l_1^2 + K_{12}\right) \\ \hline -\left(M_{21} l_1^2 + K_{21}\right) & M_{11} l_1^2 + K_{11} \end{array}\right]}{s-l_1}$$

A (4.34) egyenlet számlálójában szereplo mátrix azonos a (4.26b) egyenlet számlálójával, ami nem más, mint a rendszermátrix adjungáltjának értéke az $s = l_1$ helyen véve. Azt is tudjuk már azonban (ld. a 4.24 egyenletet), hogy az l_r helyen kiértékelt adjungált a $\{Y_r\}$ módusvektorral (pontosabban az módusvektor önmagával vett diádikus szorzatával) arányos. Ezzel nagyon fontos összefüggéshez jutottunk:

$$[H(s)] = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{Q_r \{Y\}_r \{Y\}_r^T}{s-l_r} + \frac{Q_r^* \{Y\}_r^* \{Y\}_r^{*T}}{s-l_r^*} \right) \qquad (4.35)$$

Az egyenlet ugyanis közvetlenül kapcsolja össze a transzfer függvényt a módusvektorokkal: azt mondja, hogy a transzfer függvény mátrix sorai (vagy oszlopai) a módusvektorok jó becsloi, egy konstanstól eltekintve. A transzfer függvény ugyan nem, de annak $s = jw$ értéknél vett értékei, az ***átviteli függvény*** a korszeru jelfeldolgozási módszerek segítségével jól mérheto.

4.3.2 Példa: kétszabadságfokú rendszer modális modelljének számítása

A 4.1.1 szakaszban ismertetett számpélda adataival a

$$[H(s)] = \frac{\left[\begin{array}{c:c} 10s^2+6 & 2 \\ \hdashline 2 & 5s^2+4 \end{array}\right]}{\left(5s^2+4\right)\left(10s^2+6\right)-(-2)(-2)} = \frac{\left[\begin{array}{c:c} 10s^2+6 & 2 \\ \hdashline 2 & 5s^2+4 \end{array}\right]}{50\left(s^4+7/5s^2+2/5\right)}$$

Az egyenlet gyökeit már korábban kiszámítottuk:

$$l_1 = j\sqrt{2/5} \qquad l_1^* = -j\sqrt{2/5}$$

$$l_2 = j \qquad l_2^* = -j$$

A gyökök ismeretében könnyen számítható a nevezo gyöktényezos alakja:

$$[H(s)] = \frac{\left[\begin{array}{c:c} 10s^2+6 & 2 \\ \hdashline 2 & 5s^2+4 \end{array}\right]}{50\left(s-j\sqrt{2/5}\right)\left(s+j\sqrt{2/5}\right)(s-j)(s+j)}$$

A transzfer függvény mátrix elso sorának elso eleme a (4.34) *egyenlet alapján*

$$H_{11}(s) = \frac{10s^2+6}{50\left(s-j\sqrt{2/5}\right)\left(s+j\sqrt{2/5}\right)(s-j)(s+j)} =$$

$$= \frac{A_{11_1}}{\left(s-j\sqrt{2/5}\right)} + \frac{A^*_{11_1}}{\left(s+j\sqrt{2/5}\right)} + \frac{A_{11_2}}{(s-j)} + \frac{A^*_{11_2}}{(s+j)},$$

amelyben a reziduumok az alábbiakra adódnak:

$$A_{11_1} = -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} \qquad A^*_{11_1} = \frac{j\sqrt{2/5}}{12}$$

$$A_{11_2} = \frac{-j}{15} \qquad A^*_{11_2} = \frac{j}{15}$$

Az összes pólusokra hasonló módon meghatározott reziduumok alapján felírható a teljes transzfer függvény mátrix:

$$[H(s)] = \frac{\left[\begin{array}{c:c} -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} & -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} \\ \hdashline -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} & -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} \end{array}\right]}{\left(s-j\sqrt{2/5}\right)} + \frac{\left[\begin{array}{c:c} \frac{j\sqrt{2/5}}{12} & \frac{j\sqrt{2/5}}{12} \\ \hdashline \frac{j\sqrt{2/5}}{12} & \frac{j\sqrt{2/5}}{12} \end{array}\right]}{\left(s+j\sqrt{2/5}\right)} + \frac{\left[\begin{array}{c:c} \frac{-j}{15} & \frac{j}{30} \\ \hdashline \frac{j}{30} & \frac{-j}{60} \end{array}\right]}{(s-j)} + \frac{\left[\begin{array}{c:c} \frac{j}{15} & \frac{-j}{30} \\ \hdashline \frac{-j}{30} & \frac{j}{60} \end{array}\right]}{(s+j)}$$

A módusvektorokat a (4.33) *egyenlet alapján kaphatjuk meg. Tekintsük eloször pl. a* $l_1 = \sqrt{2/5}$ *pólushoz tartozó reziduum-mátrixot:*

$$Q_1\{Y\}_1\{Y\}_1^T = Q_1\left[\begin{Bmatrix} Y_1Y_1 \\ Y_2Y_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1Y_2 \\ Y_2Y_2 \end{Bmatrix}\right]_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{j\sqrt{2/5}}{12} & -\dfrac{j\sqrt{2/5}}{12} \\ -\dfrac{j\sqrt{2/5}}{12} & -\dfrac{j\sqrt{2/5}}{12} \end{bmatrix}$$

Ebbol az összefüggésbol kiemelheto a $-\dfrac{j\sqrt{2/5}}{12}$ *közös tényezo, s akkor azt kapjuk, hogy*

$$\left[\begin{Bmatrix} Y_1Y_1 \\ Y_2Y_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1Y_2 \\ Y_2Y_2 \end{Bmatrix}\right]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

amibol nyilvánvaló, hogy

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Hasonló módon a második módusra

$$Q_2\{Y\}_2\{Y\}_2^T = Q_2\left[\begin{Bmatrix} Y_1Y_1 \\ Y_2Y_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1Y_2 \\ Y_2Y_2 \end{Bmatrix}\right]_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{j}{15} & \dfrac{j}{30} \\ \dfrac{j}{30} & -\dfrac{j}{60} \end{bmatrix}$$

Ismét kiemelheto egy – j / 60-as konstans, s akkor

$$\left[\begin{Bmatrix} Y_1Y_1 \\ Y_2Y_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1Y_2 \\ Y_2Y_2 \end{Bmatrix}\right]_2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}_2$$

A két mátrix elemeit egyenlové téve és megoldva kapjuk:

$$Y_1 = 2 \qquad \textit{és} \qquad Y_2 = -1$$

vagyis

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

de fontos megjegyezni, hogy ugyanilyen módon megkaphattuk volna a módusmátrix egy sorát is:

$$\{Y_1 \quad Y_2\}_2 = \{2 \quad -1\}$$

Az eredmények természetesen azonosak a korábban már kétféle módon is kiszámított értékekkel. Az itt bemutatott eljárás jelentosége nem is egyszeru-

ségében, hanem elvi fontosságában rejlik, hiszen a számpéldán keresztül is rámutat a transzfer függvény és a módusvektor közötti szoros kapcsolatra.

4.3.3 A kísérleti móduselemzés gyakorlata

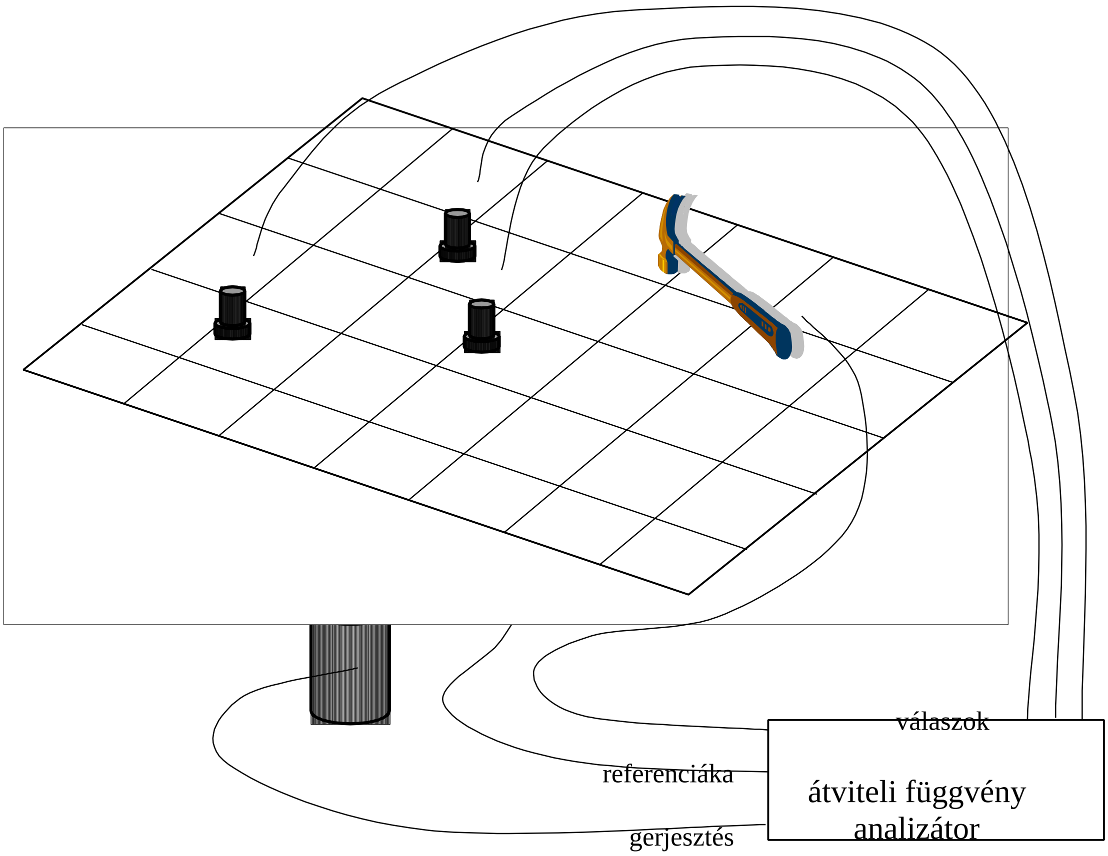
A pontos eljárás ismertetése messze meghaladja e jegyzet kereteit, ezért csak a legfontosabb lépéseket ismertethetjük; egyebekben a vonatkozó szakirodalomra utalunk [Sas , Heylen , Ewins].

A móduselemzés elso lépése a rendszert helyettesíto geometriai modell, az ún. drótmodell megalkotása. A módusalakok meghatározása valóságos rendszerek esetében ugyanis grafikai ábrázolás nélkül nagyon nehezen értékelheto. A drótmodell megalkotása mindig kompromisszum eredménye: minél részletesebb a modell, annál jobban megismerheto a rendszer viselkedése, de annál több mérési pontra van szükség, no a mérési és foleg az utófeldolgozási ido. A szokásos gyakorlatban tucatnyitól több száz pontig (a bevezetoben már említett mérési szabadságfokig) terjed a tipikus modellek mérete.

A modell és a mérési pontok ismeretében kezdheto meg az átviteli függvény mátrix mérése. A vizsgálandó rendszert vagy elektrodinamikus rázóasztal, vagy pedig mérokalapács segítségével rezgésbe hozzuk (ld. a 4.3 ábrát). A gerjeszto erot hitelesített eroérzékelovel mérjük. Fontos, hogy az ero elegendoen nagy legyen jól mérheto kimenojelek képzéséhez az egész vizsgálati frekvenciatartományban, de ne legyen túlságosan nagy, nehogy a rendszer lineáris muködését veszélyeztesse. A válaszjeleket általában nem kitérés-, hanem gyorsulásérzékelovel mérjük. A bemeno és kimeno jeleket szinte kivétel nélkül digitális, vagy számítógépes keskenysávú Fourier-analizátorral elemezzük és keskenysávú átviteli függvényeket határozunk meg a vizsgálati frekvenciatartományban. A mért átviteli függvény mátrix így egy háromdimenziós mátrix lesz, amelynek sorai egy-egy bemenetet, oszlopai egy-egy kimenetet képviselnek, a harmadik dimenzió pedig a (valós) frekvencia.

Minthogy a transzfer függvény mátrix, és így az átviteli függvény mátrix is szimmetrikus, igazolható, hogy egyetlen oszlopból vagy sorból a teljes mátrix rekonstruálható és a modális modell meghatározható. Egyetlen sort akkor kapunk, ha a rendszer kimenetét egy ponton mérjük és a gerjesztés helyét futtatjuk végig a mérési szabadságfokok mentén. (Ez a módszer a mérokalapácsos mérés esetén szokásos.) Ha ezzel szemben a gerjesztés helye marad állandó és a válaszjelek mérésénél mozgatjuk az érzékeloket, az átviteli függvény mátrix egy oszlopát kapjuk. Ez a gyakorlat rezgésgerjeszto alkalmazása esetén és nagyobb pontosságú mérésnél, amikor impulzusok helyett hosszú ideig tartó gerjesztéssel dolgozhatunk, így javul a pontosság és megbízhatóság. Részben ezért, részben pedig az ún. többszörös gyökök meghatározása érdekében több párhuzamos rezgésgerjesztos is szokás használni, amire mérokalapács esetében nincs lehetoség.

A kapott frekvenciaátviteli mátrix meghatározása után annak ellenorzése, majd a modális modell meghatározása következik. Erre a célra ma számos, kereskedelmi forgalomban beszerezheto, hatékony és sokoldalú (ennek megfeleloen eléggé drága) programcsomag áll rendelkezésre. A feldolgozás elso lépéseként az átviteli függvény mátrix sajátértékeit határozzák meg, majd annak ismeretében különféle, a feladat jellegének megfelelo paraméterbecslo matematikai rutin segítségével számítják a módusvektorokat. A feldolgozás utolsó lépése a kapott módusvektorok számítógépi grafika segítségével a képernyon történo megjelenítése, legtöbbször a drótmodell animációja, színes kontúrvonalas vagy felületén színezett nézetek formájában.



4.3 ábra