



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar

Bárány Mihály Tamás

A CSELLÓ REZGÉSAKUSZTIKAI ELEMZÉSE

szakdolgozat

KONZULENS

Dr. Rucz Péter

BUDAPEST, 2021

Összefoglaló	4
Abstract.....	5
1. Fejezet.....	6
2. Fejezet.....	8
3. Fejezet.....	14
3.1. Elméleti bevezetés	14
3.2. Kísérleti móduselemzés.....	18
3.2.1. A mérés gyakorlati megvalósítása.....	19
3.2.2. Eredmények.....	24
4. Fejezet.....	28
4.1. Elméleti bevezetés	28
4.1.1. A fa anyagának jellemzése	28
4.1.2. A lineáris rugalmasságtan peremértékfeladata.....	30
4.2. Eredmények	32
5. Fejezet.....	38
5.1. Elméleti bevezetés	38
5.1.1. Az akusztikai hullámegyenlet	38
5.1.2. Az akusztikai végeselem-módszer	39
5.1.3. A peremelem-módszer	40
5.1.4. Csatolt véges- és peremelem – módszer	42
5.2. Eredmények.....	44
5.2.1. Zárt légüreg	44
5.2.2. Nyitott légüreg.....	49
6. Fejezet.....	55
Irodalomjegyzék	56
Máshonnan átvett képek jegyzéke	57

HALLGATÓI NYILATKOZAT

Alulírott **Bárány Mihály Tamás**, szigorló hallgató kijelentem, hogy ezt a szakdolgozatot meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, csak a megadott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Hozzájárulok, hogy a jelen munkám alapadatait (szerző(k), cím, angol és magyar nyelvű tartalmi kivonat, készítés éve, konzulens(ek) neve) a BME VIK nyilvánosan hozzáférhető elektronikus formában, a munka teljes szövegét pedig az egyetem belső hálózatán keresztül (vagy hitelesített felhasználók számára) közzétegye. Kijelentem, hogy a benyújtott munka és annak elektronikus verziója megegyezik. Dékáni engedéllyel titkosított diplomatervek esetén a dolgozat szövege csak 3 év eltelte után válik hozzáférhetővé.

Kelt: Budapest, 2021. 12. 10.

.....
Bárány Mihály Tamás

ÖSSZEFOGLALÓ

Munkám során a gordonka egyes részeinek szerkezeti rezgéseit, illetve akusztikai viselkedését vizsgáltam kísérleti illetve szimulációs módszerekkel.

Vizsgálataim egyik tárgya a hangszer rezonánslapja volt, melyen modális analízist végeztem, azaz a sajátfrekvenciák, az adott frekvencián kialakuló szabadrezgések, illetve ezek csillapítási tényezőinek megtalálására törekedtem. Ehhez a kísérleti móduselemzés (EMA) módszerét hívtam segítségül. Ennek során a hangszer fedlapjának különböző pontjait impulzuskalapács segítségével gerjesztettem, az ennek hatására kialakuló rezgést pedig a rezonánslapra helyezett gyorsulásmérő segítségével mértem. Ezután számítás segítségével a kívánt mennyiségeket meg tudtam határozni. Nehézséget jelentett, hogy a fedlaphoz egyéb rezgő részek is csatlakoznak (oldallapok, lélekfa, híd, stb.), így ezek hatását ki kellett küszöbölni, illetve figyelembe kellett venni. Az így kapott eredményeket számítógépes szimulációval ellenőriztem. Ehhez végeelem-módszert (FEM) alkalmaztam, melynek során egy, már meglévő cselló-fedlap végeelem-modelljét vizsgáltam különböző fedlapvastagságok esetén homogén anyagparaméterekkel. A kísérleti móduselemzés során a valósághoz közelebb álló eredményeket kaptam, mint a végeelem-analízis során, ugyanis az EMA módusainak frekvenciái közelebb esnek azokhoz a frekvenciákhoz, ahol a hangszert a zeneművekben általában megszólaltatják. A FEM esetén azonban még a legvékonyabb fedlapvastagság esetén is 231 Hz-en van a legalacsonyabb sajátfrekvencia. Ennek oka a peremfeltételek milyenségében, a lélekfa, a híd ill. egyéb kapcsolódó alkatrészek figyelembevételében (melyek hatását én nem vettem figyelembe) keresendő, illetve ok lehet az is, hogy egy valódi hangszer fedlapjának anyagparaméterei nem teljesen homogének.

Azért célravezető vizsgálatunk tárgyát mind kísérleti, mind pedig szimulációs úton elemezni, mert így az eredmények helyessége a másik módszer kapott értékeinek segítségével igazolható, illetve amennyiben rosszul dolgozunk az egyik módszer esetén, a másikkal összehasonlítva a hibák kijavítására is lehetőség adódik.

Ezután a hangszer légüregének (azaz belső, falemezekkel határolt részének) vizsgálatát végeztem el. Ebben az esetben is a sajátfrekvenciák, és az ezen frekvenciákon kialakuló „lengésképek” meghatározása volt a cél. Itt a vizsgálatot két részre bontottam. Először egy egyszerűsített végeelem-modellt készítettem, ahol az f-nyílások hatását nem vettem figyelembe, és így számoltam ki a FEM segítségével a légüreg módusait. Azonban ez a módszer nem pontos, ugyanis a hangszer az f-nyílásokon keresztül a külső végtelen térbe is lesugároz, ennek figyelembevételéhez a peremelem-módszert (BEM) hívtam segítségül. A BEM alapja, hogy amennyiben az adott mennyiségek ismertek valamilyen felületen, akkor ennek alapján a tér bármely pontján meg tudjuk adni értéküket. A FEM és a BEM egymáshoz való csatolásával a nyomásviszonyokat a légüregben belülről, illetve azon kívülre is meg tudtam adni. Ebben az esetben modális megoldásra nincsen lehetőség, így az eredményeket minden egyes frekvenciára külön-külön ki kellett számolni (azaz a módusok frekvenciatartománybeli helyét indirekt módon kellett meghatároznom). Ezt én a 20 Hz és 800 Hz közti tartományban tettem meg. A csatolt módszer segítségével a valósághoz közelebbi eredményeket tudtam kapni, ugyanis a frekvenciák abba a tartományba esnek, ahová a hangszer húrjai is hangolva vannak, így ahol a zeneművekben is leggyakrabban is megszólaltatják őket.

ABSTRACT

During my work I examined the structural vibration and acoustical behaviour of the cello with experimental and simulational methods.

One of the subjects of my examinations was the resonant plate of the instrument, which I analysed through modal analysis. This means that my purpose was to find the eigenfrequencies, and the shapes of the free motions that can remain on the specific frequencies, and the damping factors of the vibrations. To carry out the experiment, I used the method of experimental modal analysis (EMA). According to the method, I hit the cello plate on several points with an impact hammer and measured the vibration of the plate with an accelerometer. After the measurements were taken I could quantify the above mentioned parameters of the vibration. It must be mentioned, that the other vibrating parts attached to the plate (bouts, soul, bridge, etc.) present a difficulty, therefore I had to take into consideration the effects of these. The results from the experiment could be verified by simulation. In order to carry out the verification, I used the finite element method (FEM); during the FEM I examined a cello plate FEM-model given various thicknesses and homogenous material parameters. With the method of EMA I got results that are closer to the real-life experience, than the FEM results, because the EMA modal frequencies are closer to the range, in which cello is played in average musical practice. However, in case of FEM the lowest modal frequency of the thinnest plate was 231 Hz. The reasons are diverse and depend upon the boundary conditions, on whether we take into consideration the effects of the soul, bridge and other attached parts (which I did not). In addition, the divergence can be accounted for by the fact, that the material parameters of a real cello plate are not completely homogeneous.

It is proper to analyse the subject of our examination both experimentally and computationally, because the correctness of the results can be verified by the respective values of the other method. Moreover, if during the process mistakes were made, these mistakes can be corrected with the help of comparison.

The next step was the examination of the air cavity (the inner space, bounded by the wooden plates). In this case, too, my purpose was, to find the eigenfrequencies, and the modeshapes of the vibrations. This examination breaks down into two major parts. First, I created a simplified finite-element model, where I did not take into consideration the effects of the open f-holes, and I calculated the modes with the finite element method. Nevertheless, since the cavity reflects air pressure into the outer infinite space, this method is not accurate enough. In order to include the effects of the f-holes, I used the boundary element method (BEM). The basic idea of the BEM is that if the values are known on a surface, then they can be defined for any point of the space. With coupling the FEM and BEM, I could calculate the values of the air pressure inside the air cavity and in the outer space as well. In this case, a modal solution could not be applied, thus solutions had to be calculated from frequency to frequency (thus the modes can be defined indirectly). During my examination I defined the modes in the frequency-range 20 Hz-800Hz. With the coupled method the results were closer to the real-life experience, because the frequencies fall into the range in which, the instrument is played in the musical practice as well.

1. FEJEZET

BEVEZETÉS

A zene, illetve azon belül is a cselló hangja már nagyon régóta része az életemnek. Sokáig tanultam csellózni, többek közt szimfonikus zenekarban is játszottam. Így, amikor Önálló laboratórium témát, illetve később Szakdolgozat témát kellett keresni, nagy örömmel esett a választásom a hangszerem mérnöki szemléletű, rezgésakusztikai elemzésére.

A cselló, vagy magyar nevén gordonka nagyon bonyolult mechanikai struktúra, sok csatolt rezgő részből áll (pl. rezonánslap, hátlap, lélekfa, híd, húrok, stb., lásd a 2. fejezetben), melyek a végső, lesugárzott, megszólaló hangot együttesen alakítják ki; azonban a hangszer egészének vizsgálatára nem volt lehetőség. Így először ki kellett választani, hogy melyek azok a részek, melyeket tüzetesebben vizsgálni szeretnék, ideértve egy konkrét hangszer kísérleti úton történő vizsgálatát, illetve a számítógépes szimulációt is.

A csellóra jellemző hang kialakításában nagy szerepe van a fedlapnak, ugyanis a hang nagy részét ez az elem sugározza le a külvilág felé, ezért ez lett az egyik építőelem, melyet a vizsgálatok tárgyául választottam. A másik vizsgálandó rész a hangszer légüreg, azaz a falemezekkel határolt belső tér rész volt.

Mivel az egyik elem egy fából készült lemez, míg a másik egy adott geometriájú levegővel töltött tér, így a vizsgálatok módszerei is nagyban eltérnek egymástól. Azonban a vizsgálatok során azonos volt, hogy mindkét közeget rezgő struktúraként szemléltem, és frekvenciatartománybeli vizsgálatot végeztem, azaz arra voltam kíváncsi, hogy a hangszer adott részei által reprezentált mechanikai, illetve akusztikai rendszereknek mely frekvenciákon hatékony az átvitele, hol találhatóak az úgynevezett sajátfrekvenciái, illetve ezeken a frekvenciákon a közegek rezgése hogyan jellemezhető.

Ezen frekvenciák megtalálására, és így a hangszer adott elemének működésének vizsgálatára mindkét esetben más-más eszközök álltak rendelkezésemre. A fedlap egy mechanikai rezgő rendszer, melynek gyakorlati vizsgálatára a kísérleti móduselemzés eszközével nyílt lehetőség. Ezen módszer segítségével nem csak a fent említett jellemző frekvenciákat tudtam megtalálni, hanem minden egyes frekvenciához a rezonánslap rezgését jellemző további paramétereket (pl. csillapítási tényező) is rendelni tudtam.

Ezután a rezonáns működését számítógépes úton is szimuláltam a végeselem-módszer segítségével, melynek során egy közelítő modellt hoztam létre, melyet a valódi cselló anyagához hasonló paraméterekkel ruháztam föl, megadtam a peremfeltételeket (azaz meghatároztam, hogy a fedlapnak melyek azok a részei, melyek az oldallaphoz való csatolás miatt nem mozognak), és a modális megoldás segítségével kiszámítottam a módusokat. A két módszerrel kapott eredményeket egymással össze tudtam hasonlítani. A rezonánslap vizsgálata esetén gyakorlati, illetve számítógépes vizsgálatokat is végeztem, így ezek eredményei egymással összehasonlíthatóak voltak, könnyen tudtuk ellenőrizni, hogy a kapott eredmények megfeleltek-e a vártaknak; az egyik módszer eredményeinek segítségével igazolni tudtuk a másik módszer eredményeinek helyességét, vagy adott esetben pontatlanságát.

A légüreg vizsgálatához csak számítógépes szimulációkra hagyatkoztam. Itt is végeelem-modellt készítettem, hogy a működést jellemző frekvenciákat megtaláljam, majd az eredmények pontosításának érdekében a végeelem-módszerhez az ún. peremelem-módszert csatoltam, így egy adott gerjesztés esetére kiszámíthattam, hogy a légüreg az f-nyílásokon keresztül a végtelen térbe hogyan sugározza le a légnyomást. Mivel itt kísérleti eredményeim nem voltak, ezért az értékek ellenőrzéséhez az szakirodalomban föllelhető értékeket vettem alapul.

Szakedolgozatom három részre osztható. Az első részben a csellót mint hangszeret ismertetem, röviden írok annak kifejlődéséről illetve előzményeiről, majd bemutatom a további vizsgálatok szempontjából releváns részeit, illetve a cselló megépítésének folyamatáról is írok, ideértve az építés során használt anyagok (különböző típusú fák, ragasztók) rövid jellemzését is. Ezután az első részben még sort keríték a hangszer megszólaltatásának jelenségszintű vizsgálatára is.

Az ezt követő két részben kerül sor vizsgálataim leírására, illetve a vizsgálati eredmények ismertetésére.

2. FEJEZET

A HANGSZER ÁLTALÁNOS ISMERTETÉSE

Feladatunk a továbbiakban a cselló fedlapjának (vagy más néven rezonánsnak) és légüregének fizikai, rezgésakusztikai működésének vizsgálata, előtte azonban üdvösnek tűnik a hangszer általános ismertetése is, ide értve a történeti áttekintést, felépítést, és a megszólaltatás rövid fenomenológiai leírását is. A következő fejezet megírásában a [8] forrás volt segítségemre.

A vonós (vagy tudományosan chordophon) hangszerek, és köztük a cselló előzményei nagyon régre, az ókorba nyúlnak vissza. Hárfákat már a sumérok is készítették és használtak Kr. e. 3500 körül; ezen hangszerekhez hangszertest még nem tartozott. Hozzájuk nagyon hasonló, még mindig kisebb hangszertesttel rendelkező instrumentumok voltak a hellének (ókori görögök) lírái. Ezekhez kezdték el először használni a vonókat, melyek valószínűleg az arab világból érkeztek Európába. A vonó használatához a lírák húrlábát (húrláb, híd, vagy más néven láb: lásd **4. ábra: A**) ívelté kellett tenni, így megjelentek a húrsíkok (azaz a húrok nem egyetlen síkban helyezkednek el, mint például a gitárnál, így válik lehetőség a vonóval egyszerre csak egyetlen húrt megszólaltatni).

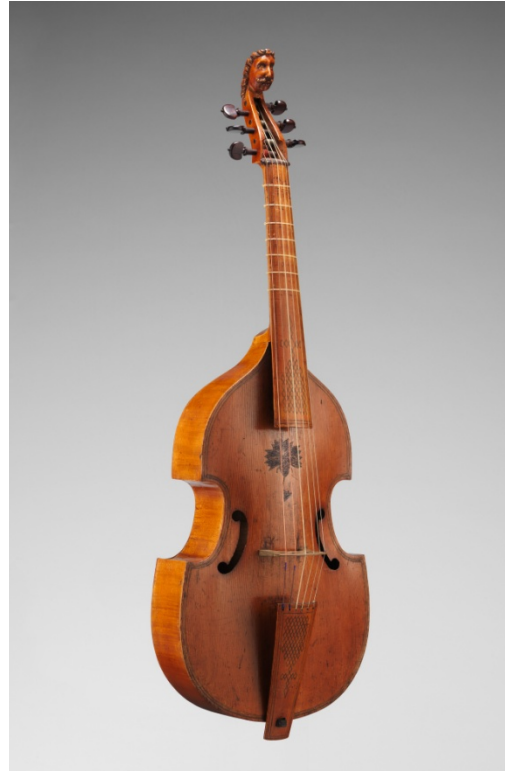
Ezen kívül megjelent a fogólap is, mely a hangszer hangterjedelmét bővítette. A korai időszakokban (középkor, újkor kezdete) a maihoz hasonló vonós hangszerek két, egymástól független ágon fejlődtek; ez a két nem a „viola da gamba” és a „viola da braccio”. A „viola” szó a hangszer családot jelöli, úgy mondhatnánk, hogy a hegedű félék családja. A „gamba” kifejezés a térd-re utal, mert ezeken a hangszereken a művészek úgy játszottak, hogy a térdük közé fogták őket, míg a „braccio” arra utal, hogy a kezükben tartva játszottak rajtuk.

Mindkét típus a mai vonós hangszerekre emlékeztet, azonban sok különbséget fedezhetünk fel köztük. A gamba-félék hátlemeze csapott, a braccio-féléké ezzel szemben domború. Még egy jelentős felépítés béli különbséget említenék meg, mely az **1.**, ill. **2.** ábrákat összevetve azonnal szembeötlik. A hangszertest oldala (kávarendszer) felső fele a gambák esetében vízcepp alakban hajlik a nyak irányába, míg a braccio-k esetében félköríves formában kerül kiképzésre. Az igazán érdekes azonban az, hogy bár a gambán kellett hasonlóan játszani, mint egy mai csellón, a gordonka mégis (akárcsak a hegedű) a viola da braccio-k családjából fejlődött ki az 1500-as évek végén.

A korban még nem volt letisztult hangszerkészítési gyakorlat, így ezen hangszerfélék is több méretben, és sokszor különböző húrbeosztással (akár 6-7 húrral) készültek (lásd **1. ábra, 2. ábra**).



1. ábra: A cselló előzménye - viola da braccio, forrás: [1]



2. ábra: A cselló előzménye - viola da gamba, forrás: [2]

Térjünk most át a modern cselló felépítésének ismertetésére.

A cselló húrbeosztása $C_2 - G_2 - D_3 - A_3$ (ezek a betűk ún. ABC-s nevek, melyek a teljes hosszában rezgő húr rezgésének hangmagasságát jelölik a zenében), melyek frekvenciái rendre: 65 Hz – 98 Hz – 147 Hz – 220 Hz, megnevezéseik megegyezés szerint: 4. húr – 3. húr – 2. húr – 1. húr.

A következőkben tömören ismertetem a hangszer megépítésének folyamatát.

A hangszerkészítés céljából kivágott évszázados faanyagot először szárítják. A test elkészítéséhez két fajta fát használnak: fenyőt, illetve juhart (egyéb részek más, egzotikus fajtákból készülnek, lásd később). A fenyő 4-5, míg a juhar 7-8 évig szárad. A száradás alatt a sejtüregek kiürülnek, és lezáródnak, így ezek vizet többé nem képesek fölvenni.

A rezonáns vagy más néven tető, illetve a hátlap is más-más elvárásoknak kell, hogy megfeleljenek. A tető esetében nagyon fontosak az akusztikai képességek, hiszen a hangszer ezen része sugározza le a külvilágba a rezgéseket. Épp ezért a tető anyaga lucfenyő, mely rugalmas, szálszerkezete heterogén. A tető belső részére egy szintén lucból készült ún. gerendát erősítenek. A hátlap ugyanakkor azért felel, hogy a kialakuló rezgéseket visszaverje, így másfajta fából készítik; ennek anyaga általában juhar, avagy jávor. Ezen fafélék keményebbek, vastagabbak, homogénebb szálszerkezet jellemzi őket (lásd később). A tető hosszabbik tengelye az úgynevezett fug-vonal, ugyanis a felső lemezt két különálló hasázból illesztik össze, mely összeillesztési folyamat neve fugolás.

A tető és a hátlap közt helyezkedik el a szintén fenyőből készülő lélekfa, melynek feladata, hogy a tető rezgéseit a hátlap felé közvetítse. Henger formájú, és tökéletesen fölfekszik az öt közrefogó két lapra, így teremt „rezgési hidat” azok közt.

A tető illetve hátlap széleivel párhuzamosan berakást készítenek. Ennek egyrészt díszítő, másrészt statikai jelentősége van, ugyanis növeli a lemezek szilárdságát. Először kivésik a berakás árkot, melynek mélységét gondosan ellenőrzik (nagy mélység a szél törését okozhatja, kis mélységű árok pedig nem tartja meg a berakást). Az árokba három szálréteg kerül, melyeknek arányára is figyelnek: vékony ében furnér réteg közt vastagabb juhar réteg helyezkedik el. A szálakat először teljes felületükkel összeenyvezik, majd behelyezés után ledolgozzák.

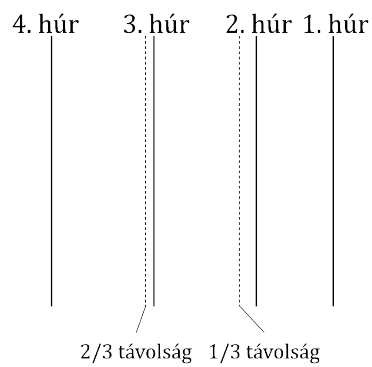
A tető az f-nyílást, illetve a gerendát a méretre vésés után kapja meg. A gerenda szerepe kettős. A mély húrok alatt, azokkal párhuzamosan fut végig a tetőn, így a mély húrok rezgését erősíti fel; másik szerepe pedig statikai. Mivel a fenyő szálszerkezete heterogén, ezért a törésre is hajlamosabb, így a gerenda statikai, megerősítő célokat is szolgál.

Ezután történik a kávalemezek, azaz az oldallemezek (lásd 4. ábra) megépítése. A külső káva a háthoz hasonlóan jávorból készül. A lemezek egymáshoz való illeszkedését a tőkék biztosítják (4 saroktőke, 1 alsó- és 1 felsőtőke). A kávalemezeket ráhajlítják, majd ragasztják a tőkékre. A hajlításhoz először beáztatják a fát, majd hő segítségével idomítják azt. Mint korábban írtam a sejtüregek már nem tudnak megtelni vízzel, ezen áztatás során a víz a sejtek közti területeket tölti ki, így segítve a hajlítást. A ragasztás enyvvel, természetes kötőanyaggal történik, mely állatok bőréből, csontjából, esetleg véréből készül. Szintetikus ragasztót kizárólag nagyüzemi hangszergyártás során alkalmaznak, mert rugalmatlan kötést eredményez, mely nem bontható. Általánosságban is, a cselló részeinek összeillesztéséhez enyvet használnak.

Ezután kerülhet sor a nyak, csiga, kulcsszekrény, fogólap, majd a felsőnyereg fölhelyezésére. A kulcsszekrényben foglalnak helyet a kulcsok, melyek a húrok hangolására adnak lehetőséget (minden kulcshoz egy-egy húr kapcsolódik, így ezekből 4 van). A fogólappal párhuzamosan, afelett futnak a húrok, melyeket a játékos az ujjaival a fogólapra „ráfogva” tudja azok rezgő hosszát, ezáltal hangmagasságát változtatni.

A hangszer nyakán ülő ún. felsőnyereg ad alátámasztást a húroknak, illetve ez határozza meg, hogy a húrok milyen távol esnek egymástól. Ez azért fontos, mert a hangszerészek a távolságbeosztás során egy ún. „in-egal” logikát alkalmaznak. Ez azon alapul, hogy a vékonyabb húrok (1., ill. 2. húr) kerüljenek közelebb egymáshoz, mint a vastagabb, mélyebb hangúak. Ez azért fontos, mert a zenész ujjai a magasabb húrok felől nyúlnak a mélyebbek irányába, szükségképpen laposabban, nagyobb ujjfelülettel tudja csak lefogni azokat, mely esetben zavaró lehet egy szomszédos húr közelsége. Az 1. és 4., azaz A_3 és C_2 húrok egymástól való távolsága adott, szabványos. Azonban a 2. húr nem a szélső húrok távolságának egyharmadára, hanem annál az első húrhoz valamivel közelebb esik. A harmadik húr pedig a második és negyedik húr távolságának felére esik (lásd 3. ábra.). Érdekesség azonban, hogy a hídnál már azonos távolságban helyezkednek el a húrok.

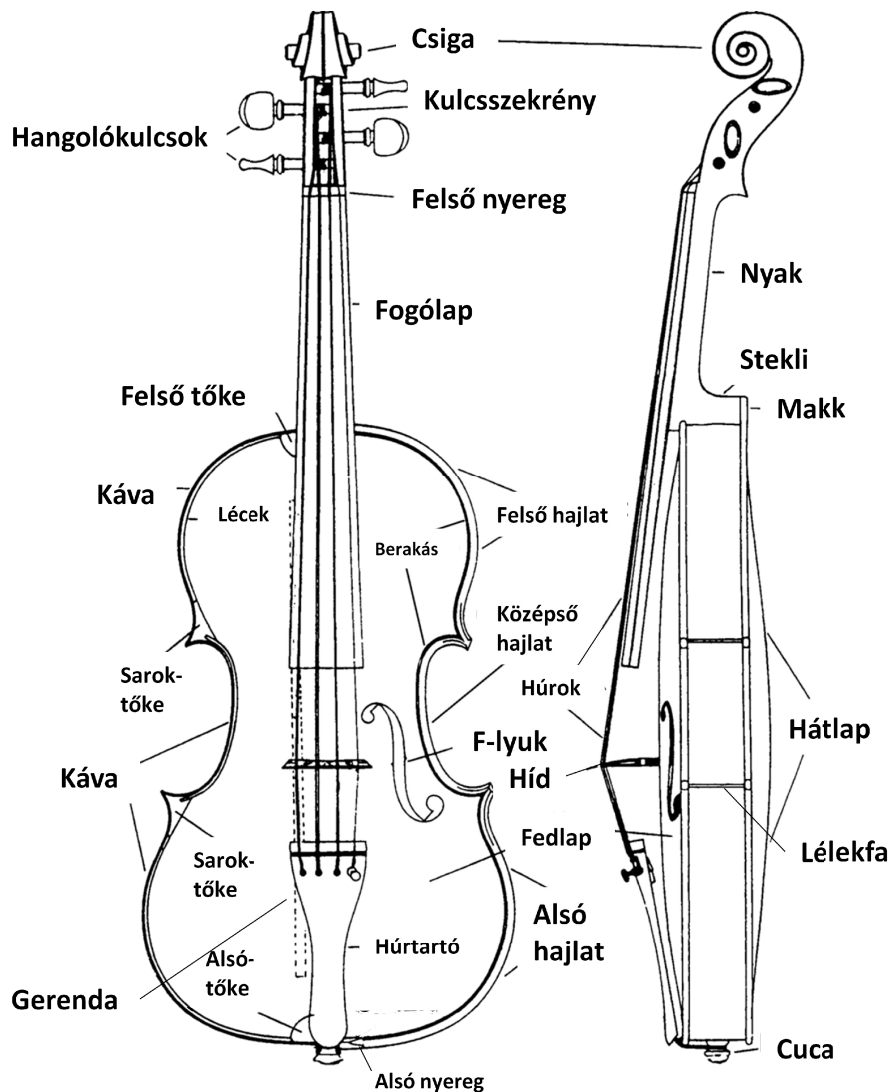
Elkészült a test, kiegészítve a nyakkal. Ezután a hangszert pácolják, ill. lakkozzák, majd fölhelyezik a külső alkatrészeket (húrláb, híd, húrok, láb).



3. ábra: "in-egal" távolságbeosztás

Fontos fogalom még a **menzúra** a húr rezgő hossza, azaz a hídtól a felsőnyeregig tartó húrrész. Ennek a hangszeresthez viszonyított aránya a cselló esetében 10:7 (míg például a hegedű esetében 3:2), konkrét hossza 69 cm körül van.

Mivel a vonó a továbbiakban sem tárgya a vizsgálatainknak, ezért annak felépítését nem ismertetem.



4. ábra: A vonósfélénk, forrás: [3]

A cselló megszólaltatása során a játékos először ujjal pengetve, vagy vonóval húzva rezgésbe hoz egy, esetleg több húrt. Ezen húrok rezgését veszi át a híd, mely a rezgést átadja a tetőnek (rezonánsnak/fedlapnak), innen sugárzódik le a hang jelentős része a külvilág felé. A tető a háttal a hangszer belsejében elhelyezkedő lélekfán, illetve a káván keresztül van kapcsolatban. A hangszer belsejében, a légüregben a rezonáns rezgésének hatására kialakulnak a hanghullámok, melyek a külvilág felé a hanglyukon keresztül távoznak, azonban az így lesugárzott hangnyomás nem jelentős a közvetlenül a fedlapról lesugárzottéhoz képest.

A hangszer megszólaltatása során érdekes jelenség a néha föllépő, úgynevezett **buller**. Ennek során a hangszer hangja bizonyos hangmagasságon (jellemzően G vagy C húron lefogott 174, 61 Hz frekvenciájú „kis F”) irányíthatatlanná válik. Valószínűsíthető oka, hogy a hangszertest valamely alkotójának (feltehetően a kávalemeznek) sajátfrekvenciája a játék során használatos tartományon belülre esik, így rezonancia jelensége lép föl.

Ez nehezíti a szépen megformált zenei hangképzést ezen a hangmagasságon. Más vonós hangszereken a jelenség nem tapasztalható. A hangszerészek szerint a jelentősen

nagyobb testű bógőkön például a kávalemezek nagyobb vastagsága miatt fordul elő jóval ritkábban. A cselló méretezése (alkotóinak szélessége, vastagsága) rejti magában ezt a "hibalehetőséget". Ennek intenzitása a faanyag eseti tulajdonságaitól is jelentősen függ. Hatását felszerelhető, úgynevezett "büllerfogókkal" csökkenteni bár módunkban áll, teljesen megszüntetni nem tudjuk.

3. FEJEZET

KÍSÉRLETI MÓDUSELEMZÉS

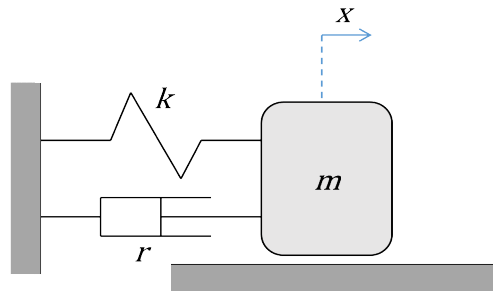
3.1. ELMÉLETI BEVEZETÉS

Egy mechanikai rezgő rendszer jellemzéséhez először tekintsük át az alapokat; ehhez a [1], [2], [3] forrásokat használtam föl. Egy koncentrált paraméteres (tömegeből, rugóból, és mechanikai csillapítóból, vagy ellenállásból álló), 1 szabadságfokú (1DoF) mechanikai rezgő rendszer (lásd 5. ábra) mozgásegyenlete az alábbi:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t), \quad (1)$$

ahol $F(t)$ a tömegre ható úgynevezett „gerjesztő erő”, m [kg] a tömeg, k [N/m] a rugóállandó, r [Ns/m] pedig a mechanikai csillapítás. Legyen a továbbiakban a gerjesztés minden $t > 0$ időpillanatra zérus.

A rendszer szabadsági fokszáma 1, hiszen a mozgásegyenlet 1 darab lineárisan független egyenlettel megadható; általánosságban is: a mechanikai rendszer **szabadsági fokszáma** n , ha a mozgásegyenlet n darab, egymástól lineárisan független egyenlettel megadható.



5. ábra: 1 szabadságfokú koncentrált paraméteres mechanikai rendszer sematikus ábrája

Legyen $\frac{r}{m} = 2\xi\omega_0$, ahol ξ a relatív csillapítási tényező, ω_0 pedig a csillapítatlan sajátkőrfrekvencia, mely $\sqrt{\frac{k}{m}}$ -ként adódik; ekkor:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0. \quad (2)$$

A differenciálegyenlet lineáris (és homogén), így megoldása

$$x(t) = Ae^{\lambda t} \quad (3)$$

alakban kereshető. Az egyenlet karakterisztikus polinomja:

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (4)$$

Ennek gyökei (azaz sajátértékei):

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (5)$$

A diszkrimináns $\sqrt{\xi^2 - 1}$ értékétől függően a gyökök értéke is változhat. A továbbiak szempontjából az az eset a legfontosabb, amikor a diszkrimináns értéke negatív, azaz a sajátérték – pár komplex konjugált, ekkor a sajátértékek:

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} = -\delta \pm j\gamma, \quad (6)$$

ahol γ a csillapított sajátkörfrekvencia. Ekkor a megoldás:

$$\begin{aligned} x(t) &= M_1 e^{\lambda_1 t} + M_2 e^{\lambda_2 t} = (a + jb)e^{(-\delta + j\gamma)t} + (a - jb)e^{(-\delta - j\gamma)t} = \dots \\ &= e^{-\delta t} (2a \cos \gamma t - 2b \sin \gamma t) \quad / M_1 = M_2^* /, \end{aligned} \quad (7)$$

ahol M_1 és M_2 a kezdeti feltételekből meghatározható konstansok. Jól látható, hogy jelen esetben egy periodikus (szinuszos) válasszal állunk szemben, mely a mechanikai csillapító elem (és a rendszer magára hagyott volta – szabad rezgés) miatt lecsengő, burkolója pedig exponenciális jellegű a δ csillapítási tényezőnek megfelelően (azaz csillapított rezgés).

Vezessünk be most két további mennyiséget, melyek a rezgés jellemzését könnyítik. Legyen:

$$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\xi\omega_0} \quad (8)$$

az **időállandó**, a másik mennyiség pedig az ún. **jósági tényező**. Amennyiben a csillapítás zérus, úgy a sajátfrekvencián az átvitel végtelen (ez a tiszta **rezonancia** jelensége), azonban amennyiben csillapítás is jelen van, akkor az erő-elmozdulás átvitel amplitúdójában véges kiemelést láthatunk. Ezt jellemzi a jósági tényező. A jósági tényezőt vezessük be úgy, mint a rendszer rezonanciafrekvencián mért átvitelének, és a statikus (azaz $\omega = 0$ frekvencián mért) átvitelének arányát:

$$Q = \frac{|X(\omega_0)|}{|X(0)|} = \frac{k}{r\omega_0} = \frac{1}{2\xi} \quad (9)$$

Amennyiben a fenti mechanikai rendszerre állandó, periodikus gerjesztőerő hat ($F(t) \neq 0; t > 0$), akkor a rendszer tranziens szakasz után **kényszerrezgést** végez a gerjesztőerőnek megfelelő frekvenciával.

A **módus** fogalmának bevezetéséhez nézzünk most egy $n = D$ szabadságfokú mechanikai rendszert, ekkor a rendszeregyenlet mátrixos írásmóddal:

$$M\ddot{x} + R\dot{x} + Kx = F(t), \quad (10)$$

ahol \mathbf{M} a tömegmátrix, \mathbf{R} a csillapításmátrix és \mathbf{K} a merevségmátrix. Legyen a gerjesztés megint csak $t > 0$ –ra 0, a csillapítást jellemző \mathbf{R} mátrix szintén 0. Ekkor az alábbi egyenlet adódik:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (11)$$

A megoldást most az alábbi alakban keressük:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}e^{j\omega t}. \quad (12)$$

Ennek második deriváltja:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 \mathbf{a}e^{j\omega t}. \quad (13)$$

Ezt visszahelyettesítve és rendezve, részletezés nélkül a

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (14)$$

sajátértékprobléma adódik. Az ω^2 gyököket (azaz a sajátértékeket, pontosan D darabot) a

$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0 \quad (15)$$

egyenlet megoldásaként kapjuk. Az n -edik gyököt visszahelyettesítve a

$$(-\omega_n^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

egyenletrendszert kapjuk, melyből az n -edik sajátvektor már meghatározható. Az egyenletrendszer megoldásának fizikai értelme, hogy az n -edik sajátérték gyöke (azaz ω_n) a mechanikai rendszer n -edik sajátfrekvenciája, mely frekvenciával a rendszer szabadrezgést végez, a hozzá tartozó sajátvektor pedig az adott körfrekvencián végzett mozgás lengésképét meghatározó úgynevezett **módusalak**. Egy módus tehát egy módusalakból (lengésképvektorból), és egy hozzátartozó sajátfrekvenciából áll. Egy D szabadságfokú rendszernek pontosan D darab módusa van.

A rendszer $\omega = 0 \frac{rad}{sec}$ frekvenciás módusa az úgynevezett **merevtestmódus**. A nevéből is következtethetünk rá, hogy ebben az esetben a mechanikai rendszer merev testként mozog. Ezt egydimenzióban úgy képzelhetjük el, hogy amennyiben több tömeg – rugó rendszert egymáshoz csatolunk, akkor minden egyes elem egyszerre mozog ugyanazzal a sebességgel, ugyanabba az irányba. Ebből a szemléltetésből is nyilvánvaló, hogy „befogott végű” mechanikai struktúráknak nincsen merevtestmódusuk. A merevtestmódus másik megfogalmazásban a szabadsági fokok irányában történő elmozdulást jelenti, tehát a „befogás” a szabadsági fokok számát csökkenti.

Egy mechanikai rendszer módusainak ismeretében a rendszer bármely gerjesztésére adott válasza megadható a **modális megoldás** segítségével. Azaz amennyiben ismert a rendszer $f(\omega)$ gerjesztése a frekvenciatartományban és ismertek a rendszer \mathbf{a}_n módusai, akkor a rendszer válasza az alábbi alakban meghatározható:

$$\hat{\mathbf{x}}(\omega) = \sum_{n=1}^D \mathbf{a}_n \hat{\alpha}_n(\omega) = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_D] \begin{Bmatrix} \hat{\alpha}_1(\omega) \\ \hat{\alpha}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_D(\omega) \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\omega), \quad (16)$$

ahol \mathbf{A} a módusalakok oszlopvektoraiból összeállított mátrix, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\omega)$ pedig a módusalakok részesedési tényezőinek, vagy másképp modális koordinátáinak vektora. A „ $\hat{}$ ” jelölés mindenhol a komplex amplitúdóra (fazor) utal.

Tudjuk, hogy az időtartománybeli deriválás a frekvenciatartományban egy $j\omega$ – való szorzásnak felel meg, így a többszabadságfokú rendszer (10) mozgásegyenlete az alábbi alakban írható (rendezés után):

$$(\mathbf{K} + j\omega\mathbf{R} - \omega^2\mathbf{M})\hat{\mathbf{x}}(\omega) = \hat{\mathbf{F}}(\omega). \quad (17)$$

A fenti egyenletbe behelyettesítve:

$$\hat{\mathbf{F}}(\omega) = (\mathbf{K} + j\omega\mathbf{R} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\omega). \quad (18)$$

A módusalakok és a tömegmátrix közt ismertek az alábbi összefüggések:

$$\mathbf{a}_n^T \mathbf{M} \mathbf{a}_m = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = m \\ 0 & \text{ha } n \neq m \end{cases} \quad (19)$$

illetve:

$$\mathbf{a}_n^T \mathbf{K} \mathbf{a}_m = \begin{cases} \omega_n^2 & \text{ha } n = m \\ 0 & \text{ha } n \neq m \end{cases} \quad (20)$$

és:

$$\mathbf{a}_n^T \mathbf{R} \mathbf{a}_m = \begin{cases} 2\xi_n \omega_n & \text{ha } n = m \\ 0 & \text{ha } n \neq m \end{cases} \text{ ahol } \xi_n = \frac{c}{2m\omega_n} \text{ csillapítási tényező.} \quad (21)$$

Fontos megjegyezni, hogy a (21) összefüggés csak arányos csillapítás esetén igaz. Mi folytonos mechanikai rendszert akarunk majd vizsgálni, illetve modellezni, így ez a feltétel akkor teljesül, ha egyszerű viszkoelasztikus csillapítást tételezünk föl.

A fenti egyenletek mindegyikének szemléletes értelme, hogy a módusmátrix transzponáltjával balról szorozva minden esetben diagonálmátrixot kapunk.

Ha most a fenti egyenletet balról szorozzuk az \mathbf{A}^T mátrix-szal, akkor kapjuk az alábbi egyenletrendszert:

$$\mathbf{A}^T \hat{\mathbf{F}}(\omega) = (\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} + j\omega \mathbf{A}^T \mathbf{R} \mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A}) \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\omega). \quad (22)$$

Ennek n-edik egyenletét a fenti összefüggések szerint fölírva

$$\mathbf{a}_n^T \hat{\mathbf{F}}(\omega) = (\omega_n^2 + j\omega 2\xi_n \omega_n - \omega^2) \hat{\alpha}_n. \quad (23)$$

Azaz az n-edik módus részesezési tényezője meghatározható az

$$\hat{\alpha}_n(\omega) = \frac{1}{(\omega_n^2 + j\omega 2\xi_n\omega_n - \omega^2)} \mathbf{a}_n^T \hat{\mathbf{F}}(\omega) \quad (24)$$

összefüggés szerint.

A teljes válasz kifejezése tehát:

$$\hat{\mathbf{x}}(\omega) = \sum_{n=1\dots D} \mathbf{a}_n \hat{\alpha}_n(\omega) = \sum_{n=1\dots D} \frac{1}{(\omega_n^2 + j\omega 2\xi_n\omega_n - \omega^2)} \mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^T \hat{\mathbf{F}}(\omega). \quad (25)$$

3.2. KÍSÉRLETI MÓDUSELEMZÉS

Vizsgálataink során a csellót is a fentiekben ismertetethez hasonló rezgő rendszerként fogjuk értelmezni. A továbbiakban az [1] forrás volt segítségemre.

Első feladatunk tehát a cselló fedlapjának módusainak meghatározása. Egy már megépített hangszernél nyilvánvalóan nehéz a különböző anyagparaméterek meghatározása, és így a differenciálegyenlet-rendszer megoldása, így a módusokat kísérleti úton kell megtalálnunk. A továbbiakban az erre a célra szolgáló kísérleti móduselemzést (EMA)¹ ismertetem.

Fontos, hogy a cselló nem egy koncentrált paraméteres rezgő rendszer (ilyen rendszer a valóságban nem is, vagy csak jó közelítéssel létezik; a koncentrált paraméteres felírás csak egy modell, mely a számításokat megkönnyíti), azaz tömege elosztott, egymáshoz tetszőlegesen közeli tömegpontokban értelmezhető, így szabadsági fokszáma (azaz módusainak száma) végtelen. Az összes módus az EMA módszerrel nem határozható meg; egy adott frekvenciasávban található módusok meghatározására törekszünk.

A módszer során a mérendő rezgő testen (rendszeren) D darab megfigyelési pontot veszünk fel, és míg az egyik megfigyelési pontban a rendszert gerjesztjük, addig a többi pontban mérjük a rendszer választát. A rendszer gerjesztésére kézenfekvőnek tűnik a Dirac-impulzus jellegű gerjesztés, hiszen az a frekvenciatartományban konstans értékű, így a rendszer széles tartományban vizsgálható vele. Amennyiben a q pont-beli gerjesztés $\hat{f}_q(\omega)$ és az s pontban mért válasz $\hat{x}_s(\omega)$, akkor ezek kapcsolata egy $\hat{h}_{sq} = \frac{\hat{x}_s}{\hat{f}_q}$ alakú (komplex értékű) átviteli vektorként adható meg, ahol

$$\hat{h}_{sq}(\omega) = \frac{\hat{x}_s(\omega)}{\hat{f}_q(\omega)} = \sum_{n=1\dots M} \frac{a_{ns}a_{nq}}{\omega_n^2 + j\omega 2\xi_n\omega_n - \omega^2}, \quad s = 1 \dots D \quad (26)$$

a korábban ismertetett (25) egyenlet alapján, ahol a_{ns} az \mathbf{a}_n módusalak értéke az s-edik megfigyelési pontban, míg a_{nq} az \mathbf{a}_n módusalak értéke a q-adik megfigyelési pontban (azaz az aktuális gerjesztés helyén). Tehát amennyiben ismerjük a gerjesztést és mérjük a

¹ angolul: EMA – experimental modal analysis

választ, akkor ebből az átviteli függvény a két pont közt meghatározható. A függvény amplitúdómenetének csúcsainál található a rendszer sajátfrekvenciái (ω_n), a csúcsok szélességéből pedig a csillapítási tényezőre (ξ_n) következtethetünk. Ezután lehet meghatározni mind az M darab módus lengésképvektorának mind a D darab megfigyelési pontbeli értékét (összesen $M \times D$ darab ismeretlen).

A fenti (26) átviteli függvény értéke egy adott módushoz tartozó sajátfrekvencián:

$$\hat{h}_{sq}(\omega_m) = \frac{\hat{x}_s(\omega_m)}{\hat{f}_q(\omega_m)} = \sum_{n=1 \dots M} \frac{a_{ns} a_{nq}}{\omega_n^2 + j\omega_m 2 \xi_n \omega_n - \omega_m^2}, \quad s = 1 \dots D, m = 1 \dots M. \quad (27)$$

Ha ezt az egyenletet minden sajátfrekvenciára és minden megfigyelési pontra fölírjuk, akkor az így adódó egyenletrendszerből a lengésképvektorok értékei meghatározhatóak.

3.2.1.A MÉRÉS GYAKORLATI MEGVALÓSÍTÁSA

A mérés során a gerjesztés erő dimenziójú mennyiség (a gerjesztő impulzuskalapács által kifejtett erő), a válasz pedig a megfigyelési pont elmozdulásának gyorsasága ezen erő hatására (azaz a megfigyelési pontban gyorsulásmérőt helyeztünk el). Mind a válasz, mind pedig a gerjesztés jelét időtartományban mérjük, majd ezeket Fourier – transzformálva, és a hányadosukat képezve kapjuk meg az e két pont közti átviteli függvényt¹. Ezen függvényt inverz Fourier-transzformálva az impulzusválaszt kapjuk meg.

A mérés során különböző megfontolásokkal élve egyszerűsíthetjük dolgunkat. Az elv alapján, amikor egy adott megfigyelési pontban gerjesztjük a rendszert, akkor az erre adott választ az összes többi megfigyelési pontban mérni kellene. Ez nyilván nehézkes, hiszen nagy felületek esetén akár több száz mérési pontot is ki kell jelölni, ennyi mérőműszer pedig egyszerre nem valószínű, hogy rendelkezésre áll, illetve a több műszer együttes fölhelyezése leterhelné a vizsgált rezonánslapot, megmásítaná az eredményeket. Ekkor van segítségünkre az ilyen jellegű méréseknél érvényesíthető **reciprocitási elv**, azaz a gerjesztés- és a válaszoldal felcserélhetőségének elve. Formálisan:

$$\hat{h}_{sq}(\omega_m) = \frac{\hat{x}_s(\omega_m)}{\hat{f}_q(\omega_m)} = \frac{\hat{x}_q(\omega_m)}{\hat{f}_s(\omega_m)}. \quad (28)$$

Ez viszont azt jelenti, hogy elégséges egyetlen megfigyelési pontot kijelölni, oda helyezni a mérőműszert, és a rendszert pedig az összes többi megfigyelési pontban (vagy most már inkább csak gerjesztési pontban) gerjeszteni egymás után.

Mivel a mérés nem lehet teljesen zajmentes, ezért minden egyes ponton több (szám szerint 4 – lásd **1.** táblázat) mérést is végeztünk, és ezen mérésekből kapott minták Fourier-transzformáltjainak átlagából számítottuk az adott pontra érvényes átviteli függvényt.

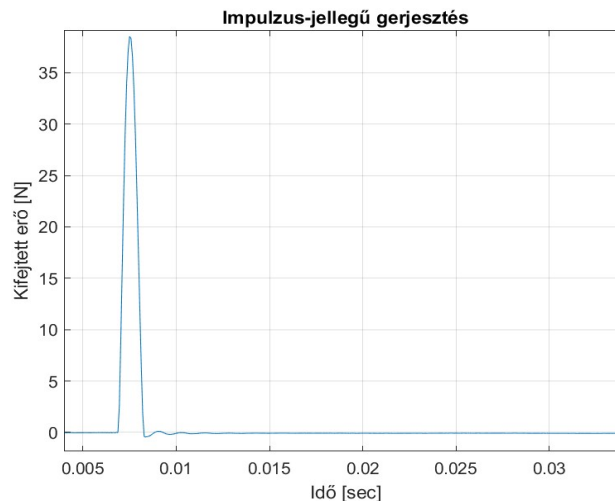
A gerjesztő eszközünk impulzuskalapács volt, mellyel előállítható egy elégségesen, azonban nem tetszőlegesen kicsi időablakban helyet foglaló gerjesztés (a Dirac-delta csak egy elméletben létező funkcionál, nyilvánvaló, hogy végtelenül rövid ideig tartó gerjesztést nem tudunk előállítani), így kérdés, hogy mi alapján válasszuk meg a gerjesztés jelalakját. Tudjuk,

¹ angolul: FRF - frequency response function

hogy amennyiben egy jel időkorlátos, úgy nem lehet sávkorlátos, és fordítva, így amennyiben egy jelnek időbeli kiterjedése van, úgy biztosan nem gerjeszthető vele a rendszer a teljes frekvenciatartományban, viszont ebben az esetben erre nincs is szükség, hiszen a vizsgálandó rendszer (cselló) egy hangszer, így csak a hallható hang tartományában (20 Hz – 20 kHz) vagyunk kíváncsiak a viselkedésére. Viszont a cselló működési tartománya még ennél is keskenyebb. A legalacsonyabb megszólaltatható hang 60 Hz-en a C_2^1 , míg a legmagasabb zenei hang ahol a zeneművekben általában még használják a C_5^2 , melynek frekvenciája 882 Hz, így a gerjesztés sávzélessége nem kell, hogy nagyobb legyen ennél a frekvenciánál.

Hasonló elvek mentén gondoltuk végig a mintavételi frekvencia értékét is. A hangszer működése akkor vizsgálható megfelelően, ha a mintavételi frekvencia legalább a kétszerese a legmagasabb, még vizsgálni kívánt frekvenciának. A mintavételi frekvenciát ezen megfontolások alapján 12.8 kHz –nek választottuk, így a legmagasabb, még megszólaltatható hang felhangtartománya (felharmonikus – tartománya) is kényelmesen vizsgálható lesz.

Az alábbiakban (6. ábra) bemutatom az egyik gerjesztési pontban az impulzuskalapács gerjesztésének jelalakját az időtartományban:

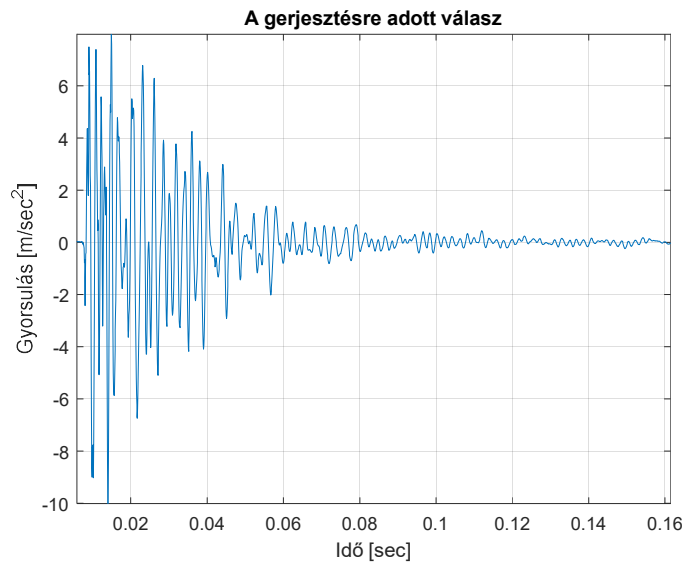


6. ábra: Egy gerjesztés időtartománybeli jelalakja

Illetve a fenti gerjesztésre adott – egyik – válasz szintén az időtartományban (azaz a gyorsulásmérő által mért jelalak):

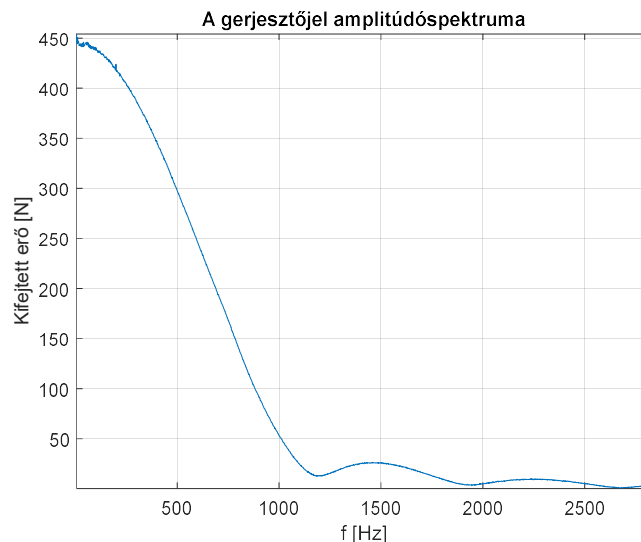
¹ ejtsd: 'kis c'

² ejtsd: 'kétvonalas c'



7. ábra: A fenti gerjesztésre adott válasz

Látható hogy a gerjesztés háromszög-impulzus jellegű, kb. 2 msec hosszú. Ennek amplitúdó – spektruma:



8. ábra: A fenti gerjesztés amplitúdóspektruma

Látható, hogy a gerjesztőjel a frekvenciatartományban közel sem konstans, azonban abban a tartományban, ahová gyakorlati megfontolások alapján a sajátfrekvenciákat várjuk, jól gerjeszti a vizsgálandó rendszert. Megjegyzendő még, hogy nem lehet mindig pontosan ugyanolyan erejű és hosszúságú impulzust kivitelezni, így minden gerjesztés a frekvenciatartományban is más, és más jellegű (ezért is van szükség az átlagolásra), azonban ha megfelelően kivitelezzük a kalapácsütést, akkor az impulzus gerjeszti a rezonáns lapot a működési tartományában.

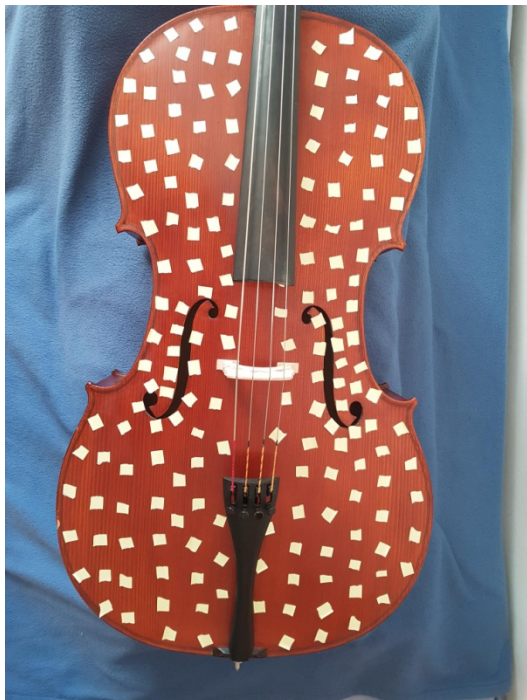
Ye Lu [4] tanulmányában azt írja, hogy azokra a helyekre, ahol a geometria bonyolultabb, sűrűbben érdemes elhelyezni a mérési pontokat, mert azokból a mérés során több információ nyerhető ki, így a mérés során én is az f-lyukak környékén jelöltem ki

sűrűbben a mérési pontokat, míg az egyszerűbb geometriájú részeken ritkábban helyeztem el azokat (lásd 9. ábra).

A gerjesztő eszköz, mint azt korábban említettem, egy impulzuskalapács volt, melynek jelét kettő, a hangszer fedlapjára felhelyezett gyorsulásmérővel mértük.

Fontos, hogy mi a kísérleti móduselmezés során csak a hangszer fedlapjának mint rezgő testnek a módusaira voltunk kíváncsiak, így minden olyan elemet csillapítani kellett melynek a rezgése az eredményeket torzíthatta volna. Ilyen elemek például a húrok, így a húrok illetve a fogólap közé egy törölközőt helyeztem, illetve a csellót nem közvetlenül az asztal lapjára helyeztük, hanem egy szivacsra, mely az asztalnak átadott rezgéseket minimalizálta (lásd 10. ábra).

A fedlapra (mint már említettem) 2 gyorsulásmérőt helyeztem el, melyek 2, egymástól teljesen független eredményhalmazt adtak, így az eredmények egymással összevethetőek, ellenőrizhetőek.



9. ábra: A vizsgálandó hangszer, rajta a mérési pontok helyeinek jelölése



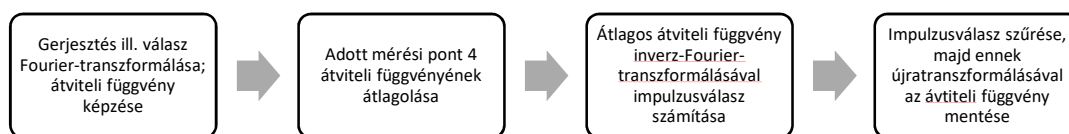
10. ábra: A hangszer a mérés közben az impulzuskalapáccsal illetve a gyorsulásmérőkkel

Az EMA mérés főbb jellemzői az 1. táblázatban közlöm:

Mérés jellemzője	Értéke
mérési pontok száma	180
mintavételi frekvencia	12.8 kHz
1 mérés hossza	0.64 sec
trigger szint	0.1 V
mérések száma egy mérési pontban	4
vett jel erősítése	10-szeres
csatornák száma	3
gyorsulásmérők száma	2
gerjesztőeszköz típusa	impulzuskalapács
gerjesztőeszköz tulajdonságai (márka, modell, sorozatszám)	PCB, 086C03, 9617

1. táblázat

A mérés elvégzése után következik az átviteli függvények kiszámítása a gerjesztés és a válasz Fourier-transzformáltjaiból; minden mérési pontban 4 darabot kapunk. Ezen függvények átlaga az adott mérési pontot jellemző átlagos átviteli függvény, ennek inverz Fourier-transzformáltja lesz az adott pont impulzusválasza. Az impulzusválaszokat szűrés után újra-transzformálva az átviteli függvényeket tároltam el egy mátrixban, majd ezekkel dolgoztam tovább.

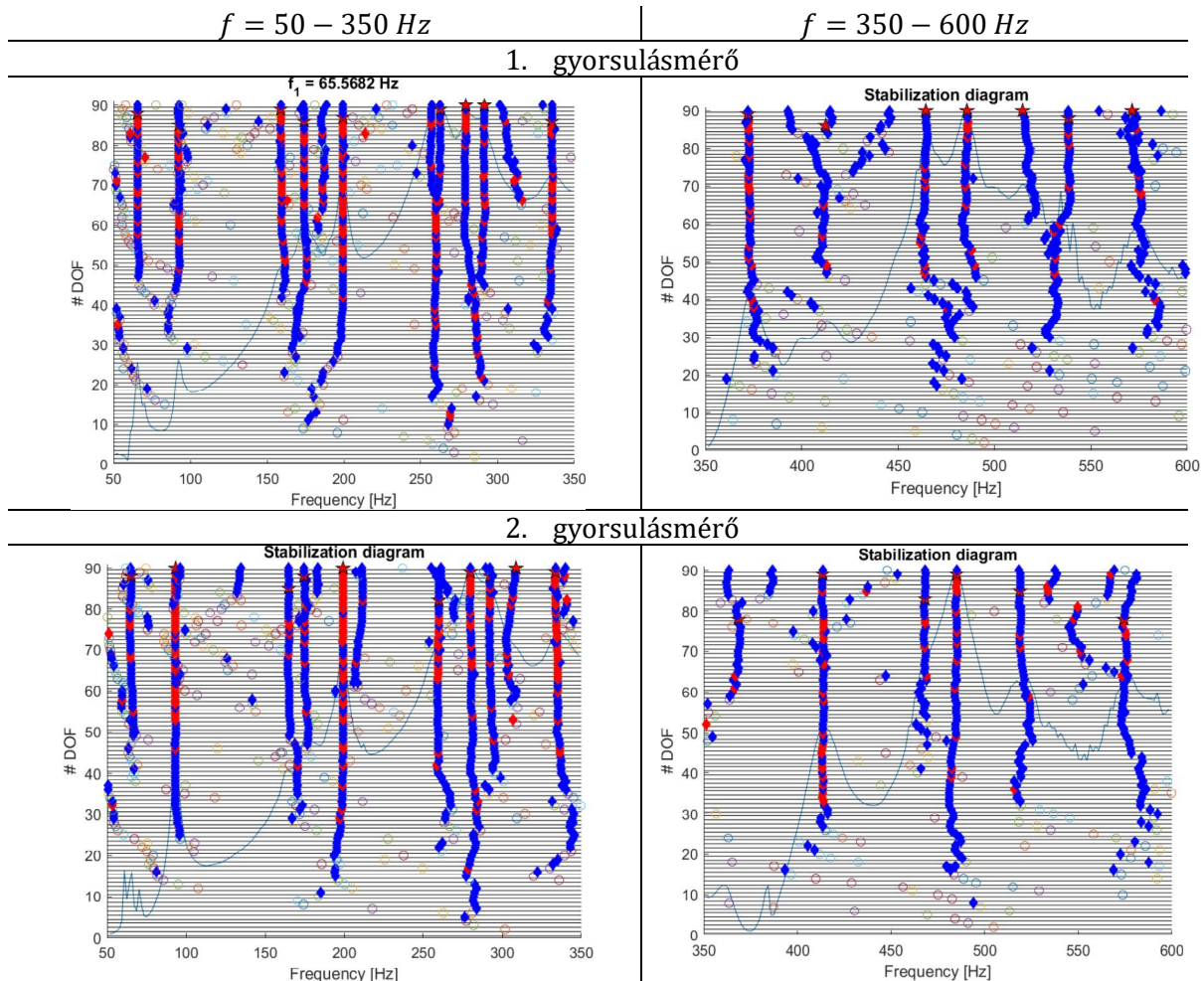


11. ábra: A minták feldolgozásának lépései

Ezután következett a stabilizáció folyamata, mely során a mért átviteli függvényekből kellett megtalálni a rendszer ω_n sajátfrekvenciáit, és a hozzájuk tartozó ξ_n csillapítási tényezőket. Ehhez a rendelkezésemre bocsájtott tanszéki EMA – programcsomag `stabilization.m` függvényét használtam. A stabilizáció során a rendszer szabadsági fokainak számát egyre növeljük, és közben módusokat illesztünk; azokat a megoldásokat tekintjük stabilnak, melyek a foksám változtatásával változatlanok maradnak.

3.2.2. EREDMÉNYEK

A stabilization függvény a kívánt frekvenciatartományban megjeleníti a vizsgált mechanikai struktúra (jelen esetben a cselló rezonánslapja) stabilizációs diagramját, melyről grafikusán is leolvasható, hogy hol lesz kiemelés az amplitúdómenetben, ezekre a helyekre (sajátfrekvenciákra) várjuk a rendszer módusait. Az ezen csúcsokra illesztett pontok kiválasztásával a módusalakokat ábrázolhatjuk, illetve a módushoz tartozó sajátrezgést jellemző paraméterek (csillapítási tényező, időállandó, jósági tényező) számértékét is megkapjuk, illetve kiszámolhatjuk (lásd 7,8 ill. 9 egyenletek). Az diagramot mindkét gyorsulásmérő esetén két tartományban (50-350 Hz, ill. 350-600 Hz) ábrázoltam.



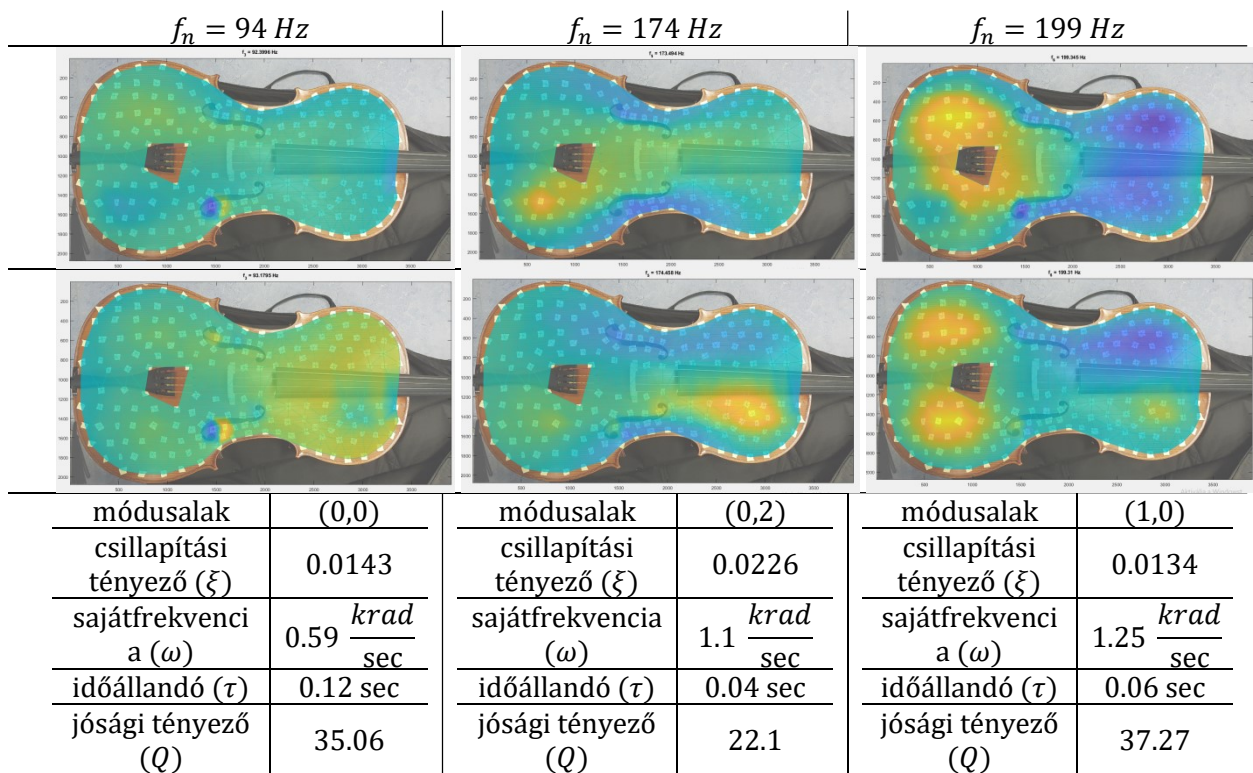
12. ábra: az EMA mérések stabilizációs diagramjai

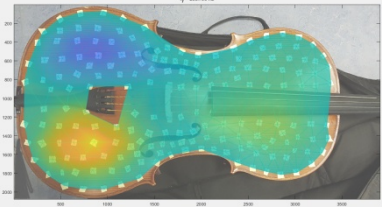
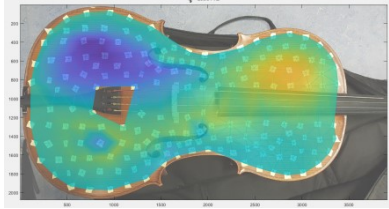
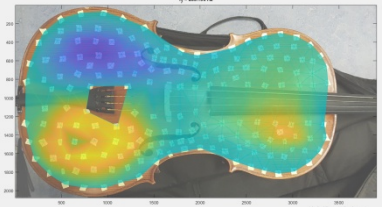
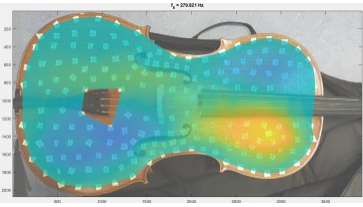
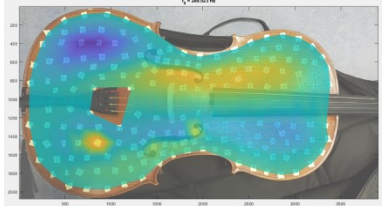
Észrevehető, hogy az alacsonyabb frekvenciás tartományban a két gyorsulásmérő mérési adatai alapján adódó stabilizációs diagram jó közelítéssel megegyezik; ugyanott vannak a csúcsok (pl. 200 Hz), és a kiemelések mértéke (azaz jósági tényező) is hasonló. Azonban magasabb frekvenciákon ez már nem mondható el. A 350-600 Hz-es tartományban az adódó diagramok között már jelentős eltérések vannak, a két amplitúdómenet nagyban eltér. A konkrét eredmények ismertetése során is látni fogjuk, hogy így ezeken a frekvenciákon, már nehezebb jó következtetéseket levonni.



Az eredmények ismertetése előtt fontos még bevezetni egy fogalmat, mely az kapott módusalakok azonosítását segíti, ez pedig a **csomóvonalak** fogalma. Azt várjuk, hogy a rezgő közeg a sajátfrekvenciákon valamilyen szabályos rezgést végezzen, ezen szabályos rezgéseket

a longitudinális és a transzverzális csomóvonalak száma jellemzi, mely csomóvonalak duzzadóhelyeket fognak közre. Egzakt szabály nem létezik, de a továbbiakban is megfigyelhető lesz, hogy minél magasabbak a sajátfrekvenciák, annál több a megjelenő csomóvonal is. A lenti táblázatban – konvenció szerint – a módusalakokat definiáló rendezett pár első eleme jelenti a hangszer hossztengetyére (azaz a húrsíkokra) merőleges csomóvonalainak számát, míg a második elem a hossztengetellyel párhuzamos csomóvonalak számát.

A 2. táblázatban minden megtalált sajátfrekvencián egymás alatt ábrázolom az első, illetve a második gyorsulásmérő mérési eredményeit.



$f_n = 260 \text{ Hz}$		$f_n = 280 \text{ Hz}$		$f_n = 290 \text{ Hz}$	
		nem található meg			
					
módusalak	(0,1)	módusalak	(1,1)	módusalak	(1,1) v. (0,3)
csillapítási tényező (ξ)	0.0288	csillapítási tényező (ξ)	0.0202	csillapítási tényező (ξ)	0.0185
sajátfrekvencia (ω)	$1.63 \frac{\text{krad}}{\text{sec}}$	sajátfrekvencia (ω)	$1.76 \frac{\text{krad}}{\text{sec}}$	sajátfrekvencia (ω)	$1.84 \frac{\text{krad}}{\text{sec}}$
időállandó (τ)	0.02 sec	időállandó (τ)	0.028 sec	időállandó (τ)	0.029 sec
jósági tényező (Q)	17.38	jósági tényező (Q)	24.73	jósági tényező (Q)	27.03

$f_n = 413 \text{ Hz}$	
	
	
módusalak	(2,0)
csillapítási tényező (ξ)	0.021
sajátfrekvencia (ω)	$2.6 \frac{\text{krad}}{\text{sec}}$
időállandó (τ)	0.018 sec
jósági tényező (Q)	23.8

2. táblázat: A kísérleti móduselemzés mérési eredményei a jellemző paraméterekkel

Jól látható, hogy minél magasabbak a sajátfrekvenciák, a mérési eredmények annál „zajosabbak”. 413 Hz – en például már nem is állapítható meg teljes bizonyossággal a módusalakok száma, illetve, hogy az adott frekvencia egyáltalán sajátfrekvencia-e. 280 Hz

környékén az első gyorsulásmérő nem adott értelmes eredményeket, a második gyorsulásmérővel megtalálható módusalakot sikerült megtalálni. Épp ezért további eredményeket nem is közlök, ugyanis magasabb frekvenciákon a mérési eredményekből már nem vonhatóak biztos következtetések. Összességében azonban megállapítható, hogy a kapott eredmények megfelelőek, ugyanis a módusok abba a tartományba esnek, ahol a cselló „működési” frekvenciái alapvetően is vannak, azaz a fedlap valóban azokon a frekvenciákon sugározza le a hangot a leghatékonyabban, amely frekvenciákon a gyakorlatban is megszólaltatják azt. Nagyon magas frekvenciákon pedig már nem csak a mérés pontatlansága miatt nehéz azonosítani a módusokat, hanem azért is, mert azon módusok csillapítása nagyon nagy, így nem is különülnek egymástól.

4. FEJEZET

A FEDLAP VÉGESELEM-ANALÍZISE

Miután meghatároztuk a fedlap módusait a kísérleti módszerrel, a következő fejezetben azt fogjuk megvizsgálni, hogy amennyiben egy ugyanilyen rezonáns lap viselkedését elemezzük számítógépes szimulációval, akkor milyen eredményeket kapunk, ezek mennyiben térnek el, illetve mennyiben hasonlítanak az előzőekben látottakhoz. A szimulációhoz a végeelem-módszert fogom segítségül hívni. Ehhez először ismertetem a fa anyagának tulajdonságait, majd megadom a megoldandó egyenletrendszereket is a [6], ill. a [9] források alapján.

4.1. ELMÉLETI BEVEZETÉS

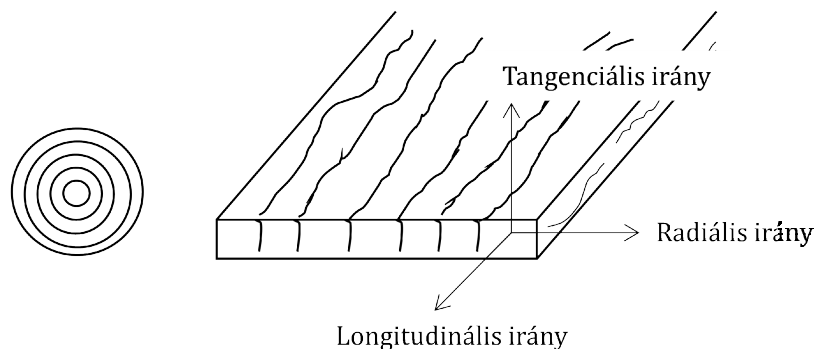
4.1.1. A FA ANYAGÁNAK JELLEMZÉSE

Mivel a fedlap fából készül, ezért annak végeelemes analíziséhez (lásd később) ismernünk kell a fa anyagjellemzőit (hiszen például a későbbiekben ismertetésre kerülő anyagegyenletek csak ezek alapján tudjuk fölírni).

A fa anyagának fizikai jellemzéséhez először nézzük meg, hogy hogyan jellemezhetőek a fához hasonló rugalmas anyagok fizikai szempontból.

A lineárisan rugalmas testek vizsgálata során a különböző anyagokat anyagparamétereik szerint különböző csoportokba soroljuk. Homogénnek nevezünk egy anyagot, ha anyagparamétereik minden pontban megegyeznek, egyébként inhomogén anyagról beszélhetünk. A fa (jó közelítéssel, és elhanyagolásokat alkalmazva) szerkezetileg homogén, anizotróp, és azon belül is ortotróp anyag, ez azt jelenti, hogy bizonyos anyagjellemző paramétereket minden dimenzió szerint, adott esetben minden dimenzió között értelmezni kell.

A fa bizonyos körülmények között jellemezhető transzverzálisan izotróp anyagként is. Ez azt jelenti, hogy anizotróp, de szimmetrikus egy bizonyos szimmetriatengelyre történő elforgatásra. Amennyiben a tangenciális irányú kiterjedés elhanyagolhatóan kisebb, mint a radiális, ill. longitudinális irányú kiterjedés (például egy vékony lemez esetében), akkor ez is jól jellemezhető az anyagot. Vékony, hosszú rudak esetén az izotróp modell is alkalmazható.



13. ábra: A fa szálszerkezetének sematikus ábrája

Az alábbiakban bemutatom azokat a paramétereket, melyek segítségével a fa tulajdonságai jellemezhetőek.

A **Young-modulus**, vagy más néven **rugalmassági modulus** (E) az anyag merevségéről, rugalmasságáról hordoz információt, mértékegysége [Pa], nagyságrendje GPa körüli, jelen esetben egy háromdimenziós vektorként értelmezhető.

A **Poisson-arány** (ν) azt adja meg, hogy amennyiben egy testre egyetlen irányban erőt fejtünk ki (húzás/nyomás), akkor mekkora lesz a keresztirányú alakváltozásnak az adott irányú alakváltozáshoz képesti aránya. Dimenziótlan mennyiség, minden irány közt értelmezni kell (azaz jelen esetben egy hat elemű vektor – a **3.** táblázatban csak három paramétert ismertettek, ugyanis a további három ezekből, illetve a Young-modulus ismeretében már számítható).

A harmadik pedig a **nyírási rugalmassági modulus**, mely az alábbiak szerint értelmezhető:

$$\tau = G\gamma, \quad (29)$$

ahol τ a csúsztatófeszültség (nyírófeszültség), γ pedig a szögelfordulás. Ezt a jellemzőt használjuk torziós (csavaró) igénybevételeknél. Értékét általában MPa egységben adjuk meg.

Ezekon kívül a faanyagot jellemzi még a **sűrűsége** (ρ), mely egy, az egész anyagra jellemző konstans.

Én a vizsgálataim, illetve a szimulációk során a rendelkezésemre bocsájtott NiHu Matlab-os programcsomaghoz ('toolbox') mellékelt `wood_material.m` könyvtárral dolgoztam, mely számos faféle ilyen jellegű paramétereit tartalmazza. Ezek közül a szitka luc ('spruce_sitka') esik a legközelebb a hangszer rezonáns lapjának (azaz fedlapjának) készítéséhez használatos fához, így erre esett választásom. Ennek elemértékeit a **3.** táblázatban szemléltetem (az alábbi indexeket használom az irányok megkülönböztetésére: 1: longitudinális, 2: tangenciális, 3: radiális):

Anyagi jellemző paraméter	érték		mértékegység
Sűrűség (ρ)	400		$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
Young – modulus (E)	E_1	$1.188 * 10^{10}$	[Pa]
	E_2	$0.0511 * 10^{10}$	
	E_3	$0.0927 * 10^{10}$	
Nyírási rugalmassági modulus (G)	G_{23}	$0.3564 * 10^8$	[Pa]
	G_{31}	$7.6032 * 10^8$	
	G_{12}	$7.2468 * 10^8$	
Poisson – arány (ν)	ν_{23}	0.2398	[1]
	ν_{31}	0.029	
	ν_{12}	0.467	

3. táblázat: A szitka luc jellemző paraméterei

Érdeemes megfigyelni, hogy mekkora a különbség a Young-modulus longitudinális és radiális paraméterei közt. Az $\frac{E_1}{E_3}$ arány több mint tízszeres, és ez a várakozásoknak megfelel; ez az arány a faanyagokra általában is jellemző.

4.1.2.A LINEÁRIS RUGALMASSÁGTAN PEREMÉRTÉKFELADATA

A továbbiakban az a feladatunk, hogy a fedlap módusait, melyet a korábbiakban már meghatároztunk a kísérleti móduselemzés módszerével (EMA), most határozzuk meg számítási úton is, azaz oldjuk meg a fedlapra felírható hullámegyenletet. A továbbiakat a [6] forrás, illetve a [9] forrás 6.2 fejezete alapján írtam.

A cselló fedlapjának vizsgálata során a lineáris rugalmasságtan peremértékfeladatát kell felírunk, és megoldanunk. Ennek 4 komponense van: a mozgásegyenletek, az anyagegyenletek, a kinematikai egyenletek, és a peremfeltételek. Az alábbiakban ezeket ismertetem.

A **mozgásegyenlet** (rendszer) az alábbi formában írható:

$$\nabla \sigma + \mathbf{b} = \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2}, \quad (30)$$

ahol ∇ a differenciáloperátor, σ szigma a mechanikai feszültség tenzora, mely a felületre merőleges koordinátájú normálfeszültségből ($\sigma_{x,y,z}$), és a felülettel párhuzamos koordinátájú csúsztatófeszültségből ($\tau_{xy, stb.}$) áll, \mathbf{b} pedig a testerők vektora:

$$\sigma = [\sigma_x, \quad \sigma_y, \quad \sigma_z, \quad \tau_{xy}, \quad \tau_{yz}, \quad \tau_{zx}]^T$$

$$\mathbf{b} = [b_x, \quad b_y, \quad b_z].$$

A mechanikai feszültség és a fajlagos nyúlás (\mathcal{E} , deformációnak, alakváltozásnak is nevezik) közti összefüggést pedig az formula adja meg:

¹ A σ itt tenzor, azonban mérnöki jelöléssel („engineering notation”) vektorként tüntetjük föl.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (31)$$

ahol \mathbf{D} egy úgynevezett merevségtenzor, mely a korábbiakban már ismertett anyagparamétereket (Young-modulus, Poisson-arány, és nyírási rugalmassági modulus) tartalmazza. A (31) egyenletrendszer (az **anyagegyenletek**) alapját a Hooke-törvény képezi; megjegyzem, hogy a ':' a tenzorszorzásra utal. A \mathbf{D} tenzor inverzének alakja ortotróp anyagmodell esetén (megint csak a mérnöki jelölésmóddal):

$$D^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{vmatrix}$$

A mátrix elemértékei a korábban már bevezetett jelölésrendszerrel koherensek.

A fajlagos nyúlás és az elmozdulás között az ún. **kinematikai egyenletek** teremtenek kapcsolatot:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T]. \quad (32)$$

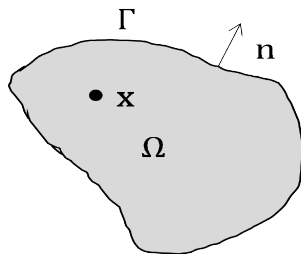
A peremértékfeladat során meg kell fogalmaznunk a **peremfeltételeket** is. Ebből 2 féle létezik: kinematikai, ahol az elmozdulást írjuk elő, és dinamikai, ahol pedig a terhelést:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0; \mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}. \quad (33)$$

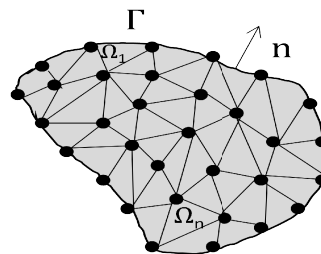
A test egy adott pontjában egyszerre csak az egyik peremfeltétel érvényesülhet.

Az így megadott peremértékfeladatot kell közelítő módszerrel megoldani, mely közelítő módszer a végeelem-módszer, melyet parciális differenciálegyenletek megoldására használnak. Lényege, hogy a vizsgált térrészt diszkrétizáljuk, azaz kisebb egységekre bontjuk, majd minden egységre kiszámoljuk a korábbi fejezetekben már bevezetett tömeg- illetve merevségmátrixokat, az így adódó mátrixokból összeállítjuk a teljes rendszer tömeg- és merevségmátrixait, majd ezekből a modális megoldás segítségével már kiszámíthatóak a rezonáns lap módusai. A diszkrétizált, vizsgálni kívánt felületen, vagy térfogatban ily módon csomópontok – azaz 'node'-ok – jönnek létre, ezen csomópontok pedig elemeket feszítenek ki maguk között, mely elemek mindegyikére anyagparaméterek adhatóak meg. Ekkor a FEM –

ehelyütt ismertetésre nem kerülő – eljárásainak segítségével a (17)-hez hasonló egyenletrendszer adódik, melyből a korábbiakban ismertetett módon a módusokat, illetve a módusalakokat ki lehet számolni. Azaz amennyiben a csillapítástól eltekintünk, akkor megoldandó a (14)-beli általánosított sajátértékfeladat.



14. ábra: A vizsgált térfogat szemléltetése



15. ábra: A felület diszkrétizálása, azaz felbontás részfelületekre, melyet a csomópontok és az elemek definiálnak

4.2.EREDMÉNYEK

A modális megoldáshoz tehát a gyakorlatban is elő kell állítani a tömeg illetve a merevségi mátrixokat. Szoftveres úton a tömeg- illetve a merevségi mátrixokat a MatLab NiHu programcsomagjának `elastic_mk()` függvényével számítottam.

Mivel a sajátfrekvenciák – illetve a módusalakok is – paraméterfüggőek (például vastagságfüggőek), ezért a fedlap végeelem modelljét többször is módosítottam, és a módusokat minden ilyen változatra kiszámítottam. A paraméterek jelen esetben a fa vastagságát jelentették, melyet a NiHu programcsomag `extrude_mesh()` függvényével könnyen tudtam változtatni.

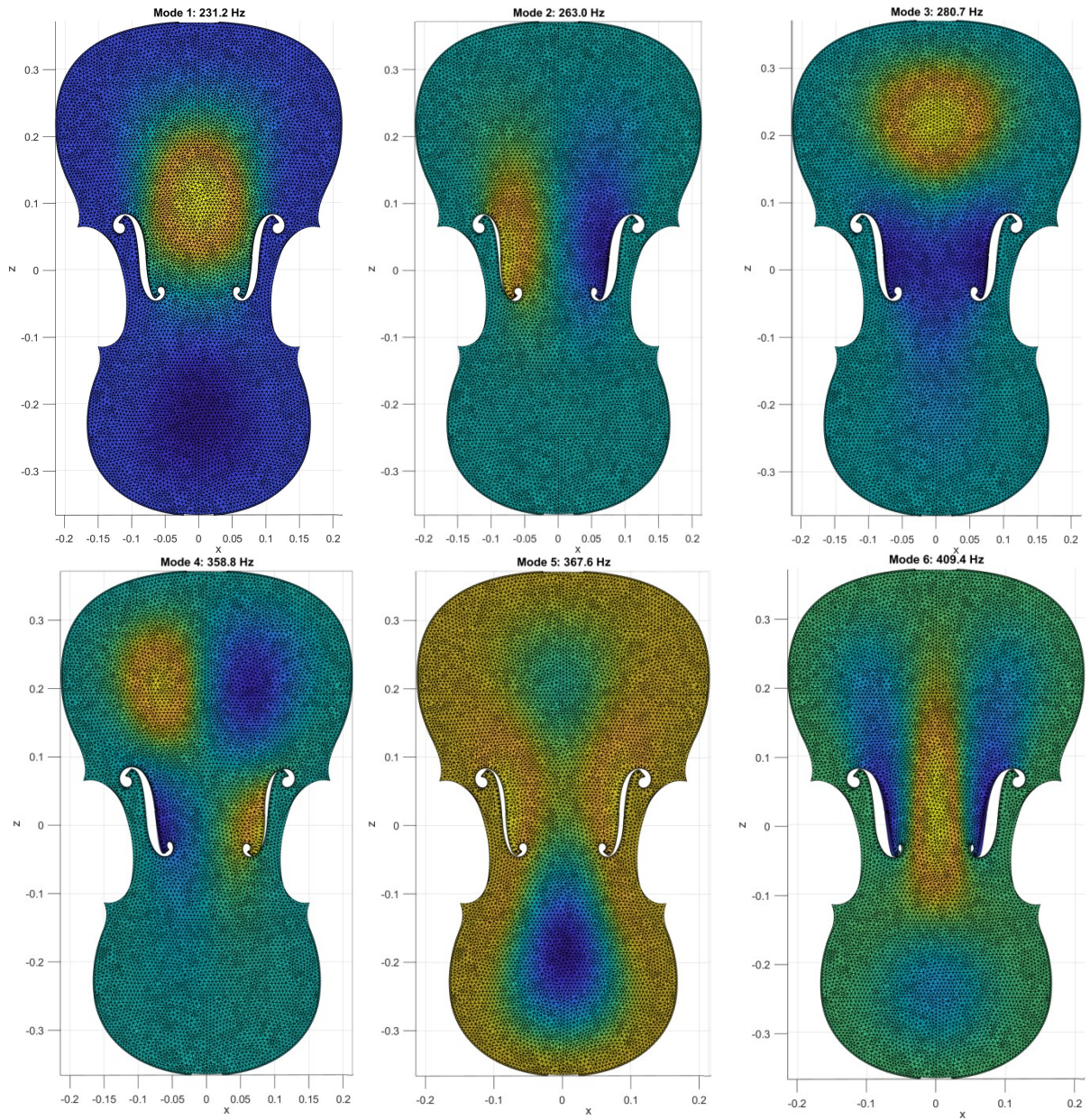
Az alábbiakban (4. táblázat) 4 vizsgált vastagság-változat esetén közlöm az első 10 sajátfrekvenciát táblázatos formában.

f_n [Hz]; $d = 3$ mm	f_n [Hz]; $d = 5$ mm	f_n [Hz]; $d = 10$ mm	f_n [Hz]; $d = 15$ mm
231.2	295.1	401.6	485.2
263	419,2	592.9	745.8
280.7	423.1	634.1	793.8
358.8	539.4	869.5	1151
367.6	595.5	911.6	1160.2
409.4	675.8	1045	1314.7
432	703.4	1065.7	1356.9
455.3	763.3	1245.3	1577.7
472.4	881.5	1376.3	1637.1
504.5	921	1454.4	1780.6

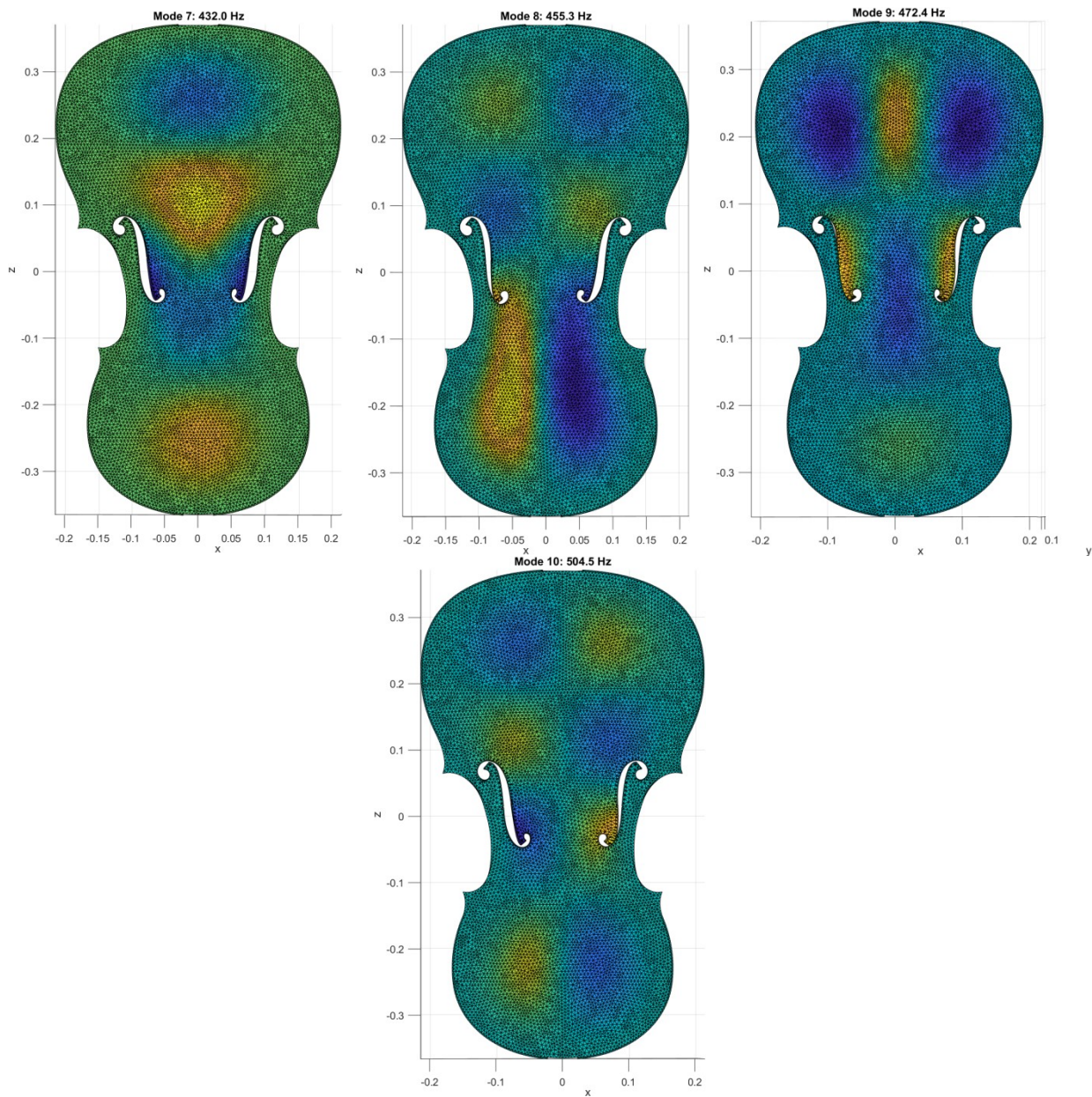
4. táblázat: Az első 10 sajátfrekvencia értéke $d = 3, 5, 10$ illetve 15 mm - es fedlapvastagság esetén

Mivel az egyéb anyagparamétereket a szimulációk során nem változtattam, ezért az eredményekből szépen leolvashatóak, hogy a vastagság változásának függvényében hogyan változnak a sajátfrekvenciák (pl. 2-szeres változás esetén – 5 mm és 10 mm közt).

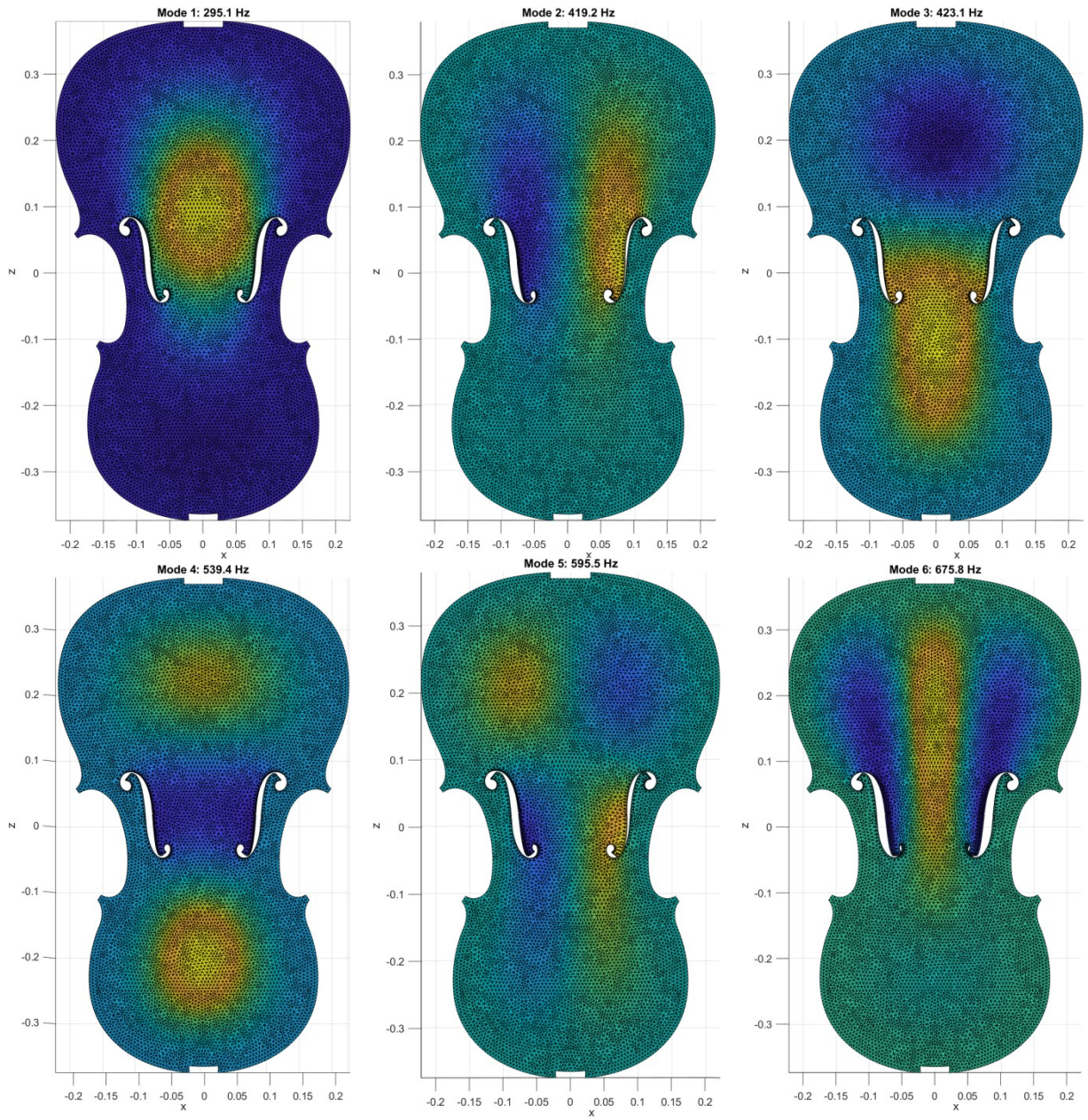
A következő 2 táblázatban (5. táblázat, ill. 6. táblázat) pedig bemutatom, a valóságban is leggyakrabban előforduló fedlappvastagságok esetén (3 mm, és 5 mm) a frekvenciákat jellemző lengésképeket is.¹

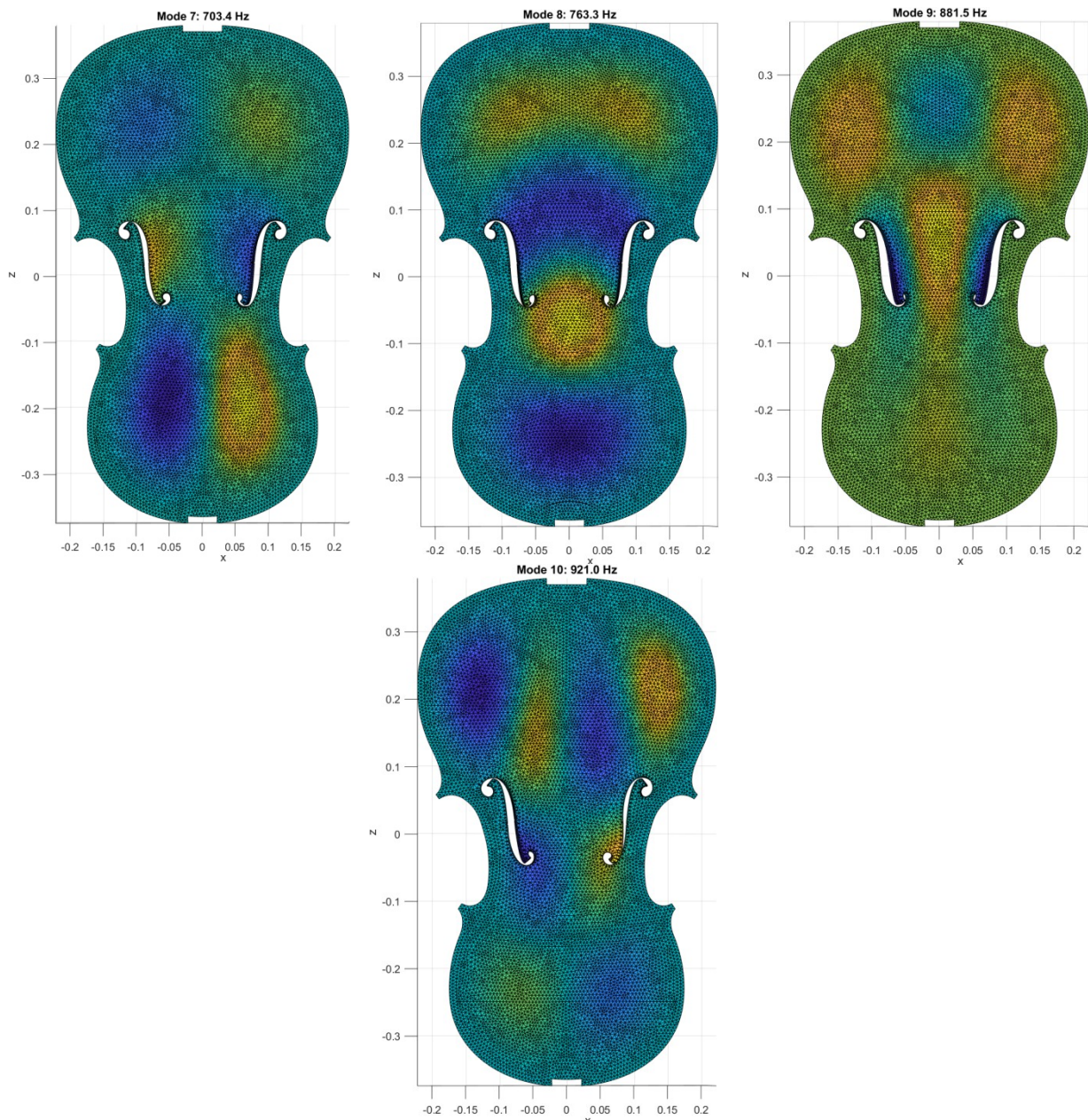


¹ Az EMA módszer esetén vizsgált hangszer rezonánslapjának vastagsága is 5 mm.



5. táblázat: Módusalakok 3 mm-es fedlapvastagság esetén





6. táblázat: Módusalakok 5 mm-es fedlapvastagság esetén

Megfigyelhető, hogy a módusalakok a rezonánslap vastagságának megváltoztatásának hatására is változnak. Azaz például 3 és 5 mm-es vastagság esetén a tizedik módusalak különbözik.

Ha összehasonlítjuk az itt kapott eredményeket a kísérleti móduselemzés eredményeivel, azt láthatjuk, hogy míg az EMA esetén a legalacsonyabb frekvencián lévő megtalált módus 94 Hz-en van, addig a FEM esetén még a legvékonyabb rezonánslapvastagság esetén is 200 Hz fölött kapjuk az első sajátfrekvenciát. Ez szembeötlő eltérés. Ennek oka például az alkalmazott peremfeltételek milyensége lehet. Tudjuk, hogy a fedlap a pereménél a kávához kapcsolódik, így én ott teljesen merev peremfeltételeket alkalmaztam, azaz úgy tekintettem, hogy a fedlap a pereménél egyáltalán nem mozog, sebessége zérus. A „megfogás” a sajátfrekvenciákat fölfelé mozdítja el, azaz amennyiben finomabb peremfeltételeket alkalmaznék, azaz figyelembe venném, hogy a kávához kapcsolódó részek is mozoghatnak bizonyos mértékben, akkor az EMA eredményeihez közelebbi értékeket

kaphatnék. Szintén nem vettem figyelembe a rezonánslapot a légüreg felől érintő lélekfát, melynek jelentős szerepe van a hangszer rezgéseinek alakításában, illetve a berakás hatásától is eltekintettem. Emlékeztetésképpen, a berakás a cselló peremén elhelyezkedő sáv, mely több különböző féle faréteggel van kitöltve, mi azonban a fedlapot homogén anyagparaméterekkel jellemeztük. Ezen kívül a szimulációk során referencia anyagparaméterekkel dolgoztam, és a rezonánslapot az egyszerűség kedvéért homogénnek tételeztem föl, azonban egy valódi fa esetében ez már nem teljesül (gondoljunk például csak arra, hogy egy falemeznek nyilván nem azonos minden egyes pontjában a sűrűsége), így a vizsgált fa anyagparaméterei nagyban különbözhetnek a szimulált értékektől.

A fent említett tényezők mind befolyásolhatják a módusok alakulását, így ezek figyelembevétele a modell továbbfejlesztésének egy releváns iránya lehet a későbbiekben.

5. FEJEZET

A LÉGÜREG ANALÍZISE

Ebben a fejezetben az a célunk, hogy a hangszer falemezekkel körülhatárolt belső terének, azaz légüregének működését vizsgáljuk. A vizsgálat most is, mint minden rezgő rendszer esetén a modális analízist rejti magába (azaz a módusalakok, illetve a sajátfrekvenciák megtalálására törekszünk). Feladatunk annyiban bonyolultabb, mint a mechanikai módszer esetében, hogy amennyiben pontos eredményeket szeretnénk, nem tekinthetünk el a csatolt tértől, hiszen a hangszer a működése (megszólalása) közben a hanghullámokat az f-lyukakon keresztül a végtelen kültérbe is lesugározza, így ezzel a szimuláció során is mindenképpen számolnunk kell.

Először csak a jól ismert végeelem-módszert hívjuk segítségül a számításokhoz, melynek során a légüregteljesen zártnak tekintjük, az f-lyukak hatásától eltekintünk, majd a végeelem-módszerhez az úgynevezett peremelem-módszert csatoljuk, mellyel figyelembe tudjuk majd venni a lesugárzás hatását. Ezen másik eljárás mikéntje a bevezetésben ismertetésre kerül. Az elméleti alapok ismertetése során jelentős részben hivatkozom majd az [5] forrásra.

5.1. ELMÉLETI BEVEZETÉS

5.1.1. AZ AKUSZTIKAI HULLÁMEGYENLET

Mint már a korábbi probléma esetében, most is – többek közt – a végeelem-módszert fogjuk alkalmazni, így bevezető lépésként az a feladatunk, hogy megfogalmazzuk az akusztikai peremértékfeladatot¹, melyre a FEM megoldást nyújt.

Az akusztikai hullámeqyenlet egy parciális differenciálegyenlet, mely általánosan az alábbi alakban írható:

$$\Delta p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 p(\mathbf{x}, t)}{dt^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (34)$$

Ahol p a hangnyomás, c a nyomás terjedési sebességét jelöli, míg Ω a vizsgált térfogat (t természetesen az idő).

Térjünk át a Fourier-transzformáció segítségével a frekvenciatartományba; rendezés után a hullámeqyenlet az alábbi alakot ölti (a „kalap” a nyomás komplex fázorát jelöli):

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \hat{p}(\mathbf{x}) = 0, \quad (35)$$

innen pedig elemi átalakításokkal adódik, hogy:

$$(\nabla^2 + k^2) \hat{p}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \in \mathbb{R}^n \quad (36)$$

¹ angolul BVP – boundary value problem

ahol k a hullámszám. A (36) egyenletet Helmholtz-egyenletnek is nevezik.

Föl kell írunk a peremfeltételeket. Ehhez először adjuk meg az ún. Euler-egyenletet:

$$\nabla \hat{p}(\mathbf{x}) + j\omega\rho\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (37)$$

A fenti egyenletben ρ a vizsgált közeg sűrűségét jelöli, míg \mathbf{v} a közeg részecskéinek sebességét. Ebből a Neumann peremfeltétel adódik:

$$\frac{d\hat{p}(\mathbf{x})}{dn} = -j\omega\rho\hat{v}_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (38)$$

mely a peremekre előírja a részecskék rezgésének v_n normális irányú sebességét (Γ a vizsgált térfogat peremét jelöli). Ez azért fontos, mert a légüreg pereme a cselló testéhez kapcsolódik, így a vizsgált térrész peremének rezgési sebességeit a kapcsolódó mechanikai struktúra rezgési sebességeinek ismeretében megadhatjuk. Tehát például amennyiben a cselló falát teljesen merevnek tekintjük, azaz úgy vesszük, hogy az egyáltalán nem mozog, akkor ebből megadható, hogy a peremen a normális irányú részecskesebesség is 0.

Ezen kívül előírhatunk még Dirichlet peremfeltételt is, amikor a peremen a nyomás értékét írjuk elő. Formálisan:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (39)$$

5.1.2. AZ AKUSZTIKAI VÉGESELEM-MÓDSZER

Az akusztikai FEM-et a további alkalmazásai miatt részletesebben ismertetem, mint korábban a mechanikai párját. A módszer lényege tömören, hogy először a peremértékproblémát gyenge alakra hozzuk, a gyenge alakra alkalmazzuk a peremfeltételeket, majd az így adódó függvényeket diszkrét alakfüggvények segítségével közelítjük. Eután a gyenge alak mátrixegyenlete már adódik.

A gyenge alak úgy adódik, ha a (36) egyenletet beszorozzuk egy próbafüggvénnyel, majd a teljes Ω tartományon integráljuk. Legyen a próbafüggvény $\psi(\mathbf{x})$, ekkor:

$$\int_{\Omega} \psi \nabla^2 \mathbf{p} \, d\mathbf{x} + k^2 \int_{\Omega} \psi \mathbf{p} \, d\mathbf{x} = 0. \quad (40)$$

Alkalmazzunk most nemelemi átalakításokat: $\psi \nabla^2 \mathbf{p} = \nabla(\psi \nabla \mathbf{p}) - \nabla \psi \cdot \nabla \mathbf{p}$. Ekkor az alábbi integrálegyenlet nyerhető:

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \mathbf{p} \, d\mathbf{x} - k^2 \int_{\Omega} \psi \mathbf{p} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\psi \nabla \mathbf{p}) \, d\mathbf{x}. \quad (41)$$

Használjuk most a Gauss-tételt: $\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{f} \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x}$, ahol \mathbf{n} a perem kifelé mutató normálisa. Jelen esetben $\mathbf{f} = \psi \nabla \mathbf{p}$, így:

¹ Kihasználtuk, hogy $\Delta = \nabla^2$, illetve, hogy $\frac{\omega}{c} = k$.

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \mathbf{p} \, dx - k^2 \int_{\Omega} \psi \mathbf{p} \, dx = \int_{\Gamma} \psi \frac{d\mathbf{p}}{dn} \, dx. \quad (42)$$

Ezután a fönti gyenge alakra alkalmazzuk a (38)-ban ismertetett Neumann peremfeltételt. Most is alkalmazzuk a hullámszámot definiáló összefüggést ($k = \frac{\omega}{c}$), így az alábbi alak adódik:

$$\rho c^2 \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \mathbf{p} \, dx - \omega^2 \rho \int_{\Omega} \psi \mathbf{p} \, dx = -j\omega \rho^2 c^2 \int_{\Gamma} \psi \mathbf{v}_n \, dx. \quad (43)$$

Ezután a nyomásfüggvényt, a próbafüggvényt, illetve a normális irányú sebesség függvényét is diszkrétizáljuk, ismert alakfüggvényekkel közelítjük. Ekkor a gyenge alak mátrixos formája az alábbiak szerint adódik:

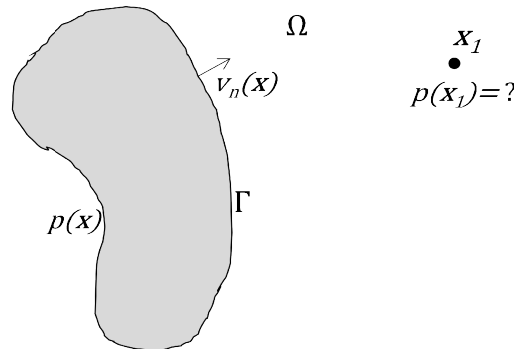
$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{p} = -j\omega \mathbf{A} \mathbf{v}_n, \quad (44)$$

ahol \mathbf{K} a merevségmátrix, \mathbf{M} a tömegmátrix, \mathbf{A} pedig az felületi gerjesztési mátrix.

Majd a vizsgálandó tartományt is diszkrétizálni kell (lásd: 15. ábra), és minden ilyen diszjunkt elemre fölírni az előbb ismertetett paramétereket.

5.1.3.A PEREMELEM-MÓDSZER

A nyílt térbe történő lesugárzás a peremelem-módszer¹ segítségével írható le. A módszer lényege, hogy amennyiben a változók értékei a határfelületen ismertek, akkor a tér bármely pontjára kiszámíthatóak. Jelen esetben tehát egy végtelen külső teret vizsgálunk, melynek egy belső határfelületének peremén ismertek a változók értékei (lásd 16. ábra).

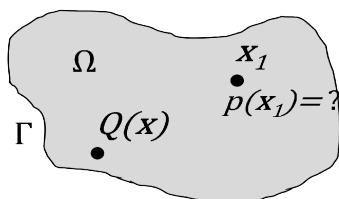


16. ábra: A BEM esetén vizsgált térrész sematikus szemléltetése

Először meg kell határoznunk az ismeretlen mennyiségeket a peremen.

Kiindulásként most is a peremértékproblémát kell meghatároznunk, melyet meg akarunk oldani. Ehhez induljunk ki egy úgynevezett beltéri problémából (lásd 17. ábra).

¹ angolul: BEM – boundary element method



17. ábra: Kiindulási probléma

A peremértékprobléma áll a (36)-es parciális differenciálegyenlet inhomogén alakjából (azaz egy forrás hatását is figyelembe vesszük):

$$\nabla^2 p(x) + k^2 p(x) = -Q(x), \quad x \in \Omega, \quad (45)$$

illetve a (38)-beli peremfeltételből. Hozzuk gyenge alakra a Helmholtz egyenletet a 5.1.2-ben megismert módon. Ekkor – levezetés nélkül – az alábbi alak adódik:

$$\int_{\Gamma} \psi \frac{\partial p}{\partial n} dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial n} p dx + \int_{\Omega} [\nabla^2 \psi + k^2 \psi] p dx = \int_{\Omega} -\psi Q dx. \quad (46)$$

A ψ próbafüggvény legyen a Helmholtz-egyenlet Green-függvénye (azaz a parciális differenciálegyenlet megoldása a peremfeltételek figyelembevételével – jelen esetben szabadtéri Green-függvényről van szó, így peremek nincsenek – amennyiben a gerjesztés egységnyi erősségű pontforrás¹). Jelöljük ezt $G(x, x_0)$ -lal; ekkor egy tetszőleges pont nyomása:

$$c(x_0)p(x_0) = \underbrace{\int_{\Gamma} G(x_0, x) \frac{\partial p(x)}{\partial n} dx}_{p_{scatI}} - \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{\partial G(x_0, x)}{\partial n} p(x) dx}_{p_{scatII}} + \underbrace{\int_{\Omega} G(x_0, x) Q(x) dx}_{p_{inc}}. \quad (47)$$

Ahol a c függvény értéke az alábbiaktól függ:

$$c(x_0) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_0 \in \Omega \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x_0 \in \Gamma \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (48)$$

A (47) egyenletben az első két tag a peremről visszavert nyomást, míg a harmadik tag a forrásból közvetlenül beeső nyomást jelöli.

Most azonban még csak egy adott peremmel határolt térfogat belsejében adtuk meg a nyomást, nekünk pedig az a feladatunk egy külső tér bármely pontjában megadjuk azt. Ehhez az ún. kültéri problémát írjuk föl. Ennek során a nyílt külső teret, melybe a hangszer az f-

¹ Vagy másképp egy három dimenziós Dirac-impulzus egy $x \in \Omega_1$ pontban.

lyukon keresztül lesugároz, úgy tekintjük, mint egy olyan tér, melynek két határoló felülete van: egyrészt maga a Γ felület, másrészt pedig egy Γ_∞ gömbfelület, melynek sugara tart a végtelenbe. Ekkor a *Sommerfeld-féle sugárzási feltétel* szerint úgy tekinthető, hogy ezen külső gömbfelületről nem verődik vissza nyomáshullám a vizsgált térfogatba.

Most ugyanúgy, mint a FEM esetén, diszkrétizálnunk kell a tartományt, jelen esetben a peremet; a nyomás függvényét, illetve annak normális irányú deriváltját pedig úgynevezett alakfüggvényekkel közelítjük:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_j N_j^p(\mathbf{x})p_j, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (49)$$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial n} = \sum_j N_j^q(\mathbf{x})q_j, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (50)$$

Ahol j a peremelemek indexeit jelöli.

Ezután a Sommerfeld-feltétel alkalmazásával a (47) formula a peremelemekre az alábbiak szerint adódik:

$$\frac{1}{2}p_i = \underbrace{\sum_j \int_{\Gamma_j} G(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})N_j^q(\mathbf{x})d\mathbf{x}}_{G_{ij}} q_j - \underbrace{\sum_j \int_{\Gamma_j} G'_n(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})N_j^p(\mathbf{x})d\mathbf{x}}_{H_{ij}} p_j. \quad (51)$$

Az i -edik peremelem középpontját válasszuk \mathbf{x}_i elemként. A mátrixalak az alábbi szerint adódik:

$$\frac{1}{2}\mathbf{p} = \mathbf{G}\mathbf{q} - \mathbf{H}\mathbf{p} \quad (52)$$

Mind a G , mind a H mátrixok minden \mathbf{ij} elempárra föl kell írni, így mindkettő teli (és ezen kívül komplex értékű) mátrix lesz. Ezzel megkaptuk az ismeretlen mennyiségeket a peremen. Ezután a vizsgált külső térrész bármely választott pontjában a nyomás (levezetés nélkül):

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{G}_f\mathbf{q}_s - \mathbf{H}_f\mathbf{p}_s \quad (53)$$

Ahol f a vizsgált térrészre utal („field”), míg s a határoló belső felületre („surface”).

5.1.4.CSATOLT VÉGES- ÉS PEREMELEM – MÓDSZER

A hangszer légüregének, mint zárt térnek a viselkedését tehát a végeselem-módszerrel, míg a kültérbe való lesugárzást a peremelem-módszerrel vizsgáljuk. Nyilvánvaló azonban az is, hogy csak az egyik jelenség egyszerre soha nincs jelen, így tehát a két módszert csatolni kell egymáshoz, így a bel- és kültérbe való lesugárzást egyaránt vizsgálni tudjuk.

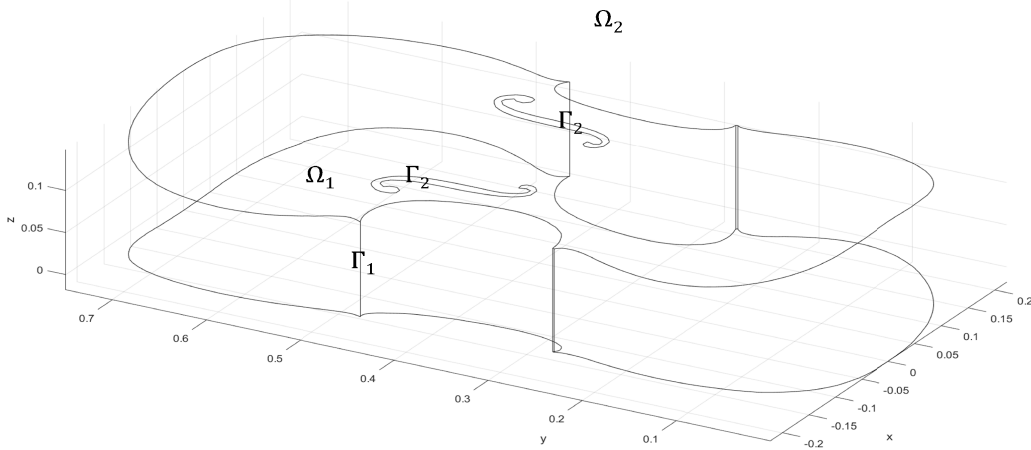
Írjuk föl a csatolandó mátrixegyenleteket! A végeselem-módszer egyenlete:

$$\mathbf{K}\mathbf{p}_{in} - \omega^2\mathbf{M}\mathbf{p}_{in} = -j\omega\mathbf{A}\mathbf{v}, \quad (54)$$

illetve az akusztikai peremelem-módszer mátrixegyenlete:

$$-\mathbf{G}\mathbf{q}^{out} + \mathbf{H}\mathbf{p}^{out} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\mathbf{p}^{out}. \quad (55)$$

A peremfeltételek megadásához vessünk egy pillantást a vizsgálandó struktúrára (18. ábra).



18. ábra: A vizsgált összeállítás

Jelölje Γ_1 a határolófelületet mindenhol, az f-nyílások kivételével, míg Γ_2 az f-nyílásoknál, és jelölje Ω_1 a belső térrészt, míg Ω_2 a külsőt. Ekkor

$$p(\mathbf{x}) = p_{in}(\mathbf{x}) = p_{out}(\mathbf{x}) \text{ és } v_n(\mathbf{x}) \neq 0, \text{ ha } \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (56)$$

$$p_{inc}(\mathbf{x}) \neq p_{out}(\mathbf{x}), \text{ és } v_n(\mathbf{x}) = 0, \text{ ha } \mathbf{x} \in \Gamma_1. \quad (57)$$

Ezen kívül szintén a peremen meghatározhatjuk az alábbiakat:

$$v_{n_{scat}}(\mathbf{x}) = -v_{n_{inc}}(\mathbf{x}), \quad q_{scat}(\mathbf{x}) = -q_{inc}(\mathbf{x})^1 \text{ és } \text{ha } \mathbf{x} \in \Gamma_1. \quad (58)$$

Az „inc” az incident-re, azaz beesőre, utal, míg a „scat” a scattered-re, azaz visszaverte. A (56), (57) és (58) formulák szemléletes értelme, hogy a két térrészt határoló felületet (azaz a cselló testét) teljesen merevnek határozzuk meg.

Tudjuk továbbá a korábbiakból, hogy

$$p_{teljes} = p_{inc} + p_{scat}, \text{ és } v_{teljes} = v_{inc} + v_{scat}. \quad (59)$$

A FEM-BEM szimuláció jelen implementációjában a FEM a node-okhoz (csomópontokhoz) rendel nyomásértékeket, míg a BEM a node-ok által definiált elemekhez. Az egyik eredményhalmazból a másik interpoláció segítségével meghatározható. Így három féle mennyiséget tudunk definiálni: \mathbf{p}_{in}^{node} ; \mathbf{q}^{elem} ; \mathbf{p}_{out}^{elem} , ahol a felső indexben azt jelöltem, hogy az adott mennyiség hol van értelmezve. A harmadik vektor az alábbiak szerint bontható föl:

¹ Emlékeztetésképp: a q a nyomás normális irányú deriváltját jelöli.

$$\mathbf{p}_{out}^{elem} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{F \rightarrow B} \cdot \mathbf{p}_{in}^{node} \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} \quad (60)$$

Ahol az \mathbf{A} egy FEM \rightarrow BEM interpolációs mátrix, a \mathbf{p}_l vektor pedig az f-nyílás felületét alkotó elemek nyomásértékeit tartalmazza (hiszen a (56) alapján a két módszer eredményinek meg kell egyezniük a Γ_2 peremen, ezt a folytonossági feltételt így biztosíthatjuk). Ez tehát azt jelenti, hogy egy $\mathbf{x} = [p_{in}^{node}; p_2^{elem}; q^{elem}]$ vektorra kell fölírunk egyenletrendszert.

Amennyiben kihasználjuk, hogy az Euler-egyenlet miatt $v_n = -\frac{q}{j\omega\rho}$, illetve a $\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}$ mátrixot egy $\mathbf{S}(\omega)$ mátrixszal helyettesítjük, akkor a (54) egyenlet a következők szerint írható:

$$\mathbf{S}(\omega)\mathbf{p}_{in} - \frac{1}{\rho}\mathbf{A}\mathbf{q} = 0. \quad (61)$$

Írjuk föl az egyenletrendszert:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S}(\omega) & 0 & -\frac{1}{\rho}\mathbf{A}\mathbf{A}^{B \rightarrow F} \\ \mathbf{H}'_1 & \mathbf{H}'_2 & -\mathbf{G} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{in}^{node} \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}^{elem} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = 0. \quad (62)$$

A \mathbf{H} mátrixot a csatolásnak megfelelően particionáltuk. Az \mathbf{x} vektor bizonyos elemei (q_{scat} vektor) ismertek (lásd (58)). Osszuk föl most annak függvényében 2 oszlopvektorra, hogy ismertek, vagy pedig ismeretlenek az elemértékek (nyilván a mátrixot is át kell particionálni):

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (63)$$

ebből az ismeretlen x_2 :

$$\mathbf{x}_2 = -\mathbf{D}_{22}^{-1}\mathbf{D}_{21}\mathbf{x}_1. \quad (64)$$

Észrevehetjük, hogy az \mathbf{S} mátrix frekvenciafüggő, így modális megoldásra nincs lehetőség, minden frekvenciára külön ki kell számolnunk a megoldást, majd a sajátfrekvenciákat ott kereshetjük, ahol a nyomásértékeknek maximumai vannak.

5.2.EREDMÉNYEK

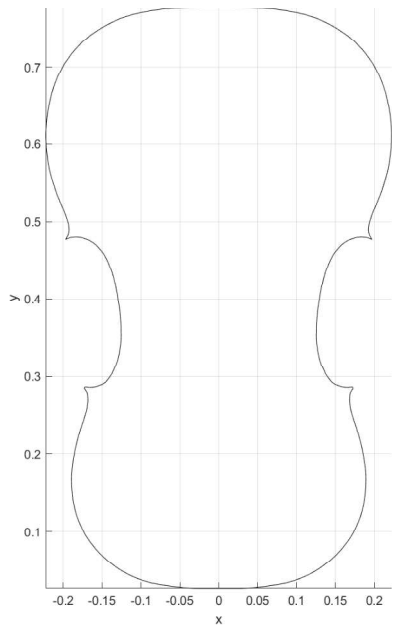
5.2.1.ZÁRT LÉGÜREG

A szimulációk első körében tehát teljesen zártként tekintettünk a légüregre, és a végeelem-módszer segítségével így kerestük a módusokat.

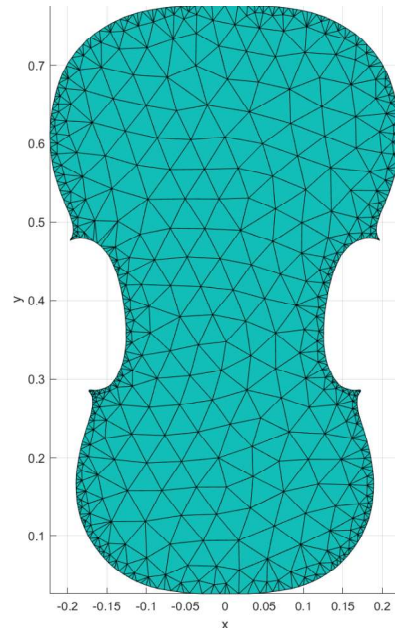
A vizsgált térfogatot a MatLab segítségével készítettem el. Cél volt, hogy egy, a korábbiakban vizsgálthoz hasonló instrumentum légüregét modellezem, így az EMA eljárás során is vizsgált hangszer átlagos paramétereit vettem alapul a modell elkészítéséhez.

Először az Inkscape nevű programmal egy, a csellót ábrázoló képet körülrajzoltam, így meghatároztam a későbbiekben csomópontokkal és elemekkel kitöltendő („mesh-elendő”)

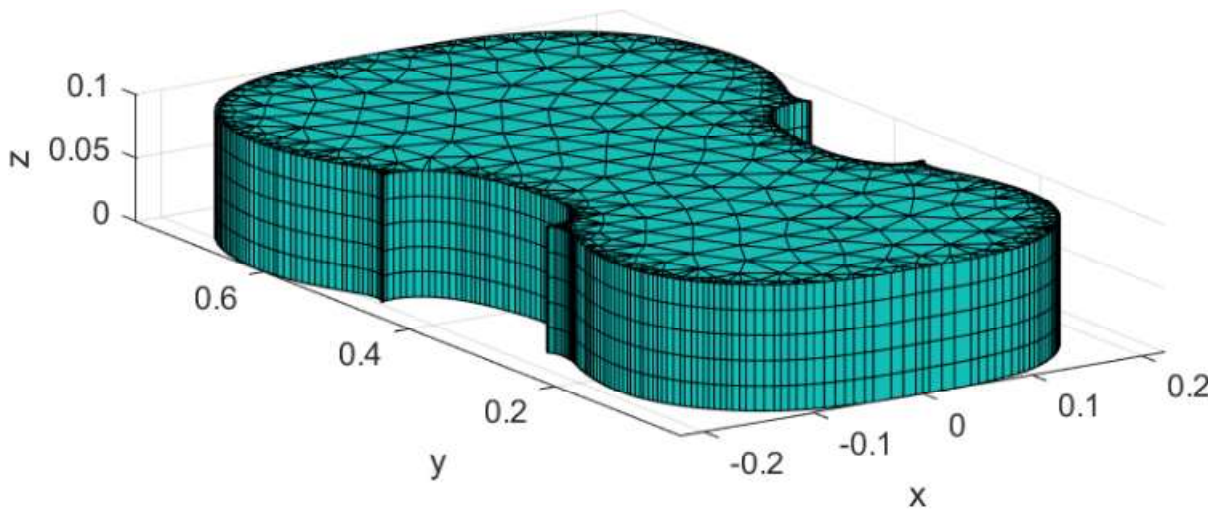
felületet. Ebből készítettem, egy olyan változatot is, ahol az f-nyílások körvonalait is meghatároztam (körberajzoltam) a BEM vizsgálatokhoz. Ezen ún. Bezier-görbékkel álló fájlokat '.eps' formátumban a MatLab-ba importálva, ott a Nihu-toolbox függvényeit már tudtam rá alkalmazni. A végeelem-modellt a `fill_polygon` függvénnyel hoztam létre, melyet ezután az `extrude_mesh.m` függvénnyel háromdimenzióban tudtam kiterjeszteni. Hogy a valóságnak jobban megfelelő modellt kapjak a légüregmodell elülső, és hátsó lemezekhez illeszkedő részeit ívelté tettem, mégpedig úgy, hogy a csomópontok helyvektorának z-koordinátáit egy szinuszos függvény szerint tettem helyfüggővé. A belső elemeket is arányosan nyújtottam, hogy az egyes elemek merevségi paraméterei közt ne legyen nagy eltérés. Az eredmények a **19. ábra** , **20. ábra** , **21. ábra** , **22. ábra** ábrákon láthatóak.



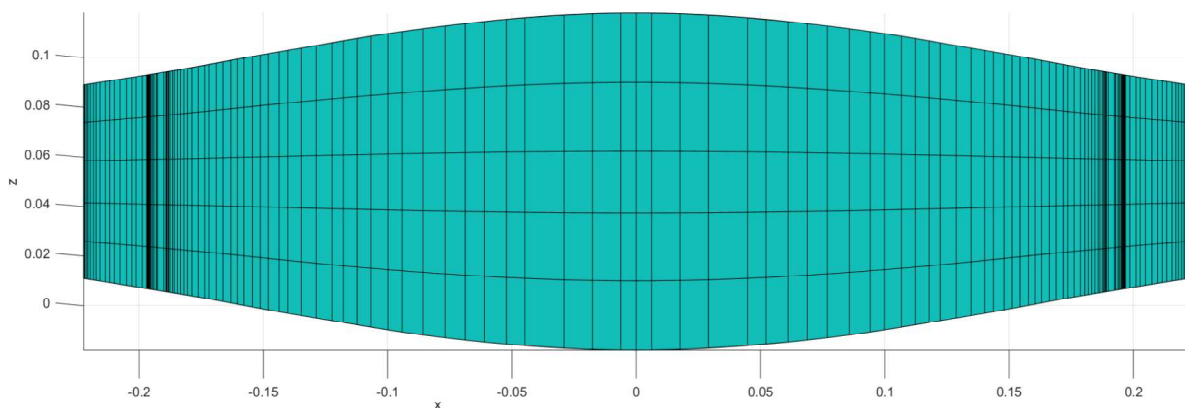
19. ábra: A hangszer peremének 2D - s körvonala



20. ábra: A 2D - s végelem - modell



21. ábra: A 3D - s végelem - modell



22. ábra: Az z - tengely mentén arányosan nyújtott modell

Ezután az M , illetve K mátrixokat a `model_mk()` függvénnyel, míg ebből a módusokat az `fe_modes()` függvénnyel tudtam számítani.

A szimulációt jellemző paraméter	Érték
hangsebesség c	$343 \frac{m}{s}$
a kitöltő közeg (levegő) sűrűsége	$1.2 \frac{kg}{m^3}$
a légüreg hossza a hosszanti tengely mentén	0.75 m
a légüreg átlagos mélysége	0.13 m

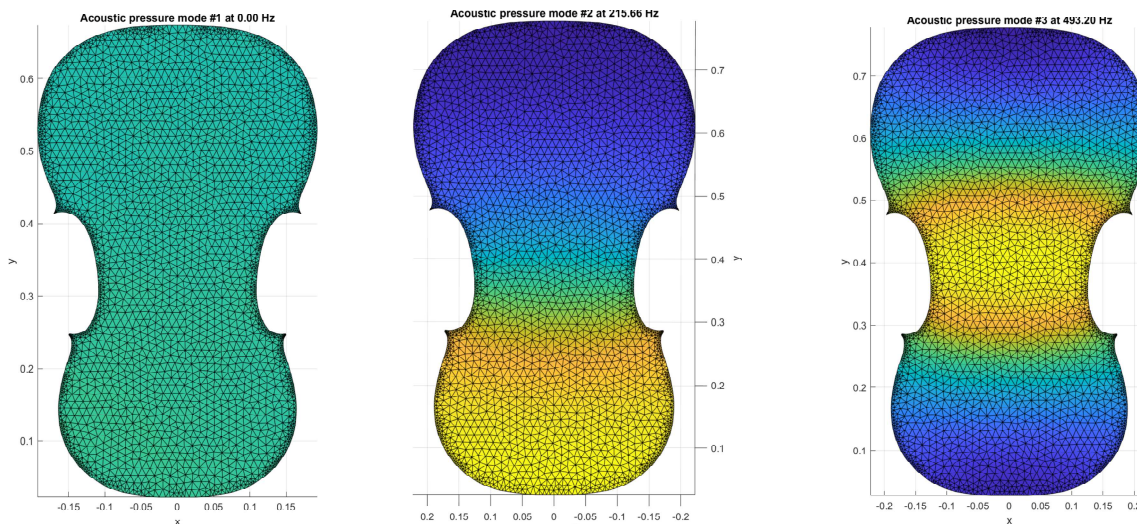
7. táblázat: A zártüreges szimuláció főbb jellemzői

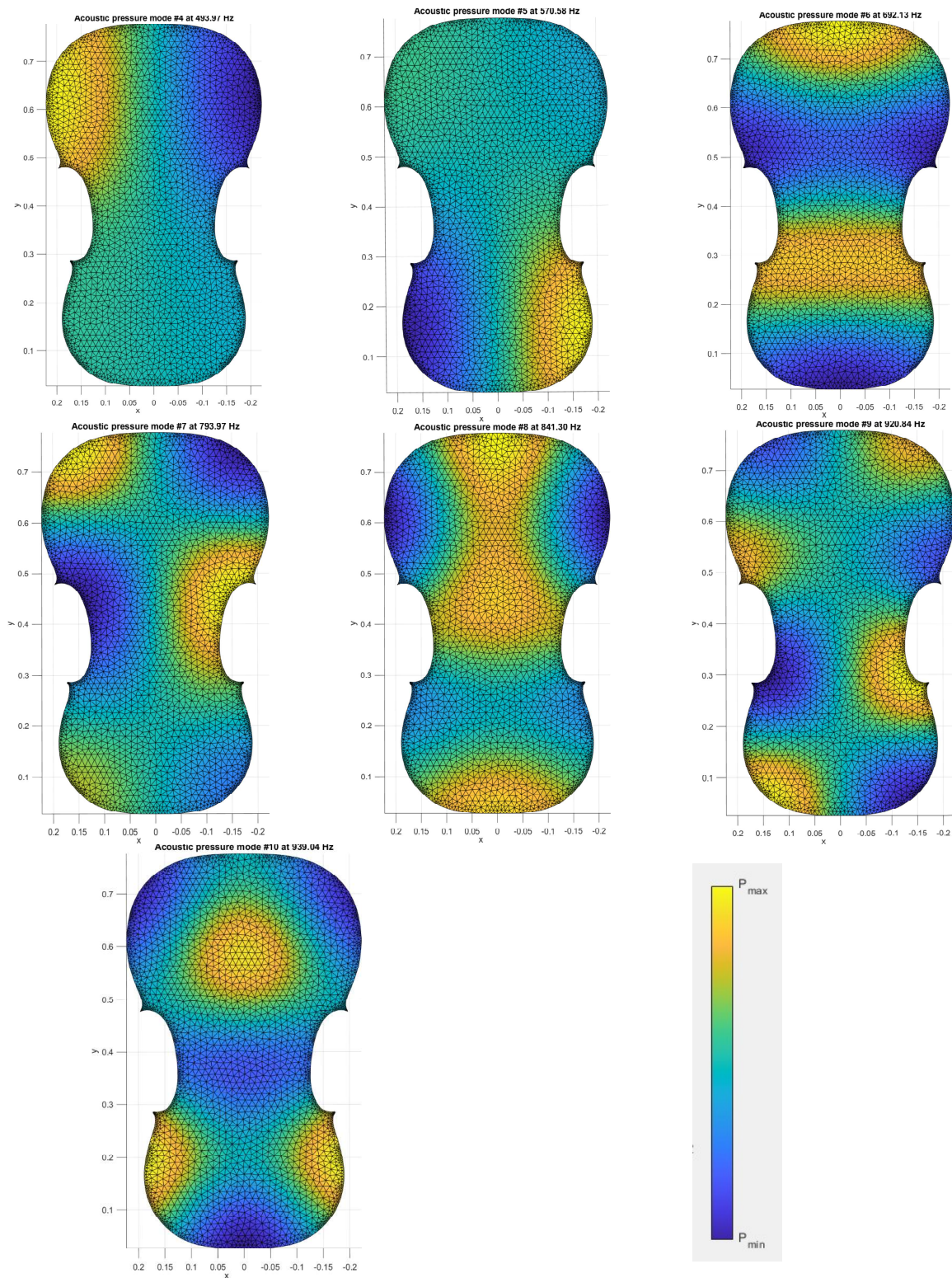
Az első 10 sajátfrekvencia az alábbiak szerint alakul.

$f_n [Hz];$
0
215.66
493.2
493.97
570.58
692.13
793.97
841.3
920.84
939.04

8. táblázat: Az első 10 sajátfrekvencia zártüreges esetben

Az alábbi táblázatban az első 10 módusalakot szemléltetem (azaz az akusztikai nyomás alakulását a légüregben az egyes sajátfrekvenciákon).





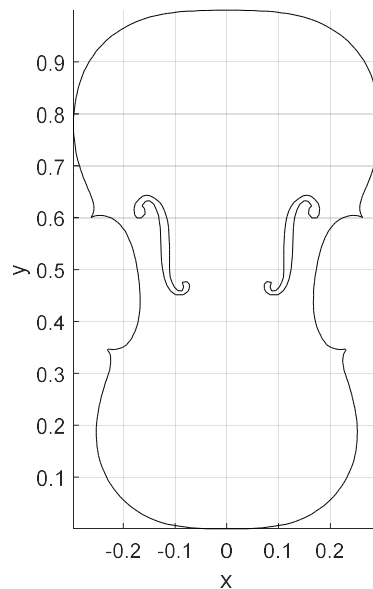
9. táblázat: A zárt légüreg első 10 módusának módusalakja

Szépén megfigyelhető, hogy az első módus 0 Hz-en a már korábban említett merevtestmódus, ahol a légüregben belül mindenhol konstans nyomás áll fenn. A további módusalakok esetében pedig a légüregben belüli nyomás a mellékelt színskálának megfelelően változik (emlékezzünk, hogy a módusalak, vagy más néven lengésképvektor egy sajátvektor, azaz annak saklárszorosa is az, így a minimális és maximális értékek tetszés szerint

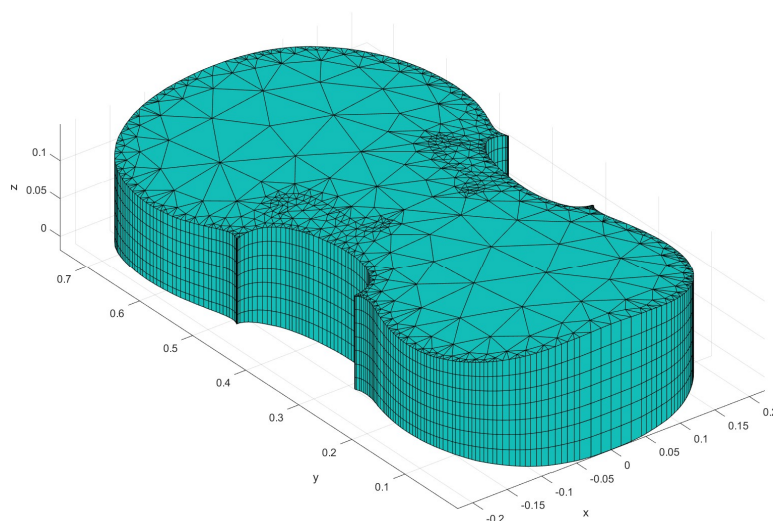
skálázhatóak). A módusalakok a csomóvonalak számával itt is azonosíthatóak. Például a harmadik módusalak 493 Hz-es frekvencián: (2,0).

5.2.2. NYITOTT LÉGÜREG

Amikor a légüreg a vizsgálatok során nyitottnak tekintettük, akkor ki kellett jelölni azt a felületet is, ahol a hangszer lesugározza a hangnyomást a külső, végtelen térbe. Ez a cselló esetében nyilvánvalóan a két f-nyílás. Így egy olyan .eps file-t is készíteni kellett az Inkscape programmal, ahol az f-nyílások határolóvonalait is berajzoltam. A háromdimenziós végelem-modell elkészítése jelen esetben is hasonló volt a korábban már ismertetetthez, így nem közlöm az összes lépést. A zárt légüreg modelljének elkészítéséhez képest különbség volt, hogy Bezier-görbék által határolt tartományból nem csak egy, hanem rögtön három is volt. Ezen tartományok végelem-modelljét külön-külön kellett készítenem el kétdimenzióban, majd a három különálló modellt a Nihu programcsomag `join_meshes` függvényével illesztettem egymáshoz.



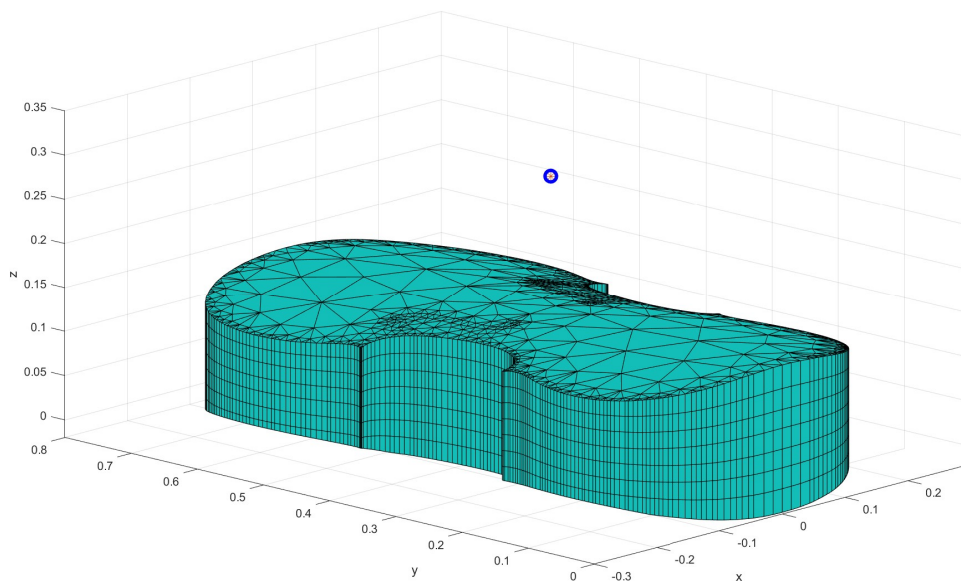
23. ábra: A körvonal az f-nyílásokkal együtt



24. ábra: A kész végelem - modell

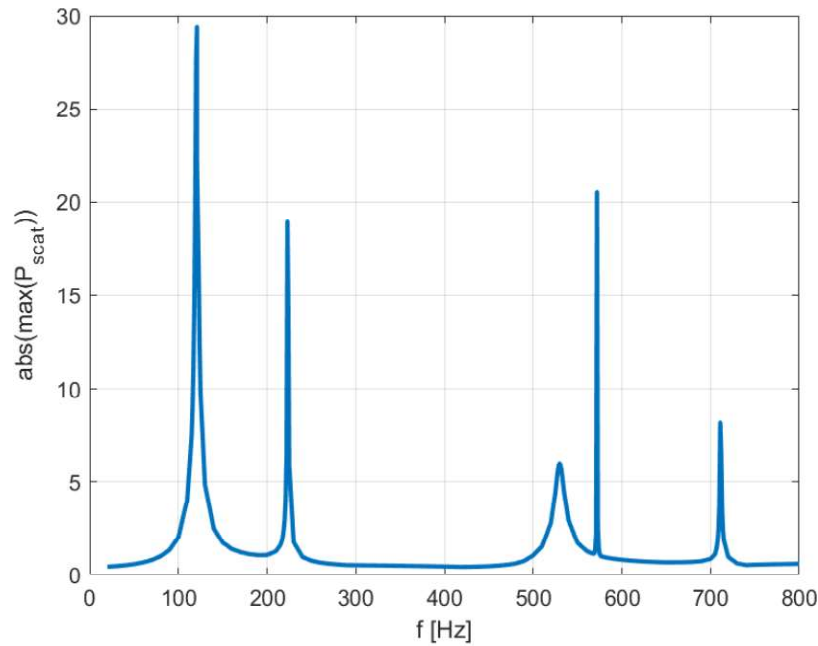
Szembeötlő különbség a két modell közt (20. ábra, ill.24. ábra), hogy az utóbbi esetben, amikor figyelembe vesszük a lesugárzást, jóval nagyobbak az elemek méretei, mint mikor eltekintünk ettől. Ennek oka, hogy a csatolt FEM-BEM módszer sokkal számítás-, illetve memóriaigényesebb folyamat (emlékezzünk: az (52) egyenletben fölírt G , ill. H mátrixok minden eleme tartalmaz értéket, ráadásul minden vizsgált frekvencián külön ki kell számítani őket), így ahhoz, hogy a szimulációt le tudjam futtatni, a vizsgált modell finomságát csökkenteni kellett.

Arra voltam kíváncsi, hogy a légüregben belül mely frekvenciákon alakulnak ki erős állóhullámok. Ehhez iteratív módon, 20 Hz-től 800 Hz-ig, 10 Hz-es lépésközzel minden frekvenciára kiszámoltam a (62) egyenletben ismertetett D mátrixot, majd innen a (64) egyenletben látott módon adódott a légüregben belüli csomópontok – visszavert térre – vonatkozó nyomásértéke (64 egyenletben: x_2 vektor). Ezen vektor maximuma egy indikátorként szolgált arra vonatkozóan, hogy amely frekvencián az értéke kiugróan magasabb, mint a környező frekvenciákon, ott a légüregben belül állóhullámok alakulnak ki. Hogy pontosabb értékeket kapjak, a csúcshullámok +/- 5 Hz-es környezetében nagyobb (1 Hz-es) pontossággal is kiszámoltam a fenti maximumértéket. Ezután a lesugárzást elég csak a kapott frekvenciákra számítani. A szimulációkat többször is lefuttattam a forrás különböző helyzetei esetén, azonban ennek a sajátfrekvenciák alakulására nincsen ráhatása, így a következőkben az eredményeket csak egy forráshelyzetre közlöm, ebben az esetben a pontforrást a hangszeren kívül, az f-nyílások fölött, azok közt helyeztem el (lásd 25. ábra).



25. ábra: A forrás elhelyezkedése a légüregben kívül (kékekkel jelölve)

A fenti módszer elvégzése után a 26. ábra látható amplitúdómenet adódik.



26. ábra: A nyitott légüreg amplitúdómenete

A diagramon tehát a frekvencia függvényében a légüregben belüli (visszavert) térnyomásának abszolútértékének maximumát ábrázoltam. Ebből már könnyen megállapítható, hogy hol lesznek a nyílt légüreg módusai a vizsgált 20 Hz-től 800 Hz-ig terjedő tartományban (a konkrét számértékeket lásd a **10.** táblázatban). A csúcsok alakjának milyenségéből következtethetünk arra, hogy az egyes frekvenciákon milyen hatékonysággal sugároz le a hangszer. Ezt két paraméter szabja meg, a csúcsok magassága, illetve a az adott csúcs szélessége. A **26.** ábra: A nyitott légüreg amplitúdómenete alapján azt várhatjuk, hogy a légüreg lesugárzása 121 Hz-en lesz a leghatékonyabb, mert az a csúcs a legmagasabb, és a legszélesebb is egyben.

<u>f_n [Hz];</u>
121
223
530
572
711

10. táblázat: A nyitott légüreg sajátfrekvenciái

Ezen sajátfrekvenciákra¹ érdemes most megvizsgálni, hogy hogyan alakul a nyomás eloszlása az üregeken belül (milyen jellegű állóhullámok alakulnak ki), illetve azon kívül.

Az üregeken kívüli nyomást úgy vizsgáltam, hogy létrehoztam egy végeelem-hálót a hangszer síkjával merőleges síkra (egyenlete: $y = 0.4$), a légüreg végeelem-hálóját metsző részt kivágtam belőle, így ki tudtam számítani, hogy az f -nyílások milyen nyomást sugároznak le a végtelen külső térbe.

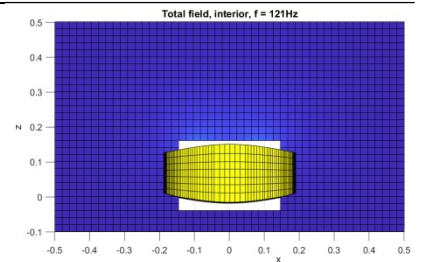
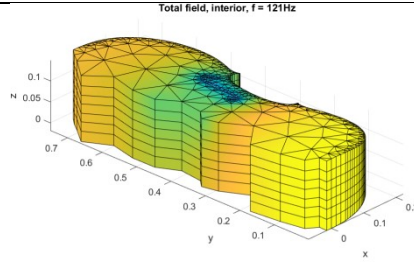
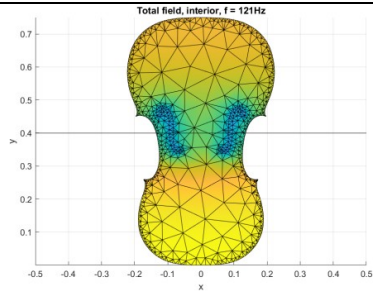
¹ A sajátfrekvencia egyébként nem pontos megfogalmazás, hiszen az arra utal, hogy egy sajátértékfeladat megoldásaként adódik, míg erről jelen esetben nincsen szó, itt a „sajátfrekvencia-voltát” indirekt úton határozzuk meg.

f_n
Hz

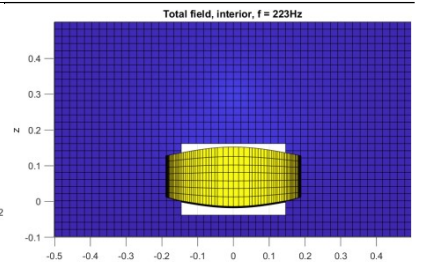
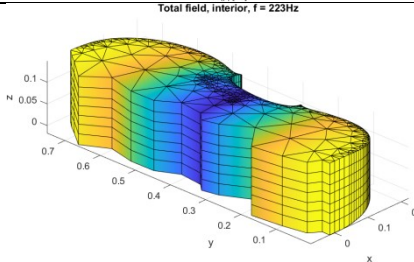
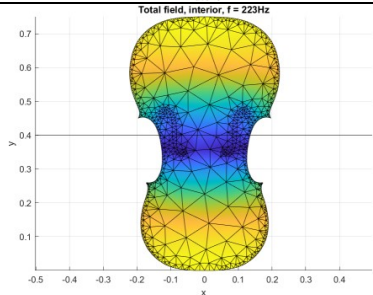
A légüregben belüli tér nyomáeloszlása

A lesugárzott tér nyomáeloszlása

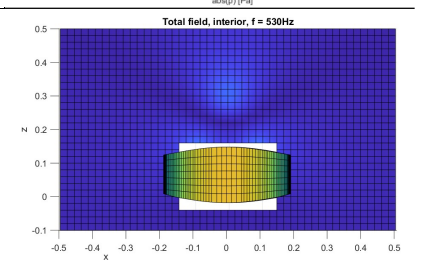
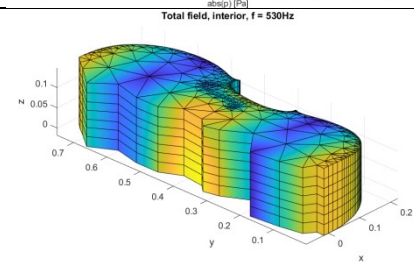
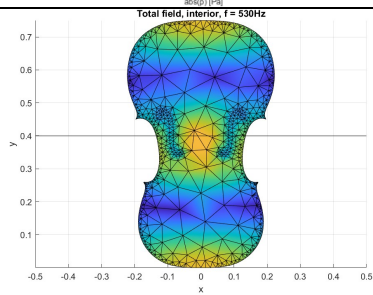
121



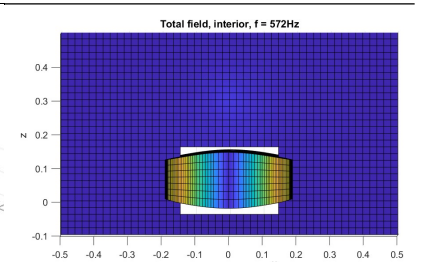
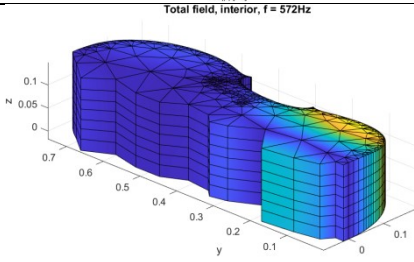
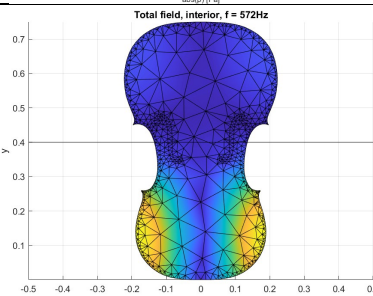
223

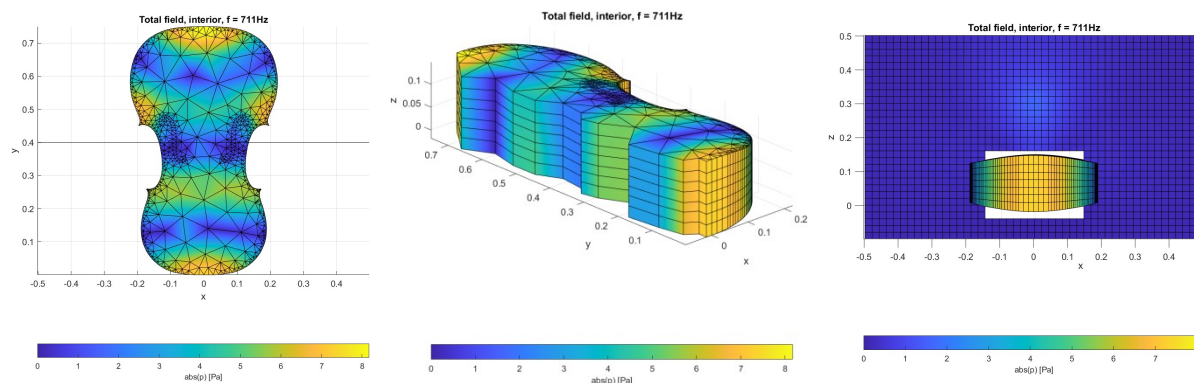


530



572





11. táblázat: A nyílt légüreges vizsgálat eredményei

Fontos, hogy a 11. táblázatban a nyomásértékek grafikus ábrázolása relatív, azaz úgy van skálázva, hogy az abszolút sárga területek az adott sajátfrekvencia maximális nyomású területeit jelentik, ezen maximális nyomásértékek pedig minden frekvencián különböznek (lásd 26. ábra).

Ha vetünk egy pillantást a 11. táblázat második oszlopában a lesugárzott tér nyomásviszonyaira, azt látjuk, hogy a légüregben belüli, és a légüregben kívüli nyomásértékek jelentősen különböznek. Az f -nyílások kis méretei miatt a légüregből lesugárzott nyomás nem jelentős. Megfigyelhető ezen kívül, hogy a különböző frekvenciákra a lesugárzási iránykarakterisztika is különbözik, azaz az egyes állóhullámoknál különböző irányba sugározza le az f -nyílás a nyomást a külső térbe, illetve ahol a f -nyílás környékére az állóhullámnak nullhelye esik, ott a lesugárzás mértéke nagyon alacsony.

Érdeemes még megfigyelni, hogy az állóhullámok alakjai közt nem jelenik meg olyan, ahol a hangszer hosszanti középvonala mentén 0 Pa a nyomás (azaz (0,1) módusalak). Ez lehetséges például azért, mert a forrást pontosan szimmetrikusan helyeztem el, így amennyiben egy ilyen állóhullám alak nullhelyére esik, akkor nem gerjeszti meg azt. Ez orvosolható például úgy, hogy a forrást aszimmetrikusan helyezzük el, azaz elmozgatjuk a $x = 0$ pozíciójából kissé jobbra, vagy balra. Ezt meg is tettem, és így is lefuttattam a szimulációkat, azonban nem kaptam más eredményeket, nem találtam meg olyan csúcsokat, melyeket a szimmetrikus forrással nem tudtam meggerjeszteni. (Igaz, hogy az 572 Hz-en megjelenő állóhullámkép, akár felfogható (0,1) alaknak is.)

Ha összehasonlítjuk a nyitott, illetve a zártnak föltételezett légüregek sajátfrekvenciáit, szembeötlő különbség, hogy az első nem 0 frekvenciás módus jóval alacsonyabbra kerül (216 Hz vs. 121 Hz), azonban ez pontosan az amit, várunk, hiszen a nyílt légüregnek a frekvenciákat lefelé kell „elcsúsztatnia”, vagy másképpen a légüreg lezárásának a frekvenciákat fölfelé kell „eltolnia”, ugyanis a lezárás merevebb peremfeltételeknek felel meg. 0 Hz frekvencián a nyitott légüreg esetében is konstans nyomás alakul ki az üregben belül, ezt a 11. táblázatban külön nem ábrázoltam.

A kapott eredményekről itt is elmondhatjuk, hogy a várakozásainknak megfelelnek, hiszen az állóhullámok olyan frekvenciákon alakulnak ki, ahol a hangszer a gyakorlatban is megszólaltatják, látható nehézség azonban a zárt légüreghez képest, hogy mivel a megoldás frekvenciafüggő, a módusok meghatározására csak indirekt módon, gerjesztés segítségével

van lehetőség, így ez az eredmények számítása, illetve értékelése során jelentős bizonytalanságot jelent.

A szakirodalomban, amikor vonós hangszer légüreg vizsgálatára kerül sor, általában hegedűt vesznek vizsgálat tárgyául, azonban a [7] forrásban ismertetik egy cselló ilyen jellegű (kísérleti úton történő) vizsgálatának eredményeit is, így lehetőség van az eredmények összevetésére. A forrás tanulsága szerint a Helmholtz-módus (melyet mi 121 Hz-en találtunk meg) 104 Hz-en jelenik meg; ez nem jelentős eltérés. Az (1,0) módus 226 Hz-en, míg a (2,0) módus 547 Hz-en és a (3,0) módus 742 Hz-en jelenik meg. Ezek hozzávetőlegesen mind megfelelnek az én eredményeimnek, azonban a (0,1) módust mi 572 Hz-en, míg a [7]-ben 496 Hz-en találják meg (lásd 12. táblázat). Összevetve, a megtalált módusalakok frekvenciái hozzávetőlegesen megegyeznek egymással, így ezzel vizsgálataim helyessége igazolható.

Szimuláció eredményei [Hz]	Csomóvonal-koordináták	[7] forrás eredményei [Hz]
121	0,0	104
223	1,0	226
530	2,0	547
572	0,1	496
711	3,0	742

12. táblázat: A szimulációval kapott eredmények összehasonlítása kísérleti úton adódó eredményekkel

A rezonáns lap vizsgálatával ellentétben a légüreg vizsgálatokor csak a számítógépes szimulációkra hagyatkoztam, melynek során a módszer nagy számítási-igénye miatt nem tudtam tetszőlegesen pontosan elvégezni a vizsgálatokat (lásd elemméret kérdése), míg gyakorlatban, kísérleti úton egyáltalán nem vizsgáltam a légüreg működését. Ez a későbbiekben a vizsgálatok továbbhaladásának egy lehetséges iránya lehet, hiszen így a számítással megkapott eredmények pontosságát mérési úton is igazolni tudnám saját mérési eredményekkel, illetve ott akár pontosabb eredményeket is kaphatnék, vagy olyan sajátfrekvenciákat is megtalálhatnék melyeket ezzel a módszerrel nem sikerült.

6. FEJEZET

VÉGSZÓ

Szakedolgozatom írása során sikerült megismerkednem a cselló főbb részeinek akusztikai illetve rezgéstani tulajdonságaival, azokat kísérleti illetve számítógépes úton is vizsgálni tudtam. A vizsgált modellt minden esetben sikerült úgy fölállítani, hogy az a hangszer valódi működését jól modellezze, így képes voltam a valósághoz közeli, a tapasztalatoknak megfelelő eredményeket kapni. Ahol a kapott eredmények mégis kisebb magyarázatra szorulnak (pl. a szerkezeti-FEM esetén), ott is sikerült rájönni, hogy az eltéréseket mi okozza, így ezeket a körülményeket megfontolva, a vizsgálatokba a későbbiekben beépítve ezen esetekben is kaphatunk a várakozásoknak jobban megfelelő eredményeket.

Ezenkívül munkám során sikerült megismerkednem a mérnöki gyakorlatban, az összetett mechanikai, illetve akusztikai struktúrák jellemzésére és vizsgálatára használatos numerikus módszerekkel, és azon matematikai háttérrel is, mely ezen módszerek mögött húzódik.

A diszciplínának szintén fontos részét képezi a valóságban is realizált rezgő struktúrák vizsgálata, melynek egyik bevett módszerét, a kísérleti móduselemzést, munkám során megismerhettem, és a gyakorlatban is alkalmazhattam.

Vizsgálataim mindkét tárgyában van lehetőség a továbbhaladásra, a modellek további fejlesztésére, ill. finomítására, ezenkívül a hangszernek még sok-sok olyan része van (pl. lélekfa, vagy híd), melyek önmagukban is vizsgálhatóak, illetve ezen részek szimulációja ezután egymással is összeköthető. Hiszen ne feledjük, a gordonka szavát nem egyik, vagy másik rész hozza létre egyedül, hanem minden egyes elem, még a legapróbb is kiveszi a részét annak megalkotásából, melyet sokan az emberi hanghoz legközelebbi zeneszóként tartanak számon.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Fiala Péter: Móduselemzés, Egyetemi jegyzet, 2012 Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Villamosmérnöki Kar
<https://last.hit.bme.hu/sites/default/files/documents/modus.pdf>
Utolsó hozzáférés: 2021. november 29.
- [2] Dr. Csernák Gábor, Dr. Stépán Gábor: A műszaki rezgésstan alapjai, Egyetemi jegyzet, 2012, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar
<https://docplayer.hu/17024075-A-muszaki-rezgestan-alapjai.html>
Utolsó hozzáférés: 2021. november 29.
- [3] Fiala Péter: A hangszerek fizikája, Egyetemi jegyzet, 2015, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Villamosmérnöki Kar
- [4] Ye Lu: Comparison of Finite Element Method and Modal Analysis of Violin Top Plate, Thesis, 2013, McGill University, Schulich School of Music
http://www.music.mcgill.ca/caml/lib/exe/fetch.php?media=publications:ma_lu_2013.pdf Utolsó hozzáférés: 2021. november 29.
- [5] Rucz Péter: Theoretical acoustics, Egyetemi jegyzet, 2018 Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Villamosmérnöki Kar
- [6] Dr. Lengyel Ákos József: Lineáris rugalmasságtan, Egyetemi jegyzet, Miskolci Egyetem
http://www.mech.uni-miskolc.hu/~lengyel/education/letoltheto/Rugalmassagtan_2.pdf
Utolsó hozzáférés: 2021. november 29.
- [7] Neville H. Fletcher, Thomas D. Rossing: The Physics of Musical Instruments 2nd edition, 1998, Springer
- [8] Tóth Barnabás: Hangszerismeret, Egyetemi jegyzet Mezei János okl. hegedűkészítő mester előadásai alapján, 2021, Liszt Ferenc Zeneművészeti Egyetem
- [9] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu: The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals sixth edition, 2005, Elsevier Butterworth-Heinemann
- [10] Jenei-Kulcsár Dóra: Zongorahang fizikai alapú modellezése, Szakdolgozat, 2016, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Villamosmérnöki Kar

MÁSHONNAN ÁTVETT KÉPEK JEGYZÉKE

- [1] Omnia Ashmolen Museum. [Online][Hivatkozva: 25. október 2021.][https://www.omnia.ie/index.php?navigation_function=2&navigation_item=%2F09102%2F MINIM UK 31674&repid=1](https://www.omnia.ie/index.php?navigation_function=2&navigation_item=%2F09102%2F%20MINIM%20UK%2031674&repid=1)
- [2] The Met. [Online][Hivatkozva: 25. október 2021.]<https://www.metmuseum.org/art/collection/search/504476>
- [3] **WaddleJohn**ResearchGate. [Online][Hivatkozva: 25. október 2021.][https://www.researchgate.net/figure/Figures-1-2-1-Schematic-shows-front-and-side-views-of-a-typical-violin-The-spruce fig4 12962935](https://www.researchgate.net/figure/Figures-1-2-1-Schematic-shows-front-and-side-views-of-a-typical-violin-The-spruce_fig4_12962935)