



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

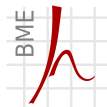
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Híradástechnikai Tanszék

Diszperz hűrok modellezése végeelem módszerrel

TDK DOLGOZAT

Készítette
Horváth Máté

Konzulens
Rucz Péter



Híradástechnikai Tanszék

2012. október 26.

Tartalomjegyzék

Kivonat	5
Abstract	7
1. Bevezetés	9
1.1. Irodalmi áttekintés	9
1.2. Motiváció	10
2. A húr fizikája	11
2.1. Ideális pengettett húr rezgései	11
2.2. Csillapított ideális húr	13
2.2.1. Viszkózus csillapítás	13
2.2.2. Elasztikus veszteség	13
2.2.3. Nemideális lezárás	13
2.2.4. Módosított egyenlet	14
2.3. Hajlító rezgések	14
2.4. Merev húr mozgásegyenlete	15
2.5. Merev, csillapított húr mozgásegyenlete	16
3. A végelem módszer	17
3.1. Alapok	17
3.2. Az ideális, csillapított húr végelem modellje	18
3.2.1. A gyenge alak	18
3.2.2. Közelítés	18
3.2.3. Térbeli diszkretizáció	19
3.2.4. Időbeli diszkretizáció	20
3.3. A nemideális húr végelem modellje	20
3.4. Kényszerek és peremfeltételek	21
3.5. Alakfüggvények a nemideális modellben	22
3.6. Kezdeti elmozdulás meghatározása	23
4. Eredmények	25
4.1. Az ideális húr	25
4.1.1. Összehasonlítás az analitikus megoldással	25
4.1.2. Az ideális húrmodell eredményei	26
4.2. A véges merevségű, nemideális húr	27
4.3. Eredmények értékelése, kitekintés	28

5. Összegzés	31
Irodalomjegyzék	33
Forrásfájlok	35

Kivonat

A hangszerek fontos csoportját képezik a kordofonok, melyek esetében a hangkeltést megfejtett húrok gerjesztésével érjük el. Ez többféleképpen lehetséges, például a húr vonásával, ütésével, vagy pengetésével. Jelen dolgozatban elsősorban az utóbbi gerjesztési módra koncentrálunk. A húros hangszerekre általánosan jellemző, hogy a húr rezgési energiájából nem közvetlen úton keletkezik hang, hanem – eltekintve az elektromos hangszerektől – a húr rezgésbe hozza a hangszer testét, a hanglesugárzás pedig döntően a hangszertestről történik. A lesugárzott hang fizikai szimulációjához ezért az első és legfontosabb lépés a húrok rezgésének számítása.

Hangkeltéskor a valóságos húrokban kialakuló rezgésalakok kiszámítása bonyolult feladat, csak ideális esetben, durva elhanyagolásokkal számíthatóak ki analitikusan a megjelenő rezgésformák. Ezért, ha figyelembe kívánjuk venni a húrok valóságos, nemideális jellemzőit is, le kell mondanunk az analitikus megoldásról, mivel az inhomogenitás, nem ideális lezárások, diszperzió, frekvenciafüggő csillapítás stb. együttes figyelembevételével a rendszert leíró egyenletek megoldása nem fejezhető ki analitikusan.

A numerikus technikák az analitikus módszerekkel szemben a fizikai egyenletek közelítő megoldásait keresik, az elérhető pontosság csak a fizikai modell részletességének és a rendelkezésre álló számítási kapacitásnak a függvénye. A problémát ebben a dolgozatban a végelem módszer segítségével vizsgáljuk, mely a véges tartományon felírt parciális differenciálegyenletek peremérték-feladatainak megoldására szolgáló numerikus eljárás. Ezeket a peremérték-feladatokat munkánk során az időtartományban oldjuk meg.

A valóságos húrok igen fontos nemideális tulajdonsága a diszperzió, mely a húr merevségéből fakad. Ez azt jelenti, hogy a húrban megjelenő rezgésalakok nem tisztán transzverzálisak, hanem hajlító hullámokat is tartalmaznak. A diszperzió következtében a húrban a hullámok terjedési sebessége frekvenciafüggő, így a húr módusaira is az inharmonicitás jellemző. A dolgozat célja a húr viselkedésének minél pontosabb szimulációja a diszperzió figyelembevételével.

A dolgozatban ismertetésre kerül a pengetett húr fizikai modellje, majd ennek végelem módszerrel történő leírása. Bemutatásra kerülnek az ideális és nemideális húr végelem modellje közti különbségek. Ezt követően a peremérték-feladat időtartománybeli megoldásának lépéseit részletezzük. Az ideális és nemideális húrok modellezésével kapott eredményeket analitikusan számított és mért adatokkal hasonlítjuk össze.

Abstract

Chordophones form an important group among musical instruments. In their case sound is produced by the excitation of an intense string. This can be achieved in various ways such as bowing, striking, or plucking. This thesis focuses mainly on the latter means of excitation. It is characteristic of chordophones that sound is not produced in a direct manner from the mechanical energy of the string, yet (except electrical instruments) the string excites the body of the instrument and the body becomes the primary source of sound radiation. The first step that must be taken to be able to physically simulate this sound generation mechanism is therefore to calculate the vibration of the string.

Calculating the vibration shapes of real strings is a complex problem, an analytic solution can only be obtained in the ideal case, applying rough estimations and neglects. If the non-ideal attributes of real strings are to be taken into consideration, analytic methods have to be given up on, as by taking inhomogeneity, non-ideal terminations, dispersion, frequency dependent damping etc. into account at once, the resulting set of equations would be too cumbersome to solve in an analytic manner.

In numerical analysis, contrary to the analytic methodology, an approximate solution of the physical system is sought; hence the achievable accuracy depends only on the precision of the model and the computational capacity at hand. In this work the problem is examined by means of the finite element method, which is a numerical method for solving boundary value problems of differential equations in a finite domain. These boundary value problems are to be solved in the time domain herein.

An important attribute of real strings is dispersion due to their finite stiffness. This means that vibration shapes are not purely transversal, but contain bending wave components as well. As a result of dispersion, wave velocity inside the string becomes frequency dependent, yielding inharmonic string modes. The goal of this thesis is the accurate modeling of string behavior taking dispersion into account.

First, the physical model of plucked strings and important aspects of their finite element representation are described. Then differences between the ideal and real string model are examined. Afterwards, the time-stepping solution of the boundary value problem is discussed in detail. Finally, simulation results of ideal and non-ideal strings are presented and compared against analytically calculated and measured data.

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Irodalmi áttekintés

Egyetemünk Villamosmérnöki és Informatikai Karán már többen foglalkoztak a húrmodellezés témájával (zongorahang-szintézis, gitár véges differencia modell), ezek a dolgozatok nagyban segítették munkánkat és hozzájárultak ahhoz, hogy új szemszögből tudjuk vizsgálni a problémát. Az alábbiakban a teljesség igénye nélkül összefoglaljuk azokat a műveket, melyek kutatásunk kiindulópontjaiként szolgáltak és különböző szempontok szerint közelítik meg a húr modellezésének problémáját.

Rácz Zsuzsanna Zsófia „Nemideális húrok csatolt rendszerben” című dolgozata [9] hurok húrlábon keresztül megvalósuló csatolását vizsgálja. Munkájában véges-differencia és végeselem modellel szimulálta az inhomogén eloszlású húrokat, melyeknél a nemidealitás a húr térbeli sűrűségeloszlásának véletlenszerűségeként jelenik meg. Ebben a modellben a húr nemideális lezárását jelenti a rúdelemekből megépített húrláb jelenti, melyhez több húr is kapcsolódik.

Miguel Marques „On the Dynamical Behaviour of Worn Guitar Strings” című 2012-es konferenciacikke [8] a húr kopásának módusfrekvenciákra és -alakokra gyakorolt hatását szemlélteti. Hasonlóan az előbb említett TDK dolgozathoz, a húr kopásból fakadó nemidealitása a bundoknál megjelenő hozzáadott tömegként, vagyis a sűrűség lokális perturbációjaként jelenik meg. A fenti két mű egyike sem veszi figyelembe a diszperzió jelenségét, mely elhanyagolás jelentős eltéréseket eredményezhet. Ennek tekintetében kutatásunk egyik igen fontos célja a diszperzió figyelembe vétele a modellalkotásban, illetve hatásának megmutatása a modell által szolgáltatott eredmények tükrében.

Bank Balázs „Physics-Based Sound Synthesis of the Piano” című diplomamunkájában [1] egy zongora teljes waveguide-modellje kerül bemutatásra. Részletesen foglalkozik az inharmonicitás jelenségével, munkánk egyik célja az ebben a témában megfogalmazott problémák vizsgálata volt. A waveguide modell alapértelmezésben késleltető egységek sorából épül fel, melyeken az adott hullámalak egységes csoportsebességgel terjedhet. A diszperzió beépítése a waveguide rendszerbe nem triviális feladat, a frekvenciafüggő késleltetések a húr lezárásánál szűrőkkel vagy törtrész-késleltetőkkel modellezhetőek.

A fizikai hangszintézis módszereinek részletes tárgyalását és az előző bekezdésben tárgyalt zongoramodell továbbfejlesztését tartalmazza Bank Balázs „Physics-based Sound Synthesis of String Instruments Including Geometric Nonlinearities” doktori disszertációja [2]. Ez a mű részletesen foglalkozik a zongora hangkeltésének modellezésével, a waveguide technika kiegészítésének lehetőségeivel.

1.2. Motiváció

Jelen dolgozat megírását a húr mozgásának megértése és annak minél pontosabb fizikai alapú szimulációja motiválta. A húros hangszereket azok megszólaltatása szerint osztályozhatjuk, léteznek ütős, vonós, és pengetős hangszerek. Kutatásunk során a pontszerűen megpengetett húr szimulációját tűztük ki célként.

A hangszerek hangkeltésének modellezése többféle módon történhet. Kedvelt módszer például az előre felvett hangminták különféle algoritmusokkal való megváltoztatásával történő szintetizálás, melynek nincs elvi kapcsolata a hangszer működésének mechanizmusával. Ezzel szemben a fizikai alapú hangszintézis lényege, hogy a valóságos hangszer viselkedését igyekszik modellezni, kiemelt figyelemmel kezelve annak a hangkeltés szempontjából kulcsfontosságú aspektusait. A munka során egy a későbbiekben erre alkalmas modell létrehozása volt a cél. A fizikai alapú szimuláció hátránya, hogy alkalmazása egy adott rendszerre korlátozódik, számításigénye sokszorosa a tradicionális technikáknak. Munkánk során komoly megfontolásokat kellett tennünk, hogy felmérjük, mely tulajdonságok játszanak fontos szerepet a hangkeltésben, és melyek elhanyagolhatóak, annak érdekében, hogy a modellt ne lassítsák a végeredmény szempontjából lényegtelen komponensek.

Jóllehet az ideális húr homogén és tökéletesen rugalmas, a valóságban előforduló húrok tömegeloszlása nem állandó, valamint merevségük sem zérus. Ez utóbbi következménye a diszperzió, mely azt jelenti, hogy a különböző frekvenciájú hullámok különböző sebességgel terjednek a húron, a húr módusai pedig inharmonikusá válnak. Az inharmonicitás modellezése nem triviális feladat, jelen dolgozatban a diszperzióval, mint a húros hangszerek hangkeltésének alapvető sajátosságával kiemelten foglalkozunk. A jelenség modellezéséhez a végelem módszert hívtuk segítségül, mivel más módszerekben (például waveguide modellezés esetén) a diszperzió leírása meglehetősen bonyolult feladat.

A következő fejezetben a húr rezgésének fizikai leírásáról lesz szó. Részletesen bemutatásra kerülnek a húr mozgását leíró összefüggések, az alapvető hullámegyenletről kezdve a nemideális, csillapított húrig. A haramadik fejezetben a végelem módszert és annak problémánk esetében történő alkalmazhatóságát ismertetjük. Szó lesz az alkalmazandó alakfüggvényekről, az egyenletek diszkretizálásáról, az elemmátrixok előállításáról valamint a kényszerfeltételek és kezdeti érték feltételek meghatározásáról. A negyedik fejezetben először a húr ideális modelljét vizsgáljuk, majd összehasonlítjuk az analitikus megoldással. Ezt követően kerül sor a nemideális modellre, a szimuláció felépítéseinek lépéseit, és a kész program működését ismertetjük. Végül az utolsó fejezetben számot adunk az eredményekről, értékeljük a tapasztalatokat, és körvonalazzuk a további kutatás lehetséges területeit. A dolgozat végén elhelyezett függelékben bemutatjuk a szimuláció megvalósításához használt Matlab forrásfájlokat.

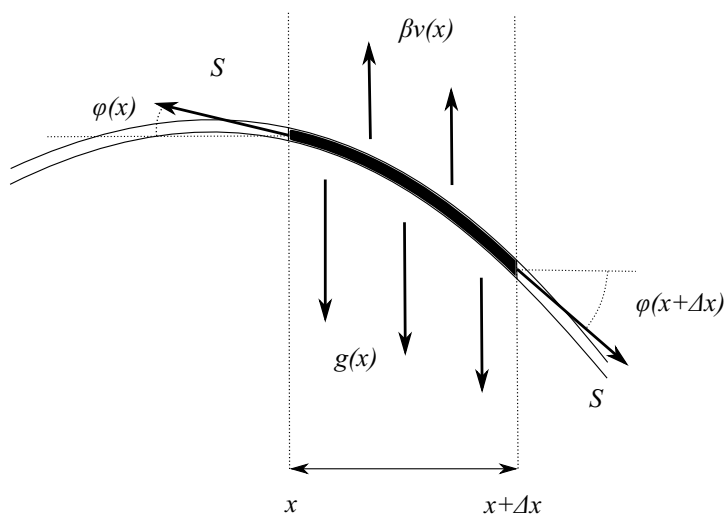
2. fejezet

A húr fizikája

A dolgozatban a kordofon hangszerek legfontosabb közös alkotóelemének, a húrnak mozgásával foglalkozunk, a hangszer többi részének vizsgálatától eltekintünk. A húr hossza, valamint a rajta fellépő rezgések hullámhossza nagyságrendekkel nagyobb a hosszirányra merőleges kiterjedésénél, valamint a rajta véghezvitt kitérésnél. Amennyiben ideális húrról beszélünk, feltesszük, hogy tökéletesen rugalmas, és az infinitezimálisan kicsiny húr-elemek tömege azonos a húr mentén. Esetünkben így egydimenziós, folytonos rendszerrel beszélhetünk.

2.1. Ideális pengettett húr rezgései

Vizsgáljuk a húr kicsiny x és $x + \Delta x$ közötti szakaszán fellépő erőket. A $g(x)$ gerjesztéssel megpendített húrt az érintő irányú S feszítő erő téríti vissza kiindulási helyzetébe. Az S erő az x helyen φ , az $x + \Delta x$ helyen pedig $\varphi + \Delta\phi$ szöget zár be a vízszintessel. A 2.1. ábrán látható elrendezés miatt a feszítő erő transzverzális irányú komponense a Δx hosszúságú húrdarab bal oldalán az egységnyi hosszra ható $g(x)$ gerjesztőerővel ellentétes, míg a jobb oldalon azzal megegyező irányú. A levezetésben a [6] és [5] forrásokra támaszkodunk.



2.1. ábra. A húron fellépő erők

Alkalmazzuk Newton második törvényét a húrelemre:

$$g(x)\Delta x + S[\sin \varphi(x + \Delta x) - \sin \varphi(x)] = \mu x a(x), \quad (2.1)$$

ahol μ a húr hosszegységre eső tömege, a pedig a húr x helyen vett gyorsulása. A kis szögelfordulás esetén érvényes $\sin \varphi \approx \varphi$ közelítésekkel élve, az egyenletet Δx -szel osztva, valamint a $\Delta x \rightarrow 0$ határátmenetet elvégezve:

$$g(x) + S \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \Delta x \mu a(x). \quad (2.2)$$

További összefüggés kis szögelfordulás esetén, hogy $\varphi \approx \tan \varphi(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x}$, ezt a (2.2)-be helyettesítve, a sebességet a kitérés idő szerinti második deriváltjaként kifejezve a transzverzális hullámok terjedésének leírására az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

ahol $c = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$ a húrban terjedő transzverzális irányú kitéréshullám terjedési sebessége.

A (2.3) megoldását d'Alambert az

$$u(x) = f_1(ct - x) + f_2(ct + x) \quad (2.4)$$

alakban, vagyis két azonos sebességgel ellentétes irányban haladó tetszőleges hullámalak (rendre f_1 és f_2) szuperpozíciójaként adta meg. Az ideális lezárás azt a feltételt jelenti, hogy a kitérés a húr mindkét végén zérus, vagyis $u(x = 0) = 0$, illetve $u(x = L) = 0$. Amennyiben a véges húrt zéró kezdeti sebességről engedjük el, akkor az előálló rezgésalak két olyan hullám összege lesz, melyek azonos sebességgel ellentétes irányban mozognak, amplitúdójuk pedig a szuperponált hullámalak kezdeti kitérésének fele. A húrban fellépő összes rezgésalak felírható a teljes függvényrendszert alkotó módusalakok lineáris kombinációjaként. Az $u_n(x) = \sin k_n x$ módusalakokat

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n \cos(\omega_n t + \vartheta_n) \quad (2.5)$$

formában összegezzük, ahol A_n az n -edik módus amplitúdója, $k_n = \frac{n\pi}{L}$ a hullámszáma, ω_n a körfrekvenciája, ϑ_n pedig a fázisa. A kapott rezgésalak burkolója a kezdeti húrpozíció által kifeszített parallelogramma.

A felharmonikusok¹ súlyát L hosszúságú húr esetén az

$$U_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin k_n x \, dx = \frac{2L^2}{\pi^2 x_0(L - x_0)} \frac{1}{n^2} \sin k_n x_0 \quad (2.6)$$

összefüggés segítségével kapjuk meg. A módusok amplitúdója négyzetesen csökken, a trigonometrikus tag miatt pedig az egységnyi hosszúságú, $\frac{1}{x}$ -énél megpengetett húr, minden $n \cdot x$ -edik módusa hiányzik a spektrumból.

¹Mivel ideális húrban a módusfrekvenciák harmonikusak, így joggal beszélhetünk felharmonikusokról a módusok helyett.

2.2. Csillapított ideális húr

A húrok csillapítása általánosságban három fizikai jelenségből adódik: viszkózus csillapításból, elasztikus veszteségből és nemideális lezárások miatt.

2.2.1. Viszkózus csillapítás

A rezgő húr nem jó hangsugárzó, azaz önmagában csak alacson hatásfokkal képes hangteljesítmény átadására. Ennek oka, hogy a húr dipól forrásként viselkedik, mozgása közben az előtte lévő levegőt összenyomja, a mögötte hagyott levegőben ritkulást idéz elő, ám sugara olyan kicsi, hogy ezek a hatások gyakorlatilag kiegyenlítik egymást. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a húrnak levegővel való érintkezésének hatása, a surlódás elhanyagolható lenne. A húr körül fellépő viszkózus levegőáramlás esetünkben a csillapítás fő kiváltó oka.

Stokes szerint a húrban fellépő erőnek két komponense van, az egyik egy hozzáadott tömegszerű teher, mely a modális frekvenciákat enyhén csökkenti, a másik az amplitúdóban okoz exponenciális csökkenést. Az L hosszúságú, r sugarú, v sebességgel mozgó kör keresztmetszetű testre ható viszkózus erő f frekvencián

$$F_r = 2\pi^2 \rho_a f v n^2 L \left(\frac{\sqrt{2}}{M} + \frac{1}{2M^2} \right), \quad (2.7)$$

ahol ρ_a a levegő sűrűsége, M pedig egy a húroknál tipikusan 0,3 és 1 között változó érték. Mivel F arányos v -vel, a mozgási energiával –, tehát a sebesség négyzetével – arányosan változik. Adott frekvencián az amplitúdó exponenciálisan csökken

$$\tau_1 = \frac{\rho_a}{2\pi\rho_a f} \frac{2M^2}{2\sqrt{2}M + 1} \quad (2.8)$$

időállandóval. M a frekvencia gyökével arányos, ezért, ha a frekvencia nullához közelít, az időállandó konstans lesz, ha pedig a frekvencia a végtelenbe tart, az időállandó $\frac{1}{\sqrt{f}}$ -fel lesz arányos.

2.2.2. Elasztikus veszteség

Minden valós anyag megfeszítése esetén olyan elasztikus viselkedést mutat, melynek során azonnali megnyúlás történik, majd egy jellemző τ idő múlva a megnyúlás némileg nő. Viszkoelasztikus anyagokban a második megnyúlás lassan de korlát nélkül emelkedik. Ilyenfajta viselkedés a Young modulus komplexszé alakításával fejezhető ki: $E = E_1 + iE_2$. Ezt a mozgásegyenletbe helyettesítve megkapjuk az elasztikus veszteség időállandójának

$$\tau_2 = \frac{1}{\pi f} \frac{E_1}{E_2} \quad (2.9)$$

képletét.

2.2.3. Nemideális lezárás

Egy húr adott n módusa esetén a lezárással közölt sebesség

$$v_n = \alpha G F_n \quad (2.10)$$

alakban írható, melyben F_n az erő függőleges komponense, G a konduktancia, α pedig konstans. Fletcher az energiaveszteséget az amplitúdó exponenciális csökkenésével, az idő-állandót pedig

$$\tau_3 = \frac{1}{8\mu L f^2 G} \quad (2.11)$$

formában adja meg.

2.2.4. Módosított egyenlet

Amennyiben mindhárom fent említett mechanizmus szerepet játszik a csillapításban, azok eredőjét reciprokösszegük segítségével adhatjuk meg:

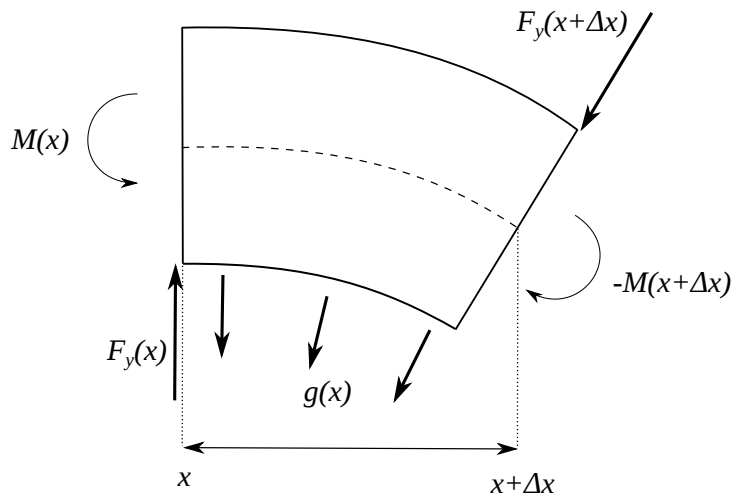
$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3}. \quad (2.12)$$

Vékony fémhúrok esetén az elasztikus veszteségből, valamint a nemideális lezárásból fakadó csillapítás elhanyagolható, így elegendő a viszkózus csillapítás hatását figyelembe vennünk. A (2.2) egyenlet kiegészítéseként egy a kitérés első deriváltját β csillapítási tényezővel szorzó tag reprezentálja a viszkozitást.

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} - S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x). \quad (2.13)$$

2.3. Hajlító rezgések

A valóságos, nemideális húrok, ellentétben az ideálisakkal, nem teljesen rugalmasak. Bizonyos fokú merevségük következményeképp rúdelemekre jellemző hajlító rezgésalakok is kialakulnak bennük. A kitérés hatására ugyanis deformáció keletkezik a húrban, melynek során a húr keresztmetszete változatlan marad, a középvonaltól távolodva azonban a húr egyik felén összehúzódás, ellenkező oldalán pedig megnyúlás történik.



2.2. ábra. A rúdelemen fellépő erők

Ezt az alakváltozást, melyet a 2.2. ábra egy tetszőlegesen kicsiny rúdelemen az elem két végén ellentétes irányban fellépő $F_y(x)$ és $F_y(x + \Delta x)$ erőkkel valamint $M(x)$ és $M(x + \Delta x)$

forogatónyomatékokkal szemléltethetjük. Az említett erőket Newton második törvényébe helyettesítve

$$g(x)\Delta x + F_y(x + \Delta x) - F_y(x) = \rho A \Delta x a(x). \quad (2.14)$$

A Δx -szel osztva, $\Delta x \rightarrow 0$ határátmenettel az alábbi összefüggés adódik:

$$g(x) + \frac{\partial F_y(x)}{\partial x} = \rho A a(x). \quad (2.15)$$

Mivel a rúdelem teljes nyomatéka zérus, az

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x} + F_y(x) = 0 \quad (2.16)$$

fejzhetjük ki a fellépő erővel való kapcsolatát. Ezt a (2.15)-be helyettesítve:

$$g(x) - \frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} = \rho A a(x). \quad (2.17)$$

A rúdelemeken fellépő nyomatékok teljes felületre vett integrálja a Hooke-törvény megfontolásaival:

$$M(x) = \int_A dM(x, y) = \int_A E y^2 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} dA = EI \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}, \quad (2.18)$$

ahol E a Young-modulus, $I = \int_A y^2 dA$ pedig az y irányú hajtással szemben támasztott másodrendű nyomaték, más néven inercia. Kör keresztmetszetű rudakban, mint esetünkben is, a középvonalra vonatkoztatott nyomaték számítása – polárkoordináta rendszerben $y = r \sin \theta$ és $dA = r dr d\theta$ – a következő:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin^2 \theta r dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \int_0^R r^2 r dr. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Mivel a koszinuszos tag integrálja a teljes 2π perióduson nulla:

$$I = \int_0^{2\pi} \pi \frac{1}{2} d\theta \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{R^4 \pi}{4}. \quad (2.20)$$

A rudak hajlító rezgéseit leíró mozgásegyenlet tehát

$$g(x) - EI \frac{\partial^4 u(x)}{\partial x^4} = \rho A \frac{\partial^2 u(x)}{\partial t^2}. \quad (2.21)$$

2.4. Merev húr mozgásegyenlete

A (2.2) és a (2.21) egyenletek összekapcsolásával kapjuk a nemideális véges merevségű húr mozgásegyenletét:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = g. \quad (2.22)$$

Amennyiben mind térben, mind időben harmonikus a megoldás

$$u(x, t) = U \sin kx \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.23)$$

amit a gerjesztésmentes ($g(x, \omega) \equiv 0$) húregyenletbe helyettesítve a diszperzióegyenletet kapjuk:

$$Sk^2 + EI k^4 = \mu \omega^2. \quad (2.24)$$

Ha a húr az n -edik módusban rezeg, akkor az L hosszra n félhullám esik, vagyis $k = \frac{n\pi}{L}$, a körfrekvencia pedig

$$\omega_n^2 = \frac{S}{\mu} \left(k^2 + \frac{EI}{S} k^4 \right), \quad (2.25)$$

az ismert c sebesség bevezetésével

$$\omega_n = \frac{nc\pi}{L} \sqrt{1 + \frac{EI}{S} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2} = n\omega_1^0 \sqrt{1 + Bn^2}, \quad (2.26)$$

ahol ω_1^0 az ideális húr alapfrekvenciája,

$$B = \frac{\pi^2 EI}{SL^2} \quad (2.27)$$

pedig a húr inharmonicitási állandója, mely kör keresztmetszetű húr esetén

$$B = \frac{\pi^3 Ed^4}{64SL^2}. \quad (2.28)$$

2.5. Merev, csillapított húr mozgásegyenlete

A fejezetben említetteket átgondolva kapjuk meg végül a merev húr csillapítás figyelmebevételével felírt mozgásegyenletét:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} - S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = g. \quad (2.29)$$

A negyedrendű összetevő miatt a hullám terjedésének sebessége frekvenciafüggővé válik a csoportsebesség a frekvencia gyökével lesz arányos ($v_{cs} \propto \sqrt{\omega}$), diszperzió lép fel. A magasabb felharmonikusok ezáltal gyorsabban terjednek a húrban, így frekvenciájuk is magasabb lesz, mint ideális húr esetén.

3. fejezet

A végeelem módszer

A végeelem módszer egy parciális differenciálegyenletek közelítő megoldására szolgáló numerikus eljárás. A módszer a véges tartományt egymással csomópontjaikon kapcsolódó véges számú elemre bontja, a megoldást pedig az intervallumra definiált ortogonális alakfüggvények segítségével állítja elő.

3.1. Alapok

A végeelem módszer alapjait a [10, 4] forrásokra támaszkodva tekintjük át. Az

$$\mathcal{A}\{u(x)\} = f(x) \tag{3.1}$$

differenciálegyenlet, valamint a hozzá tartozó

$$\mathcal{B}\{u(x)\} = g(x) \tag{3.2}$$

peremfeltétel által meghatározott $u(x)$ megoldásfüggvényt keressük. \mathcal{A} és \mathcal{B} differenciálope-rátorok, $f(x)$ a tartomány gerjesztése, $g(x)$ pedig egy ismert függvény. Hogy a problémát numerikus módon vizsgálhassuk, diszkrétizálással a differenciálegyenleteket lineáris algebrai egyenletrendszerre alakítjuk, melyet a Galjorkin-módszer segítségével tehetünk meg. A megoldásfüggvényt a tartományon felírt véges számú alakfüggvények lineáris kombinációjaként állítjuk elő:

$$u(x) \approx \sum_{i=1}^n N_i(x)u_i, \tag{3.3}$$

ahol N_i alakfüggvény u_i pedig a kitérés. A közelítés pontossága az alakfüggvények szabadságfokainak számával növelhető. Ezeket az alakfüggvényeket úgy igyekszünk megválasztani, hogy lehetőség szerint ortogonálisak legyenek egymásra.

Az első lépés a differenciálegyenlet követelményeinél gyengébb feltételeket előíró ún. gyenge alak előállítás. Ezt követően az analitikus függvényt vektorok segítségével közelítjük, rendszerleíró mátrixokat hozunk létre, így térben diszkrétizálva a problémát. Az utolsó lépés a rendszer időtartományban történő diszkrétizálása.

3.2. Az ideális, csillapított húr végelem modellje

3.2.1. A gyenge alak

Állítsuk elő a csillapított húr

$$\mu\ddot{u}(x) + \beta\dot{u}(x) - S\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = g(x) \quad (3.4)$$

mozgásegyenletének gyenge alakját. Először szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát valamely $\phi(x)$ tesztfüggvénnyel, majd integráljuk a zárt Ω tartományon:

$$\int_{\Omega} \mu\phi(x)\ddot{u}(x) dx + \int_{\Omega} \beta\phi(x)\dot{u}(x) dx - \int_{\Omega} S\phi(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} dx = \int_{\Omega} \phi(x)g(x) dx. \quad (3.5)$$

A bal oldal harmadik tagját parciálisan integrálva:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu\phi(x)\ddot{u}(x) dx + \int_{\Omega} \beta\phi(x)\dot{u}(x) dx + \int_{\Omega} S\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\frac{\partial u(x)}{\partial x} dx - \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x}\phi(x) \right]_0^L = \\ = \int_{\Omega} \phi(x)g(x) dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

A kivonandó tag a befogási kényszer miatt zérus.

3.2.2. Közelítés

Közelítsük $u(x)$ -et, $\dot{u}(x)$ -et és $\ddot{u}(x)$ -et az

$$u(x) \approx \sum_i N_i(x)u_i = \mathbf{N}(x)\mathbf{u} \quad (3.7a)$$

$$\dot{u}(x) \approx \sum_i N_i(x)\dot{u}_i = \mathbf{N}(x)\dot{\mathbf{u}} \quad (3.7b)$$

$$\ddot{u}(x) \approx \sum_i N_i(x)\ddot{u}_i = \mathbf{N}(x)\ddot{\mathbf{u}} \quad (3.7c)$$

formában, \mathbf{N} sorvektor és \mathbf{u} oszlopvektor segítségével. Ekkor $N_i(x)$ az i -edik alakfüggvény x pontban felvett értékét, u_i pedig az ehhez az alakfüggvényhez tartozó súlyt jelenti.

A (3.6)-ba helyettesítve

$$\int_{\Omega} \mu\phi(x)\mathbf{N}(x)\ddot{\mathbf{u}} dx + \int_{\Omega} \beta\phi(x)\dot{\mathbf{u}} dx + \int_{\Omega} S\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\frac{\partial\mathbf{N}(x)}{\partial x}\mathbf{u} dx = \int_{\Omega} \phi g dx. \quad (3.8)$$

A (3.8)-nek tetszőleges ϕ -re teljesülnie kell. A Galjorkin-módszer szerint a $\phi(x)$ tesztfüggvényt is az alakfüggvények lineáris kombinációjaként állítjuk elő:

$$\phi(x) = \mathbf{N}(x)\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}^T\mathbf{N}(x)^T, \quad (3.9)$$

melyet a (3.8)-be helyettesítve adódik a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu\boldsymbol{\phi}^T\mathbf{N}(x)^T\mathbf{N}(x)\ddot{\mathbf{u}} dx + \int_{\Omega} \beta\boldsymbol{\phi}^T\mathbf{N}(x)^T\mathbf{N}(x)\dot{\mathbf{u}} dx + \\ + \int_{\Omega} S\boldsymbol{\phi}^T\frac{\partial\mathbf{N}(x)^T}{\partial x}\frac{\partial\mathbf{N}(x)}{\partial x}\mathbf{u} dx = \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi}^T\mathbf{N}(x)^T g dx \end{aligned} \quad (3.10)$$

egyenlet.

Vegyük észre, hogy a (3.10) $\boldsymbol{\phi}^T$ -vel egyszerűsíthető, mivel $\boldsymbol{\phi}^T$ tetszőleges konstans. Ezt elvégezve, valamint a $g \approx \sum_i N_i(x)g_i$ összefüggéssel élve a

$$\int_{\Omega} \mu \mathbf{N}(x)^T \mathbf{N}(x) \ddot{\mathbf{u}} dx + \int_{\Omega} \beta \mathbf{N}(x)^T \mathbf{N}(x) \dot{\mathbf{u}} dx + \int_{\Omega} S \frac{\partial \mathbf{N}(x)^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}(x)}{\partial x} \mathbf{u} dx = \int_{\Omega} \mathbf{N}(x)^T \mathbf{N}(x) dx \mathbf{g} \quad (3.11)$$

egyenletre jutunk. A kapott egyenlet összeadandó tagjait szimmetrikus mátrixokba rendezhetjük, amelyekre a továbbiakban rendszerleíró mátrixokként tekintünk. A rendszerleíró mátrixok tehát az alábbi integrálok kiszámításával állnak elő:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mu \mathbf{N}(x)^T \mathbf{N}(x) dx, \quad (3.12a)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \beta \mathbf{N}(x)^T \mathbf{N}(x) dx, \quad (3.12b)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} S \frac{\partial \mathbf{N}(x)^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}(x)}{\partial x} dx, \quad (3.12c)$$

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{N}(x)^T \mathbf{N}(x) dx. \quad (3.12d)$$

3.2.3. Térbeli diszkretizáció

Modellünket először geometriailag bontjuk véges számú elemre. Az Ω értelmezési tartományt n csomópontra bontjuk, mely $n - 1$ egymással csak csomópontjaikon érintkező elemet definiál. Ahhoz, hogy a kitérését közelíteni tudjuk, n számú alakfüggvényekre van szükségünk. Ezeket úgy választjuk meg, hogy N_i alakfüggvény csak x_i csomópontban 1 értékű, a többi x_j ($j \neq i$) pontban 0. Az Ω tartomány felbontása tehát

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i, \quad (3.13)$$

ahol $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, amennyiben $i \neq j$.

Mivel minden alakfüggvényhez egy súlyérték tartozik, az alakfüggvények n száma egyben meghatározza a diszkrét rendszer változóinak, a szabadságfokoknak a számát is. Általánosan igaz, hogy a szabadságfokok számának növelésével a számítási komplexitás növekedésének árán növelhető a numerikus megoldás pontossága.

A (3.11) gyenge egyenlet megoldásához a legegyszerűbb lineáris alakfüggvényeket választani. Ilyenkor minden elemhez két lokális alakfüggvény tartozik, és az elemekhez 2×2 -es \mathbf{M}_e , \mathbf{C}_e , \mathbf{K}_e , \mathbf{A}_e elemmátrixok adódnak. Az elemeket úgy fűzzük össze, hogy az első elem második csomópontja a második elem első csomópontja lesz, és így tovább. Ez a mátrixok összeállításánál a következő módon valósul meg, példaként az \mathbf{M} tömegmátrixra:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{e1,11} & M_{e1,12} & 0 & \dots & 0 \\ M_{e1,21} & M_{e1,22} + M_{e2,11} & M_{e2,12} & \dots & 0 \\ 0 & M_{e2,21} & M_{e2,22} + M_{e3,11} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{en,22} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

3.2.4. Időbeli diszkretizáció

Az időtartományon való diszkretizáláshoz az ún. Newmark-sémát [7, 3] használjuk. Induljunk ki a Galjorkin-módszer segítségével kapott egyenlet mátrixos alakjából

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (3.15)$$

Az időlépés kezdeti feltétele, hogy a \mathbf{g} gerjesztés zérus legyen. A kezdeti \mathbf{u} ismert, mivel a húr alakja adott, az $\ddot{\mathbf{u}}$ és $\dot{\mathbf{u}}$ pedig a pengetés közelítése miatt nulla értékűek.

Tegyük fel, hogy az n -edik lépésben ismert a megoldás. Ekkor a Newmark-séma szerint

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t [(1 - \gamma_H)\ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma_H\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}], \quad (3.16)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta_H)\ddot{\mathbf{u}}_n + 2\beta_H\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}]. \quad (3.17)$$

A β_H és a γ_H a deriváltak közelítéséhez alkalmazott kétoldali súlyozást határozza meg, kedvelt választás a $\gamma_H = 0,5$, $\beta = 0,25$ értékek használata, melyet jelen dolgozatban is alkalmazunk. A (3.15)-be helyettesítve

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{C}[\dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t[(1 - \gamma_H)\ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma_H\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}]] + \\ + \mathbf{K}\left[\mathbf{u}_n + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}[(1 - 2\beta_H)\ddot{\mathbf{u}}_n + 2\beta_H\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}]\right] = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Az egyenletet átrendezve

$$\begin{aligned} [\mathbf{M} + \Delta t\gamma_H\mathbf{C} + \Delta t^2\beta_H\mathbf{K}] \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = -\mathbf{K}\mathbf{u}_n - (\Delta t\mathbf{K} + \mathbf{C})\dot{\mathbf{u}}_n - \\ - \left[\mathbf{K}\frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta_H) + \mathbf{C}\Delta t(1 - \gamma_H)\right] \ddot{\mathbf{u}}_n. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Legyen

$$\mathbf{M}^* = [\mathbf{M} + \Delta t\gamma_H\mathbf{C} + \Delta t^2\beta_H\mathbf{K}], \quad (3.20)$$

ezáltal a (3.19) $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$ -re rendezve:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{M}^{*-1} \left[-\mathbf{K}\mathbf{u}_n - (\Delta t\mathbf{K} + \mathbf{C})\dot{\mathbf{u}}_n - \left[\mathbf{K}\frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta_H) + \mathbf{C}\Delta t(1 - \gamma_H)\right] \ddot{\mathbf{u}}_n \right]. \quad (3.21)$$

Miután $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$ -t és \mathbf{u}_{n+1} -t a (3.16) és a (3.17) alapján megkapjuk, továbbléphetünk a következő időpillanatra.

A Δt időlépés megválasztásakor, ahhoz, hogy a rendszerünk numerikusan stabil legyen, ki kell elégítenünk a

$$c\Delta t < \min L_e \quad (3.22)$$

követelményt, ami annyit tesz, hogy a terjedő hullámforma egy időlépés alatt nem haladhat többet, mint a legkisebb elem mérete.

3.3. A nemideális húr végeelem modellje

A húr fizikája című fejezetben már említésre került a merev húr mozgásegyenlete:

$$\mu\ddot{u} + \beta\ddot{u} - S\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = g. \quad (3.23)$$

Ennek gyenge alakja az ismert módon előállítva, az összeg utolsó tagját kétszer parciálisan integrálva:

$$\int \mu \phi \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}} \, dx + \int \beta \phi \dot{\mathbf{u}} \, dx - \int S \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \mathbf{u} \, dx + \int EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \mathbf{u} \, dx = \int \phi g \, dx. \quad (3.24)$$

A Galjorkin-módszer alkalmazásakor ezúttal még egy

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} EI \frac{\partial^2 \mathbf{N}(x)^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}(x)}{\partial x^2} \, dx \quad (3.25)$$

mátrixszal bővül rendszerünk. A (3.21) egyenlet annyiban módosul, hogy $\mathbf{K}_R = \mathbf{K} + \mathbf{R}$ egyenlettel dolgozunk nemideális esetben.

3.4. Kényszerek és peremfeltételek

A húr mozgásának szimulációjában fontos lépés a húr rögzítésének modellezése. Ezt befogási kényszerek segítségével tehetjük meg, melyek alkalmazásakor a rendszer egyes szabadságfokainak, vagy egyes szabadságfokok lineáris kombinációjainak értékét rögzítjük.

A rendszer szabadságfokait két halmazra, \mathbf{u}_m független (master) és \mathbf{u}_s függő (slave) kitérésekre bontjuk. Egy n egyenletet tartalmazó lineáris rendszerben $m \leq n$ kényszer-egyenlet esetén a kényszer mátrix $m \times n$ -es. A felosztás slave kitérései kifejezhetőek a master kitérések ismeretében. Az

$$[\mathbf{A}_s \quad \mathbf{A}_m] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

formában írt egyenlet \mathbf{A}_s mátrixa $m \times m$, míg \mathbf{A}_m mátrixa $m \times (n - m)$ elemből áll. A függő és független elmozdulások között az

$$\mathbf{u}_s = -\mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{A}_m \mathbf{u}_m \quad (3.27)$$

egyenlet teremt kapcsolatot. A rendszer összes szabadságfokához tartozó érték a master szabadságfokokból

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{A}_m \end{bmatrix} \mathbf{u}_m = \mathbf{T}_c \mathbf{u}_m \quad (3.28)$$

formában formában határozható meg. A \mathbf{T}_c transzformációs mátrixot kényszer mátrixnak (constraint matrix) is nevezhetjük.

Tekintsük a végeelem módszerrel kapott diszkrét mozgásegyenletünk mátrixegyenletét az \mathbf{S} rendszerleíró mátrixszal a

$$\mathbf{S} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.29)$$

formában, amely a (3.28) alapján

$$\mathbf{S} \mathbf{T}_c \mathbf{u}_m = \mathbf{0} \quad (3.30)$$

alakra módosul. $\mathbf{S}^* = \mathbf{T}_c^T \mathbf{S} \mathbf{T}_c$ -t bevezetve kapjuk a

$$\mathbf{S}^* \mathbf{u}_m = \mathbf{T}_c^T \mathbf{0} \quad (3.31)$$

egyenletet, ahol n helyett $n - m$ szabadságfokkal rendelkezünk.

3.5. Alakfüggvények a nemideális modellben

Mivel a nemideális, diszperz húr mozgását leíró egyenlet negyedrendű differenciálegyenlet, ezért legalább harmadfokú elemi alakfüggvényeket kell választanunk. Ebben az esetben egy elemhez négy szabadságfok tartozik, az alakfüggvényeket pedig úgy választjuk meg, hogy az alábbi feltételek teljesüljenek:

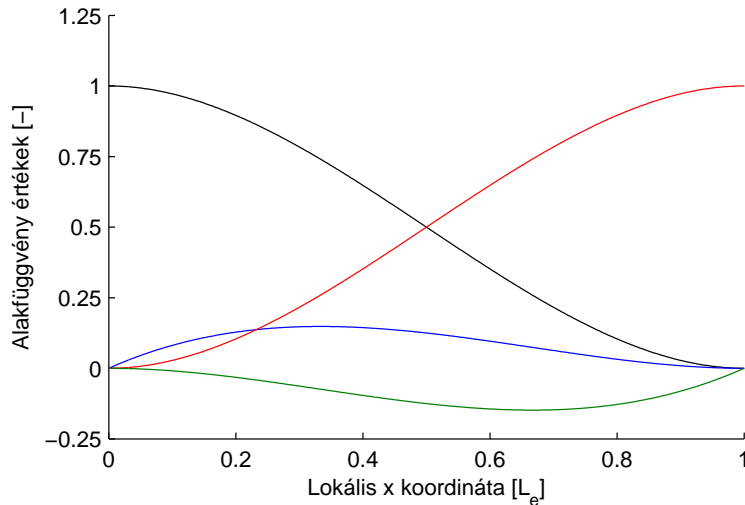
$$N_1 : \quad N_1(0) = 1 \quad N_1(L) = 0 \quad \left. \frac{\partial N_1}{\partial x} \right|_0 = 0 \quad \left. \frac{\partial N_1}{\partial x} \right|_L = 0, \quad (3.32a)$$

$$N_2 : \quad N_2(0) = 0 \quad N_2(L) = 1 \quad \left. \frac{\partial N_2}{\partial x} \right|_0 = 0 \quad \left. \frac{\partial N_2}{\partial x} \right|_L = 0, \quad (3.32b)$$

$$N_3 : \quad N_3(0) = 0 \quad N_3(L) = 0 \quad \left. \frac{\partial N_3}{\partial x} \right|_0 = 1 \quad \left. \frac{\partial N_3}{\partial x} \right|_L = 0, \quad (3.32c)$$

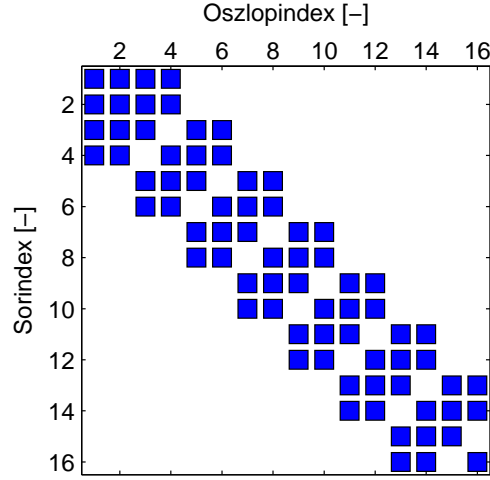
$$N_4 : \quad N_4(0) = 0 \quad N_4(L) = 0 \quad \left. \frac{\partial N_4}{\partial x} \right|_0 = 0 \quad \left. \frac{\partial N_4}{\partial x} \right|_L = 1. \quad (3.32d)$$

Az alakfüggvényeket harmadfokú polinomként szimbolikusan felírva, a fenti egyenletekbe helyettesítve megkapjuk a megfelelő harmadfokú polinomokat, melyeket a 3.1. ábra mutat.



3.1. ábra. A nemideális modell egy elemhez tartozó négy alakfüggvénye

A véges merevség következtében a húr szögelfordulása x szerint folytonos kell legyen, ami azt jelenti, hogy a $\partial u / \partial x$ függvény az elemek között nem ugorhat, egy csomópont-hoz tehát egy u és egy $\partial u / \partial x$ érték tartozik. Így a fenti alakfüggvények választásával a rendszermatrixok elemenkénti összerakásakor azt kapjuk, hogy a 4×4 -es elemmatrixok jobb alsó és bal felső 2×2 -es blokkjai kerülnek összegzéses átfedésbe. A modell összes szabadságfokainak száma pedig a csomópontok számának kétszerese lesz, hiszen minden csomópont-hoz két változó tartozik. Az így kialakuló \mathbf{M} tömegmatrix szerkezetét mutatja a 3.2. ábra, látható a blokkok átfedése, illetve az is, hogy egyes elemek az összegzés során ellentétes előjelűek következtében kiejtik egymást.



3.2. ábra. Az \mathbf{M} ritka tömegmátrix első néhány sorának és oszlopának szerkezete

3.6. Kezdeti elmozdulás meghatározása

Nemideális húrmodellünknek több kezdeti feltételt is ki kell elégítenie. Az $u(x)$ függvényt három pontban rögzítjük: $u(x = 0) = 0$ és $u(x = L) = 0$ jelenti a merev megfogást a két húr végén, $u(x = x_p) = U_0$ pedig a pengetési pozícióban megadott kezdeti kitérést határozza meg. Ezenkívül a gondoskodnunk kell arról is, hogy a forgatónyomaték is zérus legyen az ideális lezárásoknál helyeken. Ekkor a kényszerfeltételeket meghatározó \mathbf{A} mátrix (lásd (3.26) egyenlet) az alábbi formában áll elő:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Mivel megfogott pontjaink indexei 1, 2, $n-1$ és n , ahol n a szabadságfokok száma, ezért az \mathbf{A} mátrix elrendezésében az első kettő, és az utolsó kettő oszlop a a slave szabadságfokokhoz tartozó vektorok, a közttes oszlopok pedig a master szabadságfokokhoz tartoznak.

A (3.15) állandósult állapotban:

$$\mathbf{M}\mathbf{0} + \mathbf{C}\mathbf{0} + \mathbf{K}_R\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad (3.34)$$

ahol $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ ideális pengetést feltételezve. A (3.30) és a (3.31) alapján \mathbf{K}_R mátrixra a következő összefüggések adódnak:

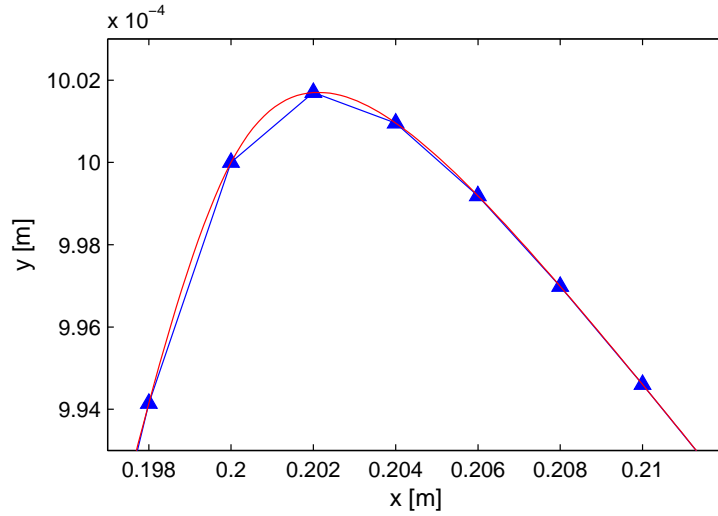
$$\mathbf{K}_R\mathbf{T}_c\mathbf{u}_m = \mathbf{0} \quad \text{és} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{T}_c^T\mathbf{K}_R\mathbf{T}_c\mathbf{u}_m = \mathbf{T}_c^T\mathbf{0}. \quad (3.36)$$

A $\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^T\mathbf{K}_R\mathbf{T}$ összefüggést bevezetve:

$$\mathbf{K}^*\mathbf{u}_m = \mathbf{0}. \quad (3.37)$$

Particionáljuk a szabadságfokokhoz tartozó \mathbf{u} állapotvektort két részre! A \mathbf{u}_1 jelölje az ismert master szabadságfokokat, melyeket a fent megadott peremfeltételek határoznak meg,



3.3. ábra. Merev húr kezdeti kitérése ideális pengetés esetén a pengetési pozíció közelében. A kék háromszögek a csomópontoknál felvett kitérés értékeket, a piros vonal pedig az alakfüggvények szuperpozícióját kiértékelve kapott eredmény.

\mathbf{u}_2 pedig a nem ismert master szabadságfokokat. A \mathbf{K}^* mátrix ismeretében \mathbf{u}_2 -t a (3.37) egyenlet

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11}^* \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{12}^* \mathbf{u}_2 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21}^* \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{22}^* \mathbf{u}_2 &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.38)$$

alakú felbontásával fejezhetjük ki, melyből a megoldást az alábbi formában kapjuk:

$$\mathbf{u}_2 = -\mathbf{K}_{22}^{*-1} \mathbf{K}_{21}^* \mathbf{u}_1. \quad (3.39)$$

A megoldást szemlélteti a 3.3. ábra, melyen látható, hogy az elemek belsejében kiértékelve az alakfüggvényeket olyan kitérésalakot kapunk eredményül, mely eleget tesz a fizikai modell által meghatározott folytonossági feltételnek. (Ha csak a csomópontokban felvett értékeket kötjük össze egyenes vonalakkal, akkor ez nem látható, ezt szemléltetik az ábrán a kék háromszögek és a köztük futó folytonos kék vonal.)

4. fejezet

Eredmények

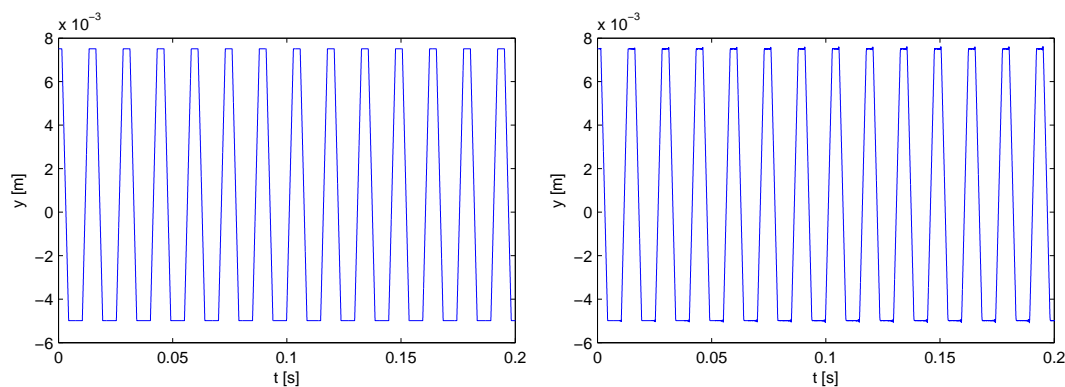
Ebben a fejezetben megtekintjük a modell működését a gyakorlatban. Először egy ideális húr modelljét vizsgáljuk meg, az időtartománybeli szimulációt az analitikus megoldással hasonlítjuk össze. Ezek után megmutatjuk a csillapítás hatását, végül pedig a diszperz húr modellezésének eredményeit értékeljük ki. A fejezetben nem az összes eredmény megmutatására törekszünk, hanem azt bizonyítjuk, hogy az előző fejezetekben ismert modell a gyakorlatban is jól működik, képes a kitűzött cél elérésére, a diszperzió megfelelő pontosságú modellezésére.

A következő példákban egy 1 m hosszú húrt 1/5-énél pengetünk meg, úgy hogy a maximális kitérés 1 mm legyen, majd az álló állapotból elegendett húr viselkedését modellezzük. A húr anyagjellemzőit úgy választottuk meg, hogy azok egy gitárhúréhoz hasonlítsanak. Az ideális és a diszperz esetben is úgy választottuk meg az elemek számát, hogy a szabadságfokok száma 1000 legyen.

4.1. Az ideális húr

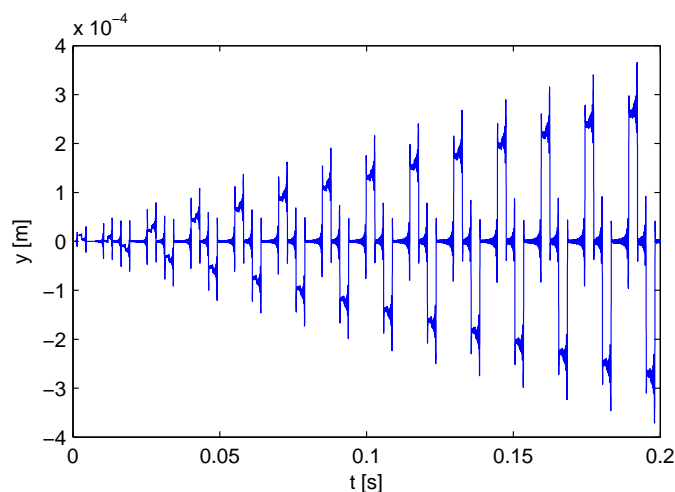
4.1.1. Összehasonlítás az analitikus megoldással

Ideális, csillapítatlan húr kitérésének időfüggvénye kifejezhető analitikusan, ezt fel is használjuk a numerikus modell hűségének ellenőrzésekor. A 4.1 ábra mutatja a húr 2/5-énél elhelyezett mérőpontban a húr kitérésének időfüggvényét.



4.1. ábra. Ideális, csillapítatlan húr egy pontja kitérésének időfüggvénye analitikus számítással (bal) és végelem szimuláció eredményeként (jobb)

A 4.1. ábrán az időtengelyen jobbra haladva egyre inkább láthatóvá válik a két megoldás közötti különbség, a numerikus módszer hibája egyre nagyobb, amit két függvény különbségét ábrázoló a 4.2. ábrán szintén megfigyelhetők. Láthatjuk azt is, hogy a hiba a maximális kitérések helyén nagyságrendekkel kisebb, mint akkor, amikor a csomópont a két maximum között halad.



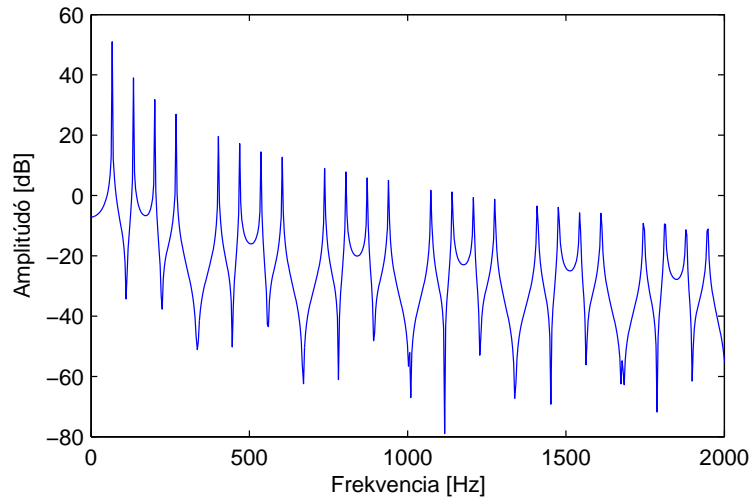
4.2. ábra. A hiba az idő függvényében

A hiba forrása ebben az esetben a numerikus modell véges felbontása, illetve az ún. numerikus diszperzió. Utóbbit megfigyelhetjük a rezgésalak időbeli torzulásán keresztül. Mivel jelen esetben az elemek mérete jóval kisebb a hullámszámnál utóbbi effektus nem okoz jelentős hibát, mégis érdemes megemlíteni a teljesség kedvéért. A numerikus diszperzió a diszkretizálás velejárója, hatása csak az elemek számának és ezzel együtt számítási idő növelésével csökkenthető. Ahogyan a 4.2. ábrán is látható a hiba az adott diszkretizálási finomság mellett még elég kicsiny marad, így nem indokolt a szabadságfokok számának további növelése.

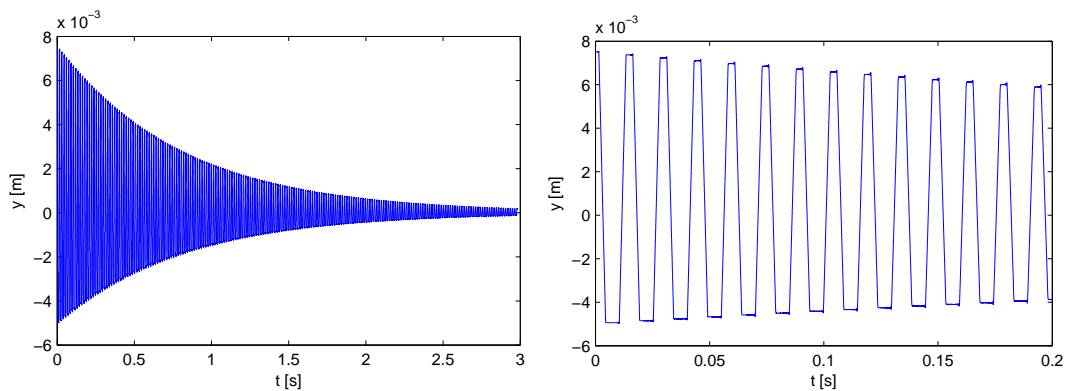
4.1.2. Az ideális húrmodell eredményei

Ha a húr mozgását a frekvenciatartományban vizsgáljuk, a (2.6) egyenletben megfogalmazottakra lehetünk figyelmesek. A 4.3 ábrán az $1/5$ -énél megpengetett húr spektruma látható. Megfigyelhetjük, hogy minden ötödik módus hiányzik a frekvenciaképből, ahogy azt az elméleti megfontolások alapján várhatjuk is. A 4.3. ábrán szintén látható, hogy az egyes felharmonikusok amplitúdója a kezdeti pengetési jelalak periodikus kiterjesztésének Fourier-együtthatóinak nagyságával egyezik meg.

Bevezetve a viszkózus csillapítás β együtthatóját, így a a 4.4. ábrán látható eredményekhez jutunk. Az ábrán szintén a húr $2/5$ -énél elhelyezett mérőpontban figyeljük a kitérést. Jól megfigyelhető, hogy a húr középpontjától távolabb elhelyezett mérőpontban a várakozásunknak megfelelően aszimmetrikus jelalakot kapunk, illetve jól látható az exponenciális csillapítás hatása is.



4.3. ábra. Egy pont kitérésen spektruma az ideális, csillapítatlan esetben

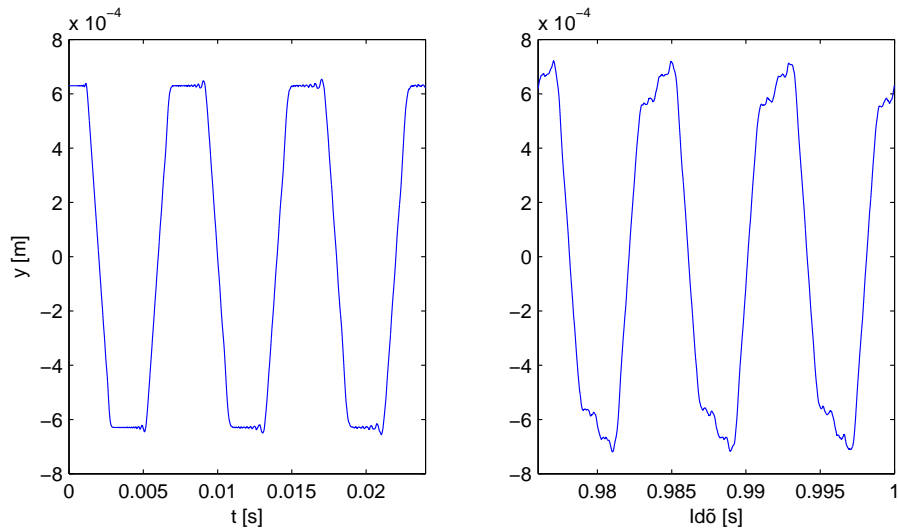


4.4. ábra. A csillapított húr egy pontjának kitérése az idő függvényében. Bal: a teljes szimulált időfüggvény. Jobb: az első néhány periódus közléről.

4.2. A véges merevségű, nemideális húr

A véges merevségű húr fizikai paramétereit az előző esethez képest annyiban változtattuk meg, hogy nagyobb feszítőerőt és kisebb egységnyi hosszra eső tömeget alkalmaztunk, közelítve ezzel egy vékonyabb gitárhúr paramétereit. A pontos értékek megtalálhatóak a függelékben. Az értékek megváltoztatásának eredményeképp a húr alaphangja megnő. A pengetett és a mért pozíció továbbra is rendre a húr egy- és kétötödénél helyezkedik el. A szimulációs időtartamot úgy állítottuk be, hogy 1 Hz-es frekvenciafelbontást kapjunk (a húr alaphangja kb. 125 Hz). Ez több, mint 1 000 000 időlépést jelentett, mely 1000 szabadságfok mellett egy átlagos asztali számítógépen nagyjából 10 perc alatt futott le.

A veszteséges húr kitérését vizsgálva rögtön szembetűnik a diszperzió hatása. Amint a 4.5. ábra összehasonlításán észrevehető a jelalak a maximális kitéréseknél kis idő elteltével látványosan eltorzul a hajlító rezgéseknek, illetve a frekvenciafüggő csoportsebességnek köszönhetően. A jelenség a 4.6 ábra felső, időtartománybeli kitérésfüggvényén is szemléletes. Ebben az esetben csillapítatlan húrzt vizsgáltunk, hogy minél jobban követhető legyen a diszperzió effektusa. Érdeemes megfigyelni, hogy a kialakuló jelalakban a maximális amp-



4.5. ábra. A merev húr egy pontjának kitérése, a jelalak elváltozása a diszperzió hatására. Bal: az első néhány szimulált periódus jelalakja. Jobb: jelalak a szimulált időtartam végén.

litúdó a kezdeti kitérésnél nagyobb értéket is felvehet.

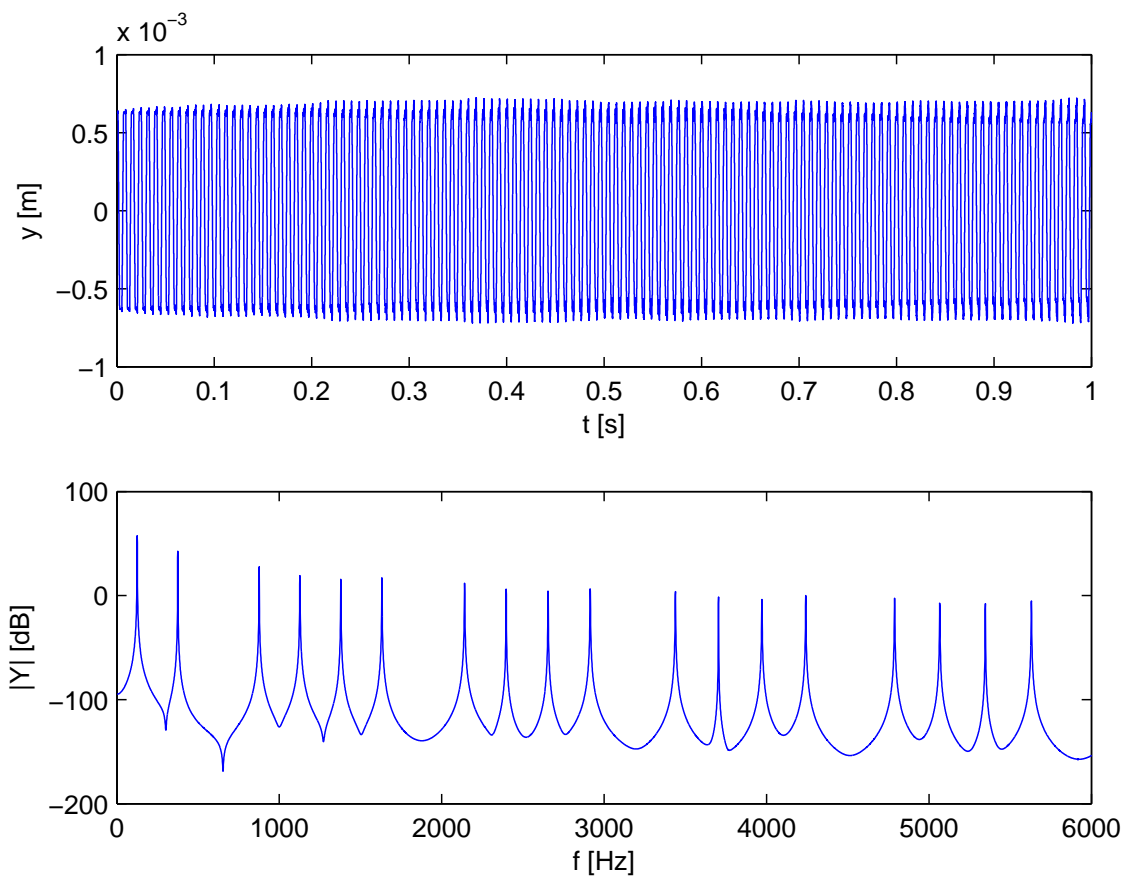
A spektrumképen ismét találkozunk az ideális húron is felismert jelenséggel, azaz a meghatározott felharmonikusok hiányával. Ezenkívül, a módusfrekvenciákat, illetve a spektrum maximumhelyeihez tartozó frekvenciákat alaposabban megvizsgálva az inharmonicitás hatására lehetünk figyelmesek. Amint az a Húr fizikája című fejezetben ismertetésre került, a diszperzió hatására a módusok frekvenciái a módus sorszámával felfelé tolnak. Ez a módusfrekvencia-változás a magasabb frekvenciájú felharmonikusok esetén egyre nagyobb lesz, az inharmonicitási arány a módus sorszámával négyzetesen nő.

A módusok inharmonicitását mutatja a 4.7 ábra. Az ábra vízszintes tengelyén a felharmonikusok sorszáma látható, a függőleges tengely pedig azt mutatja, hogy az n -edik harmonikus frekvenciája milyen mértékben tér el az ideális esetben adódó frekvenciától, mégpedig az alaphang frekvenciájához arányítva. Tehát a 33. módus pl. közel egy alaphangnyival toódik feljebb, a 33. helyett a 34. felharmonikushoz közeli frekvencián szólal meg. Látható, hogy a szimulált eredmények kiválóan illeszkednek az elméleti értékekhez, amely megfigyelés igazolja a végeelem modell helyességét, alkalmazásának létjogosultságát.

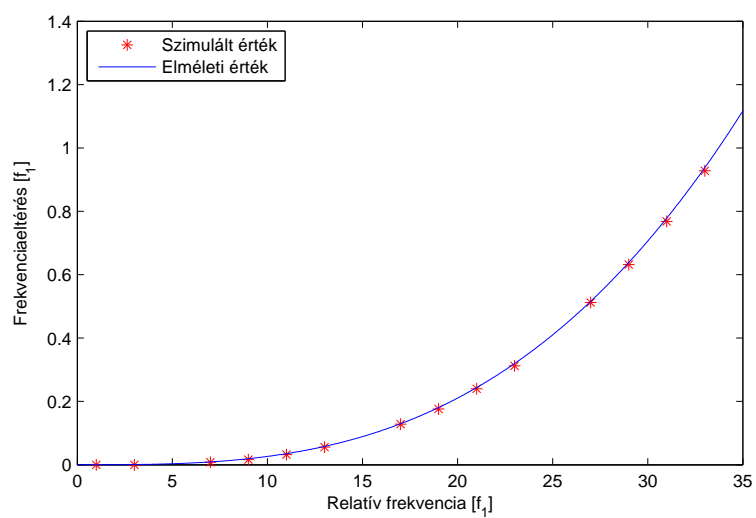
4.3. Eredmények értékelése, kitekintés

Ebben a fejezetben nem került bemutatásra a végeelem modell által kínált összes lehetőség, hiszen a modell validációjára, az egyes effektusok elkülönítésére koncentráltunk. Megmutattuk azonban, hogy a javasolt végeelem modell segítségével jó pontossággal szimulálható az ideális, a csillapított valamint a véges merevségű diszperz húr is.

Nem mutattuk be az inhomogenitás, az anyagjellemzők perturbációjának hatását, ez viszont közvetlenül beépíthető a modellbe. Mivel az inhomogenitás hatása nem számítható egyszerű analitikus módszerrel, ezért az inhomogén modellezés eredményei nehezen validálhatóak. Természetesen a fent ismertetett végeelem szimulációk kézenfekvően alkalmazhatóak inhomogén modellre. Hasonlóan beépíthető a modellbe a nemideális lezárások hatása, illetve több húr csatolt szimulációja is.



4.6. ábra. Merev húr egy pontjának kitérése az idő- és frekvenciatartományban



4.7. ábra. Inharmonicitás a diszperz húrban, az elméleti és szimulált módusfrekvenciák összehasonlítása

5. fejezet

Összegzés

A dolgozat célja a pengetett húr mozgásának olyan szimulációja, mely a diszperzió jelenségét figyelembe véve kezeli a problémát. A modell fizikai megfontolások alapján oldja meg a feladatot, a valós húrokat minél jobb közelítésére törekszik. Ezért legelőször a pengetett húr jellemzőit vizsgáltuk, behatóan tanulmányozva mozgásának fizikai leírását. Az analitikus mozgásegyenlet meghatározása után a csillapítást okozó jelenségeket vizsgáltuk. Ezután körüljártuk a nemideális viselkedést okozó körülményeket, a rúd hajlító rezgéseit, majd felírtuk a veszteséges húr egyenletet véges merevségű, nemideális húrokra.

Választott szimulációs eljárásunk a végeselem módszer. A rövid, általános elméleti áttekintés után részletesen levezettük előbb az ideális, majd a nemideális húrmodell összeállításának elméleti alapját. A húrt egymással csomópontjaikon kapcsolódó elemekre bontva a számításokat erre a véges számú pontra végeztük el. Megismerkedtünk a Galjorkin-módszerrel, valamint a Newmark-sémával, melyek az idő- és térbeli diszkrétizálásban játszottak fontos szerepet. Összeállítottuk a rendszerleíró mátrixokat, meghatároztuk a struktúra befogási kényszereit. Haladva a fizikai leírás sorrendjében, először az ideális, csillapított húr modelljét alkottuk meg. Ezt követően a szimulációt kiterjesztettük a nemideális húrokra is, melyet új alakfüggvények használatával, és a rendszer mátrixok fejlesztésével oldottuk meg.

Végül több szempontból vizsgáltuk a modelljeink pontosságát, a megismert fizikai jellemzőkhöz való hasonlóságát. Mind idő-, mind frekvenciatartományban elemeztük működésüket. A szimulációt az analitikus modellel összehasonlítva azt tapasztaltuk, hogy a modell viselkedése minden tekintetben megfelelt előzetes várakozásainknak. Az ideális modell a numerikus módszerből adódó hibák ellenére jól közelítette az analitikus megoldást, a véges merevségű nemideális eredményeink valósághűen adták vissza az inharmonicitás jellemzőit. A modell által szolgáltatott eredmények bemutatásánál nem törekedtünk az összes hatás egyszerre történő együttes figyelembevételére, viszont kitértünk azokra az egyszerű módosítási lehetőségekre, melyekkel a modell kiegészíthető.

A jövőre nézve számos továbbfejlesztési irány megfogalmazható. Szemléletes lenne nem csak elméleti megfontolásokkal, hanem gyakorlati mérésekkel is igazolni a modell működését. A későbbi fejlesztések egyik lehetséges célja, hogy a rendszer ne csak a húr mozgását szimulálja, hanem képes legyen a fizikai alapú hangszintézisre egy hangszertestmodellhez csatolva, ez a feladat egy bonyolultabb végeselem modell segítségével szintén megoldható. Összességében elmondhatjuk, hogy a bemutatott végeselem modell minden szempontból megfelel az iránta támasztott elvárásoknak, illetve számos továbbfejlesztési lehetőséget rejt magában.

Irodalomjegyzék

- [1] Balázs Bank. Physics-based sound synthesis of the piano. Master's thesis, Budapest University of Technology and Economics, 2000.
- [2] Balázs Bank. *Physics-based Sound Synthesis of String Instruments Including Geometric Nonlinearities*. PhD thesis, Budapest University of Technology and Economics, 2006.
- [3] J. G. de Jalón and E. Bayo. *Kinematic and Dynamic simulation of multibody systems – The real-time challenge*, chapter 7, pages 243–270. Springer-Verlag, 1994.
- [4] Péter Fiala. Bevezetés a végeelem módszer alkalmazásba, 2006. Hivatalosan nem jelent meg.
- [5] Péter Fiala. *A hangszerek fizikája*. Elektronikus formában, 2009. Előadásjegyzet.
- [6] N. H. Fletcher and T. D. Rossing. *The physics of musical instruments*, chapter 2, pages 33–64. Springer-Verlag, 1st edition, 1991.
- [7] S. Marburg and B. Nolte, editors. *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids – Finite and Boundary element methods*, page 125. Springer, 2008.
- [8] M. Marques, O. Inácio, V. Debut, and J. Antunes. On the dynamical behaviour of worn guitar strings. In *Proceedings of the 19th International Congress on Sound and Vibration*, pages 1–8, Vilnius, Lithuania, July 2012. The International Institute of Acoustics and Vibration. Paper ID: 317.
- [9] Zsuzsanna Zsófia Rácz. Nemideális húrok csatolt rendszerekben, 2009. TDK dolgozat, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Villamosmérnöki Kar.
- [10] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its basis and fundamentals*. Elsevier, 6th edition, 2004.

Forrásfájlok

Az alábbiakban közöljük a Matlab forrásfájlokat, melyeket a diszperz, csillapított húr végeelem modelljének előállításához és a szimuláció futtatásához fejlesztettünk. A Matlab symbolic math toolboxának függvényeit használjuk a szimbolikus számításokhoz, más toolboxok függvényeit nem használjuk. Az alábbi kódok csak a lényeges lépéseket tartalmazzák, az ábrák megrajzolását és az eredmények mentését / betöltését elvégző kódsorokat itt nem tüntetjük fel. A megadott kódrészletek viszont teljesek, az itt megadott kód lefuttatása elvezet az Eredmények c. fejezetben közölt futtatási eredményhez.

Az első forrásfájl a harmadfokú alakfüggvények szimbolikus előállítását mutatja. A peremfeltételek vektorát és az együtthatómátrixot is szimbolikus adjuk meg, majd a szükséges deriváltak és integrálok kiértékelése, az elemmátrixok előállítása is szimbolikus történik.

```
. a0_shape_symbolic.m  
  
1 % Symbolic variables  
2 x = sym('x');  
3 L = sym('L');  
4 v = x .^[0 1 2 3] .'; % Powers of x  
5 dv = diff(v,x); % and their derivatives  
6  
7 % Boundary condition matrix  
8 A = [subs(v,x,0), subs(dv, x, 0), ...  
9      subs(v,x,L), subs(dv, x, L)] ;  
10  
11 % Solve the system, obtain shape functions  
12 N = A \ v;  
13 dN = diff(N,x); % First derivative  
14 ddN = diff(dN,x); % Second derivative  
15  
16 % Calculate element matrices  
17 Re = int(ddN * ddN.', x, 0, L);  
18 Ke = int(dN * dN.', x, 0, L);  
19 Me = int(N * N.', x, 0, L);  
20 Ce = int(N * N.', x, 0, L);
```

A következő kódrészlet a modell fizikai és számítási paramétereit tartalmazza.

```

. a_param.m
1 % Physical parameters
2 L = 1; % Length of string [m]
3 r = 2.28e-4; % Radius of string [m] (0.011 inch guitar string)
4 S = 80; % Tension force [N]
5 beta = 2.5e-3; % Viscous damping coefficient [Ns/m^2]
6 E = 2e11; % Poisson-number [Pa]
7 rho = 7800; % Density [kg/m^3]
8 u0 = rho*(r^2*pi); % Mass of unit length [kg/m]
9
10 % Inharmonicity coefficient
11 B = pi^3*E*(2*r)^4/(64*S*L^2);
12
13 % Model parameters
14 N = 500; % Number of elements
15 Nnod = N+1; % Number of nodes
16
17 % Picking parameters
18 x0 = 0.2*L; % Picking position
19 U = 1e-3; % Maximal amplitude

```

Ezek után a mátrixok összeállítása következik. Jelen esetben a húrt homogénnek tekintjük, azonban ez kézenfekvő módon megváltoztatható a modellben. Véletlenszerű, adott eloszlású paraméterek (pl. egységnyi húrhossz változó tömege) is egyszerűen megadható a ciklus értelemszerű módosításával.

```

. b_system.m
1 % Equal element sizes
2 xn = linspace(0, L, Nnod); % Nodal position
3 Le = xn(2) - xn(1); % Element size
4
5 % Preallocate system matrices
6 M = sparse(2*Nnod, 2*Nnod);
7 K = sparse(2*Nnod, 2*Nnod);
8 R = sparse(2*Nnod, 2*Nnod);
9 C = sparse(2*Nnod, 2*Nnod);
10
11 % Evaluate element matrices
12 % (Homogeneity assumed)
13 M1 = u0*subs(Me, 'L', Le);
14 K1 = S*subs(Ke, 'L', Le);
15 R1 = E*r^4*pi/4*subs(Re, 'L', Le);
16 C1 = beta*subs(Ce, 'L', Le);
17
18 % Go through all elements
19 for iE=1:2:2*N
20 % Add to the corresping part in the sparse matrices
21 M(iE:iE+3, iE:iE+3) = M(iE:iE+3, iE:iE+3) + M1;
22 K(iE:iE+3, iE:iE+3) = K(iE:iE+3, iE:iE+3) + K1;
23 R(iE:iE+3, iE:iE+3) = R(iE:iE+3, iE:iE+3) + R1;
24 C(iE:iE+3, iE:iE+3) = C(iE:iE+3, iE:iE+3) + C1;
25 end

```

A kényszerfeltételek és a \mathbf{T}_c transzformációs mátrix előállítását mutatja a következő kódrészlet. A zérus forgatónyomaték feltételek a szimbolikusan megadott alakfüggvények második deriváltjainak kiértékelésével adandók meg.

```

                                . c_constraint.m
1  % Find master and slave indices
2  slave_ind = [1 2 2*Nnod-1 2*Nnod];           % slave DOF indices
3  master_ind = setdiff(1:2*Nnod, slave_ind);   % master DOF indices
4
5  % Preallocate constraint matrix
6  A = sparse(4,2*Nnod);
7
8  % Fill constraints
9  % Zero displacement at both ends
10 A(1,1) = 1;                               % u(x=0) = 0
11 A(2,end-1) = 1;                           % u(x=L) = 0
12 % Zero torque at both ends
13 A(3,1:4) = subs(subs(ddN,'x',0),'L', Le); % d2u/dx2(x=0) = 0
14 A(4,end-3:end) = subs(subs(ddN,'x','L'),'L', Le); % d2u/dx2(x=L) = 0
15
16 % Slave and master parts of constraint matrix
17 As = A(:, slave_ind); % Slave part
18 Am = A(:, master_ind); % Master part
19
20 % Transformation matrix Tc
21 Ts = -As\Am; % Slave part
22 % Slave - master - Slave allocation
23 T = [Ts(1:2,:); speye(2*Nnod-4); Ts(3:4,:)];

```

A következő lépés a kezdeti kitérés meghatározása. A megadott pengetési ponthoz legközelebb eső csomópontban rögzítjük a kitérés értékét, illetve alkalmazzuk az előbb megfogalmazott kényszerfeltételeket is. A megoldás az állandósult idejű mozgásegyenlet szétbontásával, a 3. fejezetben tárgyaltak szerint áll elő.

```

                                . d_steady.m
1  % Locate position of picking
2  [~, N0] = min(abs(xn-x0)); % Node index near picking
3
4  % Fixed master-index
5  Nm = find(master_ind == 2*N0-1, 1, 'first');
6
7  % Preallocate steady state
8  s0 = zeros(2*(N+1),1);
9
10 %
11 s0m = s0(master_ind); % Master parts
12 s0m(Nm) = U; % Fix amplitude at picking position
13 % Partitioning of master indices
14 s0m1 = Nm; % Fixed master indices
15 s0m2 = setdiff(1:length(master_ind),s0m1); % Non-fixed master indices
16
17 % Calculate the modified stiffness matrix Knew
18 Knew = T.'*(K+R)*T;
19
20 % Partitioning of the matrix Knew
21 Knew21 = Knew(s0m2,s0m1);

```

```

22 Knew22 = Knew(s0m2,s0m2);
23
24 % Solve system of equations
25 s0m(s0m2) = - Knew22 \ (Knew21 * s0m(s0m1));
26
27 % Calculate slave values as well
28 s0 = T*s0m;

```

Végül, az időléptetés megvalósítását, a Newmark-séma működését látjuk az alábbiakban. Az időlépések számát az utófeldolgozáshoz szükséges frekvenciafelbontás alapján választjuk meg. A jó frekvenciafelbontás szükséges a diszperzió jelenségének minél pontosabb azonosításához és elemzéséhez.

. e_solution.m

```

1 % Newmark scheme
2 b = 1/4; % Beta_H
3 c = 1/2; % Gamma_H
4 sp = sqrt(S/u0); % Propagation speed inside
5
6 % Time step must be small enough
7 dt = 1/32*(xn(2)-xn(1))/sp;
8
9 % The modified matrices
10 Mstar = M + b*dt^2*K + c*dt*C;
11 Mnew = T.'*Mstar*T; % Reduced mass matrix
12 K = K+R; % Adjusted stiffness matrix
13
14 % Starting condition (displacement is known, derivatives are zero)
15 ds0 = zeros(size(s0)); % First derivative (d/dt) (velocity) is zero
16 dds0 = zeros(size(s0)); % Second derivative (d2/dt2) (acceleration) ←
    is zero
17
18 % Time steps and resolution
19 df = 2; % Frequency resolution
20 max_time = 1/df; % Maximal time
21 nt = ceil(max_time/dt); % Number of timesteps
22 thist = zeros(nt,1); % Preallocate time history
23
24 % Main time stepping cycle
25 for it = 1:nt
26 % Right hand side
27 rhs = T.'*(-K*(s0 + dt*ds0 + dt^2/2*(1-2*b)*dds0)-C*(ds0+dt*(1-c)*←
    dds0));
28
29 % Solution at time step n+1
30 ddsn = T*(Mnew \ rhs); % 2nd ←
    derivative
31 dsn = ds0 + dt*((1-c)*dds0 + c*ddsn); % 1st ←
    derivative
32 sn = s0 + dt*ds0 + dt^2/2*((1-2*b)*dds0 + 2*b*ddsn); % State ←
    vector
33
34 % Move to next step - update state
35 s0 = sn; ds0 = dsn; dds0 = ddsn;
36 % Save time history at middle point
37 thist(it) = s0(end/2);
38 end

```