



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Nemideális húrok csatolt rendszerben

TDK dolgozat, 2010

Készítette:

Rácz Zsuzsanna Zsófia V. Villamosmérnöki szak

zsuzska.racz@gmail.com

Konzulens:

Dr. Fiala Péter, Híradástechnikai Tanszék

fiala@hit.bme.hu

Nemideális húrok csatolt rendszerben
Rácz Zsuzsanna Zsófia V. Vill., zsuzska.racz@gmail.com

Konzulens: Dr. Fiala Péter, Híradástechnikai Tanszék, fiala@hit.bme.hu

A zenében a hangkeltés egyik leggyakoribb módja a húros hangszerek megszólaltatása. Ezek hangzásának különbsége az alapanyagok, méretek és a gerjesztés módjának (pengetéssel, vonóval illetve ütéssel való megszólaltatás) eltéréseire vezethető vissza.

Az akusztikus gitár hat nejlon- vagy acélhúrból és egy húrlábból álló csatolt rendszer, melyben a húrok megpengetésük után közvetlenül is kisugároznak hangot, illetve a húrlábon keresztül a többi húrt és a gitártestet is gerjesztik. A test felerősíti a hangot.

A folyamat pontos elemzéséhez mechanikai-dinamikai és akusztikus megfontolásokra van szükség úgy, hogy a csatolásokat is figyelembe vesszük. A számítástechnika fejlődésével a hangszerekről felállítható modellek egyre sokrétűbbek.

Az analitikus modellek a rendszert leíró differenciálegyenletek analitikus megoldásait szolgáltatják, a numerikus módszerek, például a végeselem-módszer, ezzel szemben az egyenletek közelítő megoldását keresik. Nemideális, inhomogén húrok esetén numerikus szimulációt kell végezni.

A dolgozatban ilyen húrokból álló húr-húrláb rendszer viselkedését, az elemek egymásra hatását vizsgálom és szimulálom pengetés-szerű gerjesztés alkalmazásával. Céлом a homogén és inhomogén húrok fő különbségeinek feltárása a gitáron. Ehhez véges differencia és végeselem-módszert alkalmazok.

Az inhomogén húrok tulajdonságai húrról húrra változók, így általánosságban sztochasztikus folyamat írja le a paraméterek térbeli változását. A sztochasztikus viselkedés megfelelő eloszlási paraméterekkel adható meg.

Monte Carlo-szimulációval a sztochasztikus folyamatok több realizációján keresztül vizsgálom a rendszer válaszában, a megjelenő erőknek statisztikus jellemzőit.

Irodalom:

Fletcher, Neville H. – Rossing, Thomas D.: The Physics of Musical Instruments. 5. ed. New York : Springer, 2005.

French, Richard Mark: Engineering the Guitar : Theory and Practice. New York : Springer, 2009.

Non-ideal strings in a coupled system

Zsuzsanna Zsófia Rácz V. Electrical Eng., zsuzska.racz@gmail.com

Tutor: Dr. Péter Fiala, Dept. of Telecommunications, fiala@hit.bme.hu

One of the most common sound sources in music is the string. The differences between one string and another are mainly down to the material, the dimensions and the method of excitation (i.e. plucking, bowing or striking).

Acoustic guitars are coupled systems consisting of six nylon or steel strings and an inflexible bridge. After plucking one of the strings, it radiates sound directly, but it also excites the rest of the system through the bridge. The guitar body amplifies the sound.

The full analysis of this process requires mechanical, dynamic and acoustic considerations including having regard to the coupling. The development of computer science allowed more exact models of instruments to be created.

Analytical models describe the system with a few differential equations. Numerical methods on the other hand, e.g. finite element models substitute the instrument with a system of discrete elements and describe these with approximating linear equations.

Strings are non-ideal, that is, their mass and therefore their response are not deterministic and can be treated as stochastic processes. The stochastic behaviour can be defined with certain parameters.

In the paper I shall examine and simulate the behaviour of this kind of string-bridge system and the effect the elements have on each other. I shall apply a plucking (piecewise linear) excitation in a numerical model. The aim of the paper is to unveil the main differences between ideal and non-ideal strings in the guitar with finite difference and finite element methods. The coupling can be defined with boundary conditions.

During the analysis I shall apply Monte Carlo simulation to examine many realizations of the stochastic process to determine the expected values and standard deviations of the system response and the forces that appear.

References:

Fletcher, Neville H. – Rossing, Thomas D.: The Physics of Musical Instruments. 5. ed. New York : Springer, 2005.

French, Richard Mark: Engineering the Guitar : Theory and Practice. New York : Springer, 2009.

Tartalomjegyzék

1.	Bevezetés.....	1
1.1.	A dolgozat célja	1
1.2.	A chordofon hangszerek.....	1
1.2.1.	A gitár szerkezete	2
2.	A vizsgált mechanikai elemek.....	4
2.1.	A húr mozgása	4
2.2.	A húrláb mozgása	6
2.3.	Az ideális és nemideális elemek különbségei.....	6
3.	Hangszermodellek.....	9
4.	A húr véges differencia modellje.....	11
4.1.	Pontosság és stabilitás.....	12
4.2.	Az FDM eredményei	13
4.2.1.	Homogén, csillapítatlan húr	13
4.2.2.	Homogén, csillapított húr.....	16
4.2.3.	Inhomogén húrok sztochasztikus modellezése.....	18
4.2.4.	Inhomogén húr	19
4.2.5.	Összefoglalás a véges differencia modellről.....	22
5.	A húr-húrláb rendszer végeelem-modellje	23
5.1.	A húr és a rúd hullámgyenlete végeelem-modellben.....	23
5.2.	Állapotváltozós leírás az időtartományban	27
5.3.	Inhomogén húrok az állapotváltozós végeelem-modellben	30
5.4.	A hibrid végeelem-módszer áttekintése.....	31
6.	Összefoglalás	34
7.	Az ábrák jegyzéke	35
8.	Táblázatok jegyzéke.....	37
9.	Irodalomjegyzék	38

1. Bevezetés

1.1. A dolgozat célja

A dolgozatban hangszermodellezéssel foglalkozom. A témában jelentős irodalom áll rendelkezésre, hangszerek vizsgálatával már évszázadok óta foglalkoznak. A számítástechnika fejlődésével olyan eszköztár áll rendelkezésünkre, mely a megalkotott modellek bonyolultságát és pontosságát növelni tudja, így átfogóbb képet kaphatunk a hangszerek viselkedéséről.

Vizsgálatom tárgya a hangszerhúrok viselkedése a gitáron is megtalálható húr-húrláb csatolásban. A húrláb a gitártest elülső fedlapjára erősített „rúd”, melyre a húrok egyik vége rögzítve van. Ez a rögzítés azt jelenti, hogy a húr adott pontja a húrláb adott pontjával együtt mozog. A csatolt rendszer dinamikus viselkedését megpendítés hatására szimulálom különböző modellezési módszerekkel. Megvizsgálom a véges differencia és végeselem-módszerek alkalmazhatóságának lehetőségét, azt, hogy hogyan lehet a csatolást a modellbe bevinni.

A húrok viselkedésének elemzésekor azok inhomogenitásával is számolok, megvizsgálom, hogy az egyes modellekben hogyan kezelhető a nem egyenletes tömegeloszlás, illetve hogy melyik modell milyen eredményt ad a homogén és az inhomogén húrok szimulációja során. A tényleges tömeg-helyfüggés sok (különböző) húrt tekintve véletlenszerű, így statisztikai jellemzőkkel adom meg az eloszlását.

A dolgozatban először áttekintem a csatolt rendszer elemeinek (a húroknak és a rúdnak) már ismert viselkedését, a jellemző frekvenciákat, az elemek mozgását meghatározó hullámegyenleteket. Majd sorra veszem a nemideális húrok jellemzőit. Nagy vonalakban összefoglalom a hangszerek elemzésénél használt modellek tulajdonságait és a mások által hasonló problémákban elért eredményeket, illetve részletesebben bemutatom az itt bemutatott modellek általános jellemzőit.

A véges differencia és végeselem-módszerekkel kapott eredményeket a 4. és az 5. fejezetekben ismertetem. A vizsgálatokat külön elvégzem ideális és inhomogén húr esetén különböző csatolásokat megvalósítva, vagyis a húrlábat többféleképpen modellezve megmutatom, hogy az egyes módszerek milyen hullámformákat tudnak szimulálni.

1.2. A chordofon hangszerek

A zenei hangszerek komplex rezgőrendszerek, elemeik egymáshoz csatolt oszcillátorok. A hangokat mechanikai, akusztikai vagy elektromos rezgések keltik. Ezek különböző mechanikai/akusztikai elemekben eredhetnek, például húrban, rúdban, membránban, lemezben, légoszlopban, illetve bezárt levegőtérfogatban.

A húros (chordofon, a görög khordé, húr szóból) hangszerek alaptípusai között a legősibbek az *íjak*, melyek Afrikából származnak. A *lírák*, *hárfák* már 5000 éve ismerték a sumerok és az ókori egyiptomiak, de a mai napig használjuk őket (lírákat leginkább Afrikában). A *citera* a mai zongora őse. A pengetéssel megszólaltatott *lant* sok helyütt népi hangszer, mint az 1. táblázat mutatja. Az ukulele a machetéből, a bendzsó pedig hosszúnyakú lantokból alakult ki. A lantot vonóval a tizedik századtól használjuk, ilyen módon alakult ki belőle a hegedű.

1. táblázat: Egyes népek jellemző, pengetéssel megszólaltatott népi hangszere

Nép	Pengetett népi lant
indiai	szitár, tamera
román	kobza
görög	buzuki
orosz	balalajka
portugál	machete
kínai	ruan
japán	gekkin

A gitárt valószínűleg arabok hozták Spanyolországba. A 14. században már egész Európában ismerték. A klasszikus spanyol gitár a 16. század óta nem változott sokat. Az akusztikus gitár sík rezgőtető kialakításában a német születésű C.F. Martin, a modern domború rezgőtető forma építésében pedig Antonio de Torres Jurado jeleskedett, a 19. század közepére már a mai gitárok mintájául szolgáló hangszereket készítettek [1], [2].

1.2.1. A gitár szerkezete

Az akusztikus gitár hat húrból, egy húrlábból (stégből), egy gitárnyakból és egy lemezek által körülzárt levegőtérfogatból (testből) álló összetett mechanikai és akusztikai rezgőrendszer.

A húrok anyaga klasszikus gitáron nejlón, Gibson-gitáron acél. Plektrummal, ujjal vagy hüvelykujjpengetővel hozzuk őket rezgésbe, általában a lefogatlan húr $1/5 - 1/7$ részénél. A hangmagasságot a húr megfeszítésével állítjuk be, de a hosszról is függ. Ezt dinamikusan a fogólapon ujjal, előzetesen pedig kapodaszterrel szabályozhatjuk [3].

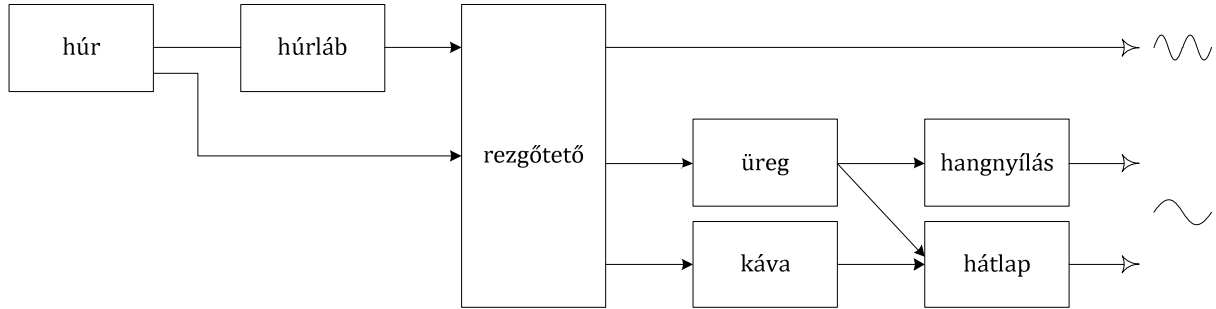
A nyak ellenáll a húrok feszítésének, de nem olyan nehéz, hogy károsan befolyásolja a rezonanciát. Nem elégséges merevsége a gitár hangkitartó képességét csökkenti, ugyanis a húr őt is megrezgetti. A húrok rezgését a húrláb közvetíti a testhez.

A nagy kiterjedésű rezonátorra azért van szükség, mert a rezgésbe hozott húr magában csak kis hangintenzitást tud létrehozni. Ennek oka egyrészt a kis megmozgatott légtömeg (kis részecskesebesség), másrészt pedig az, hogy a rezgéssel létrejövő nyomásnövekedés és –csökkenés a húr körül nincs elzárva (felülettel határolva), ezért gyors nyomáskiegyenlítődéssel megy végbe. A rezonátorban a húr kényszerrezgést kelt a rá kifejtett erővel, így a megmozgatott légtömeg nagyobb [4], [5].

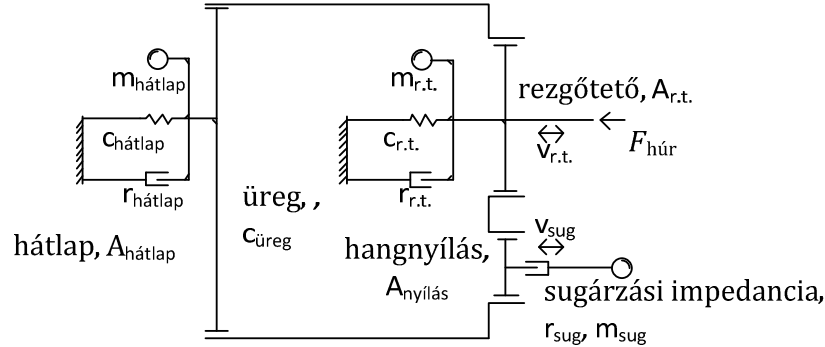
A gitártest előlapjában, kávéjában, hátlapjában és az általuk körülzárt levegőtérfogatban egyaránt állóhullámok alakulnak ki. A levegő a hangnyíláson keresztül sugározza le a hangot. A rezonátor mérete és formája befolyásolja a lehetséges módusalakokat. A rezgőtetőt azért, hogy a húrok feszítésének ellenálljon, gerendák merevítik, erősítik. Ennek alakja lehet X, legyező, rács stb., ez az elrendezés szintén lényeges szerepet játszik a hangzás kialakításában [6].

Az egyes elemek összekapcsolódását mutatja az 1. ábra. Az elrendezés szerint a húr a húrlábon keresztül csatolva van a rezgőtetővel. Ez a csatolás hozza létre a magasabb frekvenciájú hangokat. A nyakra kötve szintén a rezgőtetővel kerül csatolásba, mely az üreget és a kávé rezgésbe hozva gerjeszti a bezárt levegőtérfogatot és a hátlapot, így sugárzódnak le az alacsonyabb frekvenciájú hangok. A 2. ábra a gitár egy mechanikai-akusztikai egyszerűsített modelljét ábrázolja, melynek elektromos ekvivalens hálózata a 3. ábrán látható. A húr ezeken már nem szerepel, csak az általa a húrlábra kifejtett erő van feltüntetve. A mechanikai helyettesítő képek tömeg, rugó és ellenállás összekapcsolásával modellezik az egyes oszcillátorokat, amelyek a gitártestet alkotják.

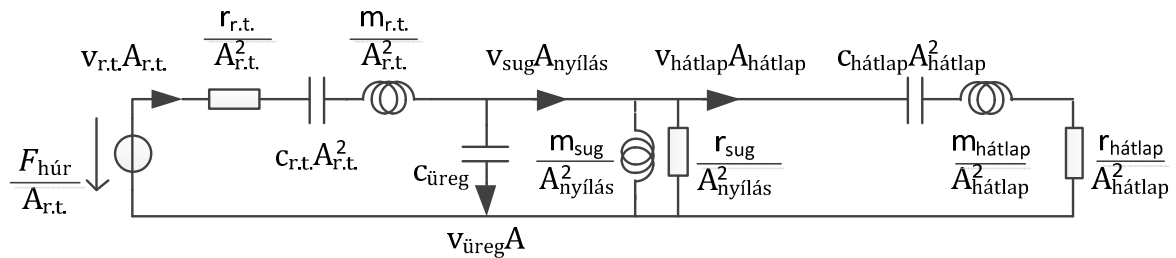
1. ábra: A gitár elemei közti csatolások [7] és [8] alapján



2. ábra: A gitár egy akusztikai/mechanikai modellje [9] alapján



3. ábra: A gitár elektromos analóg hálózata [9] alapján



A rezonátor gerjesztő jele a vele csatolásban lévő húrból származó (a húr által kifejtett) erő, ez hozza létre a dinamikus rendszerválaszt. Ennek spektruma mérhető, így meg lehet határozni a hálózat átvitelét [10]. Boullosa például ilyen módon vizsgálta a rezgőtető anyagának az akusztikai lecsengési időre vett hatását.

Egy ideális, csillapítatlan, tökéletesen merev felületekhez rögzített feszített húrból az erő megpengetés után négyszögjel alakú időfüggést mutat. Ha csillapító elemekkel (a levegő, a gitártest ellenállása) csatoljuk a húrt, akkor az időfüggvény lecseng.

2. A vizsgált mechanikai elemek

A vizsgálat tárgyát képező erőt a húr fejt ki, mely közvetlenül a húrlábra van illesztve. A fejezetben ezek mechanikai, dinamikus viselkedését tekintem át.

2.1. A húr mozgása

Feszített húr viselkedésének elemzésével már Püthagorasz (ie. 582-497) is foglalkozott: fogalmazta a rezonancia alaptörvényét, vagyis hogy a húron kelthető hang magassága a húrhossztól függ.

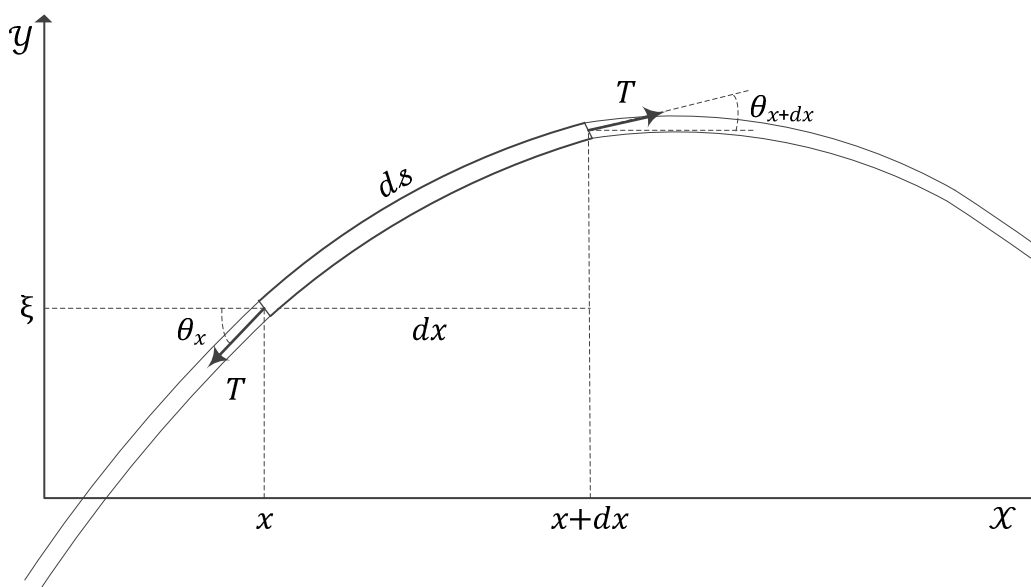
Marin Mersenne három törvényével ezt pontosította: kimondta, hogy a frekvencia fordítva arányos a húrhosszal, egyenesen a feszítőerő gyökével, és fordítva az egységnyi hosszra eső húrtömeggel [11]. Az összefüggést Galilei is megfogalmazta. Így például előnyös a mély E1, A, D húrok nagy fajsúlyú fémhuzallal történő betekérése. (Természetesen a húr és a bevonat anyaga befolyásolja a hangspektrumot.)

Az ideális húr homogén, nincs hajlító merevsége (tökéletesen rugalmas), így csak a feszítőerő ad neki merevséget. Transzverzális kimozdulása kicsiny a húrhosszhoz képest, teljesül rá a Hooke-törvény, a feszítőerő állandó.

A húrok rezgése kelthető pengetéssel, ütéssel, vonóval, dörzsöléssel, illetve csavarással. Az első három gerjesztési típussal transzverzális hullámok kelthetők, így hangszerekben általában ez a megszokott megszólaltatási mód. A torziós és longitudinális hullámok a húrból csaknem tízszeres sebességgel terjednek, ezért azonos hangmagassághoz lényegesen hosszabb húrra lenne szükség [12].

A kifeszített húr egyensúlyi helyzetében egyenes. A húrhosszra merőlegesen kitérítve a húr egy ds szegmensének széleire tangenciálisan T erő hat (4. ábra). A húr kitérítése miatt a szegmensszélek érintője $\theta(x)$ szöget zár be a vízszintessel. A szegmens vízszintes vetülete dx , kitérése pedig $\xi(x)$.

4. ábra: A kitérített húrra ható erők [8] és [13] alapján



Az eredő erő a húrelemet egyensúlyi helyzetébe igyekszik visszatéríteni (a megjelenő erő a húrelem görbületsége miatt nem párhuzamos). Az eredő függőleges komponense Taylor-soros közelítéssel:

$$dF_y = (T \sin \theta)_{x+dx} - (T \sin \theta)_x \cong T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

Newton 2. törvényét alkalmazva megkapható a húr transzverzális hullámegyenlete, ahol a hullám terjedési sebességének négyzete $c^2 = \frac{T}{\mu}$. A húrban (mint a rezgőrendszerekben általában) a rugómerevség miatt megjelenő visszatérítő erő „verseng” a tehetetlenséggel, vagyis a rezgés során a húrszegmensek potenciális energiát alakítanak kinetikus energiává és vissza. (A transzverzális mozgás nem feltétlenül polarizált.) [13]

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Az erő húrral párhuzamos komponense:

$$dF_x = (T \cos \theta)_{x+dx} - (T \cos \theta)_x = T(\cos \theta_{x+dx} - \cos \theta_x)$$

Kis kitérés esetén a szög is kicsi, tehát a koszinuszok kiejtik egymást (nincs eredő erő az x tengelyre párhuzamosan). (Megjegyzés: nemideális húrban longitudinális és torziós rezgések is megjelennek, ld. fönt.)

A differenciális hullámegyenlet szeparálással oldható meg. A 18. században Jean le Rond D'Alembert megmutatta, hogy a hullámegyenlet általános megoldása terjedő hullámként adódik [14], [15]. A hangszeren a húrvégek rögzítettek, ez alkotja a megoldásnál a határfeltételt, a kezdeti érték pedig pengetés esetén a gerjesztés alakja.

Pengetés után a húron lefutó jel alakja (a hangszín) csak a kezdeti kitérés helyétől és alakjától függ (feltéve, hogy a kitérés maximuma lényegesen kisebb a hosszánál, általában néhány százalékát nem haladja meg, illetve hogy a megpengetés lassan történik). Pontszerűen, háromszögjellel „pengetett”, ideálisan rugalmas húron ugyanilyen alakú lefutás vonul végig, míg az állóhullámú rezgés burkolója szimmetrikus (az állóhullámok a jelalak néhány átfutása után kialakulnak). A gerjesztés amplitúdója a keltett hangintenzitást határozza meg.

A sajátfrekvenciákat a sajátérték-egyenletből lehet megkapni: $K\xi = \omega^2 M\xi$. Itt K képviseli a rugóállandót, M a tömeget, ξ a kitérés, ω pedig a rezonáns frekvencia. Minden sajátfrekvenciához tartozik egy módusalak (sajátvektor), mellyel a struktúra rezeg. A sajátfrekvenciákat gerjesztve „nagy” amplitúdójú választ kapunk. Az ideális húr rezonanciafrekvenciái $n\lambda = 2l$ -ből $f_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ alakban adódnak, ahol n a rendszám, l a húrhossz, T a feszítőerő, μ pedig a hosszegységre eső tömeg¹ (elosztott paraméterű rendszer). A húr az egyik olyan egyszerű struktúra, melynek rezonanciafrekvenciái az alaphfrekvencia egész számú többszörösei.

A részhangok aránya pengetett gerjesztés esetén lecsengő. Az egyes sajátfrekvenciák relatív (tehát az alapharmonikushoz képesti) intenzitását mutatja a 2. táblázat.

2. táblázat: A részhangok relatív intenzitása pengetés esetén [12]

felhang	1	2	3	4	5	6	7
rel. int.	1.00	0.81	0.56	0.32	0.13	0.03	0.00

¹ Más megfogalmazásban a húrt feszítő erő $T = 4\mu l^2 f_1^2$, ahol f_1 az alaphfrekvencia.

A pengetés helyén nem jön létre nullhely (csomópont), ezért az ott csomópontot tartalmazó felhangok hiányoznak a spektrumból (például az ötödénél megpendített húr hangjából minden ötödik sajátfrekvencia). Ez azt is jelenti, hogy a húrvéghez közeli gerjesztés felhangokban gazdagabb hangot kelt. Gyors kilendítés esetén egyrészt fémesebb hangszínt kapunk, mivel a háromszögjel homorúbb jellege miatt felhangdúsabb lesz a megszólaló hang a lassú pengetéshez képest. Nem pontszerű (pl. ujj) gerjesztés tompább háromszögjelet eredményez, a hang fátyolosabb (több felhang hiányzik, mint pontszerű gerjesztés esetén).

Legnagyobb amplitúdó a húr közepén jelenhet meg (kivéve, ha páros rendszámú felhangok a dominánsak), széleken gerjesztve kis amplitúdóval is nagyobb hangintenzitás hozható létre [12].

A húr által kifejtett erő a kitérő húr által nyugalmi pozíciójával bezárt szög segítségével közelíthető (kis szöget feltételezve):

$$F \cong T \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

2.2. A húrláb mozgása

A rudakban transzverzális rezgésen kívül longitudinális és torziós rezgésekkel is számolni kell. A longitudinális rezgés terjedési sebessége és frekvenciája vékony rúdban a feszítőerőtől nem függ.

Ha egy rövid, A keresztmetszetű, $\rho A \cdot dx$ tömegű rúdelemre két végén különböző erő hat (mert például a rudat hosszával párhuzamos irányban megütötték), akkor a rúdelem végei nem azonos elmozdulást tesznek, hosszirányban megnyúlik. A mechanikai feszültség a Hooke-törvény szerint $\frac{F}{A} = E \frac{\partial s}{\partial x}$, ahol $\frac{\partial s}{\partial x}$ a megnyúlás, E pedig az anyag rugalmassági (Young) modulusa. A hullámegyenlet ismét Newton II. törvényét alkalmazva alakul ki.

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

A longitudinális hullám tehát $c_L = \sqrt{E/\rho}$ sebességgel terjed a rúdban.

Hajlítórengés során a rúdelemre ható eredő erő a nyíróerőkből adódik. A nyíróerő a forgatónyomaték hely szerinti első deriváltja, a forgatónyomaték pedig a kitérés második deriváltja. A nyomatékot $M = \frac{EI}{r}$ adja, ahol r a rúdelem görbülete, I pedig a felület (keresztmetszet) másodrendű nyomatéka (inerciája): $I = \int y^2 dA$. Összességében a következő hullámegyenlet adódik:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4}$$

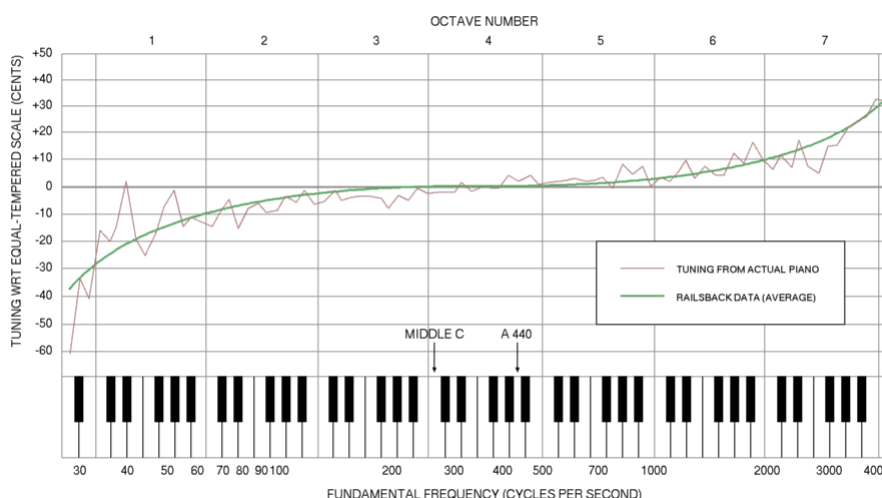
A negyedfokú differenciálegyenletnek nem írható föl általánosan a v sebességgel terjedő megoldása. A hullámok terjedési sebessége frekvenciafüggő, vagyis a rúdban diszperz a terjedés.

2.3. Az ideális és nemideális elemek különbségei

A reális húrok nem teljesen rugalmasak. Sajátrezgésüket befolyásolja a véges merevség, mely elhangolódási jelenséget (inharmonicitást) okoz. Az elhangolódás a nagyobb rendszámú felhangokat növeli jobban, és a magasabb alapfrekvenciájú húrokon kisebb, mint az alacsonyabb alapfrekvenciájú húrokon. Hatása a húrhossz növelésével, a húrok bevonatolásával (tömegük növelésével) vagy megkettőzésével csökkenthető. Zongora esetén annak nagy hangterjedelme miatt a legmélyebb és

legmagasabb húrokon ezek ellenére megmarad az inharmonicitás, ezért a húrokat az egyenlően temperált hangköztávolságoktól eltérő hangközökre hangolják. Ezeket a hangközarányokat mutatja a Railsback-görbe (5. ábra) [16], [17], [18].

5. ábra: A Railsback-görbe Railsback, Martin és Ward adatai alapján (forrás: Wikipedia) [18]



Ha a megpengetés amplitúdója nem kicsi, de feszítőmerevséggel nem kell számolni, akkor a hullámegyenlet egy korrekciós taggal bővül, mely által a terjedési sebesség a kitérés hely szerinti első deriváltjának négyzetével együtt nő. Bolwell ebből a nemlineáris meredekség-függésből származtat sok különbséget az ideális és nemideális húrok közt [19]. Állandó feszítettségű húr nagy amplitúdójú nemlineáris rezgéseit elemezte társaival Lai [20]. Az általuk kiszámított modell jól közelíti a valós rezgések magasabb felharmonikusait anélkül, hogy korlátozná a rezgés amplitúdóját.

Játék közben a pengetési hely sem állandó, az idővel változik. A pozíció meghatározza a felhangtartalmat, így például a húrlábra érkező rezgéshullámból becsülni lehet azt, hogy hol pengették meg a húr. Ennek a hangszintézisnél van jelentősége [21].

A húr lefogása kissé megnyújtja a húr, melynek rugalmassági modulusától függően a feszítőerő megváltozása a hangmagasságot kissé megemelheti. Az acélhúrok rugalmassági modulusa a nejlónhúrokénak körülbelül harmincszorosa, így acélhúroknál a jelenség könnyebben észrevehető. A hatás a lefogás helyétől függ.

A nemideális tulajdonságok kompenzálása végett helyezik elferdítve a gitárra a húrlábat.

Az elemek (húr és rúd) inhomogenitása azt jelenti, hogy paramétereik nem állandóak a teljes húrban, illetve rúdiban. Például a hosszegységre eső tömeg helyfüggő. Ha a rúd nem homogén, akkor az E , I , ρ és A paraméterek mind helyfüggőek lehetnek.

Inhomogén húr esetén a húregyenlet alakja az alábbi:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right] = \mu(x) \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2}$$

Ha a feszítőerő állandó, a hosszegységre vonatkozó tömeg pedig lineárisan változik (az egyik vége felé elvékonyodik), akkor a mindkét végén rögzített húr sajátfrekvenciái zárt alakban kifejezhetők [22]:

$$\mu(x) = \mu_0(1 + \alpha \frac{x}{l})$$

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu_0(1 + 0.5\alpha)}}$$

Egy gitárhúr inhomogenitása azonban ritkán ilyen szabályszerű, a húr elvékonyodik a terhelési helyeken (ahol pengetjük), szennyeződésektől megvastagodhat a lefogási pozíciókban, tehát a tömeg nem írható le képlettel. Egy húron belüli eltéréseken felül pedig a paraméterek húrról húrra is mások és mások, de eloszlásokkal és momentumokkal jellemezhetők.

A numerikus vizsgálat során csak a húr inhomogenitásának hatását vizsgálom a legegyszerűbb, meghatározott helyű ideálisan pontszerű pengetés esetén. A húrparamétereket sztochasztikus folyamatnak tekintem, és adott statisztikus paraméterekkel jellemezem.

3. Hangszermodellek

A kialakuló hang, a hangszerműködés pontos modellezéséhez dinamikai, geometriai, akusztikai megfontolásokat kell tenni a csatolások figyelembevételével. A hangminőség elemzéséhez még pszichoakusztikai ismeretekre is szükség van. A hangszereket a számítástechnika ugrásszerű fejlődése előtt leginkább nagy vonalakban, igen általánosan jellemezték (a húros hangszerek között például elsőként a hegedűt – az első helyettesítő modell is erre született 1962-ben [23]). Ennek oka, hogy a pontos numerikus modellek megalkotása igen számításigényes.

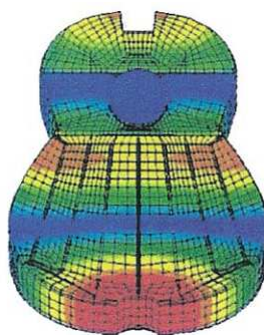
Egy hangszermodell lehet analitikus, illetve numerikus. Az analitikus modellek néhány csatolt (differenciál)egyenlettel jellemzik a hangszert. A karakterisztika nem tetszőlegesen pontos, de könnyen kezelhető. A numerikus modellek véges sok pontra vagy elemre bontják a szerkezetet, és ezek mindegyikét csatolt egyenlettel írják le.

A **véges differencia modellek** (FDM, Finite Difference Method) a deriváltakat különbségekkel közelítik. A húr esetében a véges differencia modell a tömeg-rugó modellel ekvivalens eredményt ad [24].

Hegedű és gitár húrjának mozgását (kitérését és sebességét) hasonlította össze véges differencia modellen alapuló szimulációval például Hernández et al. [25]

A **végelem-modellek** (FEM, Finite Element Method) a tartományt egyszerűbben kezelhető részekre szegmentálják, és a differenciálegyenleteket ezeken oldják meg. A blokkokra bontás bonyolultabb geometriákat is hatékonyan számíthatóvá tesz, ugyanis a modellben könnyen számítható ritkamátrixok jönnek ki. Végelem-modellel megmutatható például, hogy a rezgőtető sűrűségétől függenek a rezonanciafrekvenciák értékei (bár a módusalakok és a frekvenciák egymáshoz képesti viszonya nem) [26]. Elejabarrieta és Santamaría szintén FEM-mel modellezte a gitártest által bezárt levegő módusait. Az egyik módusalakra kapott eredményük látható a 6. ábrán. A grafikon színezése a keltett hangnyomást mutatja.

6. ábra: A gitártestbe zárt levegő rezgésének egyik módusa végelem-modellel [27]. A színek a hangnyomás-hullám amplitúdóját jelképezik.



A gitár fedlapját, hátlapját és a kávát is modellezték FEM-mel. Stanciu et al. a merevítő gerendák elrendezését is figyelembe véve elemezték a gitártest oldalainak módusalakjait [28]. Vizsgálták a Young modulus, a sűrűség és a lapvastagság hatását a lemezekre, illetve kimutatták, hogy a sajátfrekvenciák csökkennek, ha a merevítő gerendák számát növeljük.

A rezgőtető rezonanciáját a húrláb jelenléte is befolyásolja. A húrláb tömegének és merevségének a fedlap sajátrezgésére való hatását vizsgálta Torres és Boullosa. Kiszámított FEM-

modelljüket lézeres rezgésmérővel kapott eredményekkel hasonlították össze, és nagy korrelációt találtak a kettő között [29].

A **peremelem-modellek** (Boundary Element Method) a végeselem-modellekhez hasonlítanak, de integrálegyenleteket oldanak meg oly módon, hogy térfogatintegrált felületintegrállá alakítanak [30], így csak a határfelületet kell diszkretizálni. Ez távoltéri sugárzási vizsgálatoknál előnyös. A módszer hátránya, hogy teli mátrixokkal leírt egyenletrendszerek megoldására vezet, tehát az egyenletszám csökkenését nem feltétlenül kíséri kisebb számításigény [7].

A csatolt rendszerek modellezése az egyes elemektől és a csatolás természetétől függően elbonyolódhat. Ezért alkalmaznak egyszerűsített modelleket, például tökéletesen merev megtámasztásokon kifeszített húrokat, illetve húr-hangszertest csatolás húrlábon keresztüli modellezését, mint ebben a dolgozatban is. Természetesen bonyolultabb hangszermodelleket is megvalósítottak, például Inácio, Antunes és Wright hegedűre vizsgálta a csatolt rendszer viselkedését az időtartományban, a rendszer szabadrezgéseinek módusain keresztül [31].

4. A húr véges differencia modellje

A véges differencia módszer a parciális deriváltakat véges pontrácson számított differenciákkal közelíti, azaz a folytonos függvény összefüggő értelmezési tartományát diszkrét, véges számú pontra bontja. A húr esetén a kitérés értelmezési tartománya kétdimenziós: $\xi(x, t)$. Az FDM ezt a diszkrét pontokon értelmezett $\hat{\xi}(x_n, t_m)$ függvénnyel közelíti. A pontrácson x irányban a pontok távolsága Δx , t irányban pedig Δt , tehát adódóan a mintavételi frekvencia, mely a modellt jellemzi, $f_s = \frac{1}{\Delta t}$ alakban adódik. A $\hat{\xi}(x_n, t_m)$ azokban a pontokban értelmezett, ahol $x = n \cdot \Delta x$, $t = m \cdot \Delta t$.

A modell megalkotásakor a felbontásra (a rács finomságára) stabilitási körülményeket kell figyelembe venni. A közelítés történhet előre- vagy hátralépő (explicit vagy implicit) formulával. Az egyenletsohaság konkrét megoldásához határfeltételek és kezdeti értékek megadására van szükség.

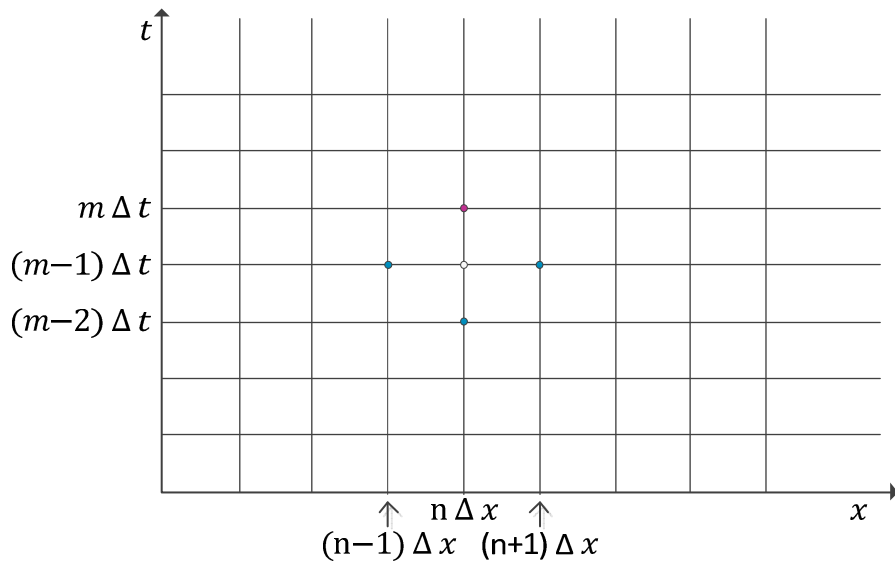
Az első és második deriváltak a következő különbségekkel közelíthetők:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} &\cong \frac{\xi(x, t) - \xi(x - \Delta x, t)}{\Delta x} \\ \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} &\cong \frac{\xi(x + \Delta x, t) - 2\xi(x, t) + \xi(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} &\cong \frac{\xi(x, t) - \xi(x, t - \Delta t)}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} &\cong \frac{\xi(x, t + \Delta t) - 2\xi(x, t) + \xi(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2}\end{aligned}$$

A húr transzverzális rezgéseire kapott hullámegyenlet a fenti közelítések behelyettesítésével rekurzív formát ölt (a „következő” időpontra explicit, kétlépéses formula adódik).

$$\begin{aligned}\frac{T}{\mu} \frac{\hat{\xi}(x + \Delta x, t) - 2\hat{\xi}(x, t) + \hat{\xi}(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} &= \frac{\hat{\xi}(x, t + \Delta t) - 2\hat{\xi}(x, t) + \hat{\xi}(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2} \\ \hat{\xi}(x, t + \Delta t) &= \frac{\Delta t^2 T}{\Delta x^2 \mu} \left(\hat{\xi}(x + \Delta x, t) + \hat{\xi}(x - \Delta x, t) \right) - \hat{\xi}(x, t - \Delta t) + \left(2 - 2 \frac{\Delta t^2 T}{\Delta x^2 \mu} \right) \hat{\xi}(x, t)\end{aligned}$$

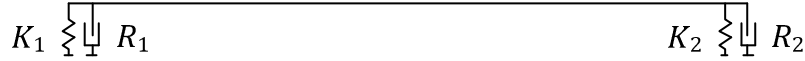
7. ábra: A véges differencia modell pontrácsa. A piros pont kitérésének kiszámításához a kék pontok szükségesek



A 7. ábra illusztrálja a közelítő hullámegyenlet szerint az egy (piros) rácspont kitérésének számításához szükséges egyéb (kék) rácspontokat.

A peremfeltétel a többi elemhez való csatolás segítségével adható meg. A dolgozatban megvalósított modellben a húr végei mindkét oldalon rugó-ellenállás taghoz rögzítettek (8. ábra), melyek paraméterei megválaszthatók.

8. ábra: A húr peremfeltételei a véges differencia modellben



A húr szélein lévő pontokban a hullámegyenlet a következő kifejezéssel módosul.

$$F_y = K \cdot \xi + R \cdot \dot{\xi}$$

Ebből a differenciák behelyettesítésével a végpontokra is explicit formula adódik.

$$\begin{aligned}\xi(0, t + \Delta t) &= \left(\frac{T}{R_1} \frac{\Delta t}{\Delta x} + 1 - \frac{K_1 \Delta t}{R_1} \right) \xi(0, t) - \frac{T}{R_1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \xi(\Delta x, t) \\ \xi(l, t + \Delta t) &= \frac{T}{R_2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \xi(l - \Delta x, t) + \left(1 - \frac{T}{R_2} \frac{\Delta t}{\Delta x} - \frac{K_2 \Delta t}{R_2} \right) \xi(l, t)\end{aligned}$$

Ha a húr tökéletesen merev felülethez rögzítjük, a peremfeltétel $\xi(0, t) = \xi(l, t) = 0 \forall t$ alakú lesz.

A kezdeti értékeket ideálisan lassú pengetés esetén a $\xi(x, 0) = \xi_0(x)$ és $v(x, 0) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{t=0} = 0$ egyenletek jelentik. Itt $\xi_0(x)$ a megpengetés jelalakja, ami esetünkben háromszögjel.

4.1. Pontosság és stabilitás

A modellel szimulált eredmények a valós jelalakot annál jobban közelítik, minél kisebbre választjuk a rácspontok távolságait. Ez azonban megnöveli a számításigényt, ráadásul Δx és Δt nem választható meg tetszőlegesen (egymástól függetlenül).

A modell stabilitásának és pontosságának elemzésekor fontos paraméter a két rácstávolság hányadosa: $\psi = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

A modell konvergens, ha egyrészt konzisztens, másrészt stabil. Az FDM akkor konzisztens, ha a közelítő differenciaegyenletek megoldása $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ mellett a folytonos differenciálegyenlet megoldásához tart. A stabilitás azt jelenti, hogy a megoldás $m \rightarrow \infty$ és adott Δt esetén korlátos, vagy $\Delta t \rightarrow 0$ és adott m esetén korlátos. A stabilitás ideális húr esetén akkor teljesül, ha $\psi = \frac{\Delta x}{\Delta t} \geq c$ [32]. Ez azt jelenti, hogy adott Δx és c esetén Δt -re adódik egy felső korlát, vagyis van egy minimális mintavételi frekvencia.

A paraméterek megválasztásánál előnyös figyelembe venni, hogy az értelmezési tartományok diszkretizálása következményeként numerikus diszperzió jelenhet meg. Ez abban nyilvánul meg, hogy a módusok torzulnak, mert az egyes térbeli frekvenciájú komponensek terjedési sebessége eltér. A numerikus diszperzió elkerülhető $\frac{\Delta x}{\Delta t} = c$ választással, ugyanis ekkor a modell minden hullámszáma stabil modell lesz. [32]

Nemideális húrra, mikor c helyfüggő, $\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq c_{max}$ választással az instabilitás kiküszöbölhető, de a numerikus diszperzió mindenképpen megjelenik.

4.2. Az FDM eredményei

A véges differencia modellt MATLAB-ban állítottam elő. A tényleges számításokat végző szkript paraméterei a pontrács x_n és t_m vektorai: $\underline{x} = [0 \ dx \ 2dx \ \dots \ N \cdot dx]$ és $\underline{t} = [0 \ dt \ 2dt \ \dots \ M \cdot dt]$, a terjedési sebesség, a feszítőerő, a kimozdulás kezdeti értéke: $\xi_0 = [\xi_0^{x=0} \ \xi_0^{x=dx} \ \xi_0^{x=2dx} \ \dots]$ és a peremfeltételek $[R_1 \ K_1 \ R_2 \ K_2]$ alakban. Minden jellemzőt fizikai egységekben lehet megadni. A program a kitérés hely- és időfüggését t szerinti ciklussal számítja. Először a húr két végének kitérését határozza, ebből a többi ponté már mátrixszorzással adódik. A húr rögzítéseit terhelő erőt a teljes pontrácson meghatározott $\hat{\xi}(x, t)$ -ből $F \cong T \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$ alapján lehet meghatározni a differenciás közelítéssel.

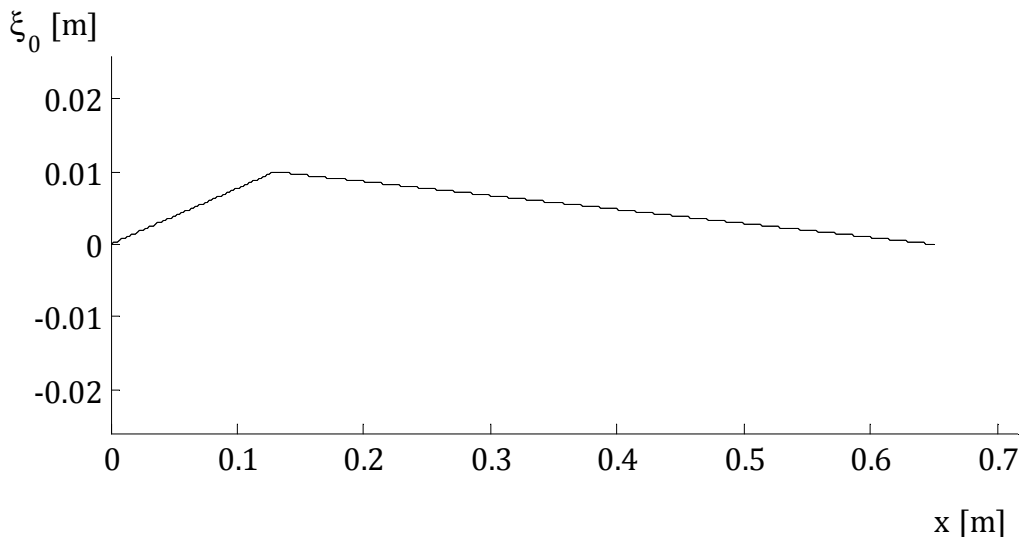
A szimulációt 196 Hz alaphérvenciájú G húrra végeztem. Homogén, $\mu = 10^{-3} \left[\frac{kg}{m} \right]$ tömegű, ideális húr tekintve a feszítőerő az alaphérvenciával számítható. Ezzel a becsléssel élve határoztam meg a transzverzális hullámok terjedési sebességét:

$$T = 4\mu l^2 f_1^2 = 4 \cdot 10^{-3} \left[\frac{kg}{m} \right] \cdot (0,65[m])^2 \cdot \left(196 \left[\frac{1}{s} \right] \right)^2 \cong 65 \left[\frac{kg \cdot m}{s^2} \right]$$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 255 \left[\frac{m}{s} \right]$$

A kezdeti érték minden esetben ideális, pontszerű, szakaszonként lineáris háromszöggel történő megpengetés volt. Ennek jelalakját a 9. ábra mutatja. A pendítés helye a húr ötöde. A húr egyik bundnál sincs lefogva.

9. ábra: A megpengetett húr kitérésének kezdeti értéke (a pengetés jelalakja)



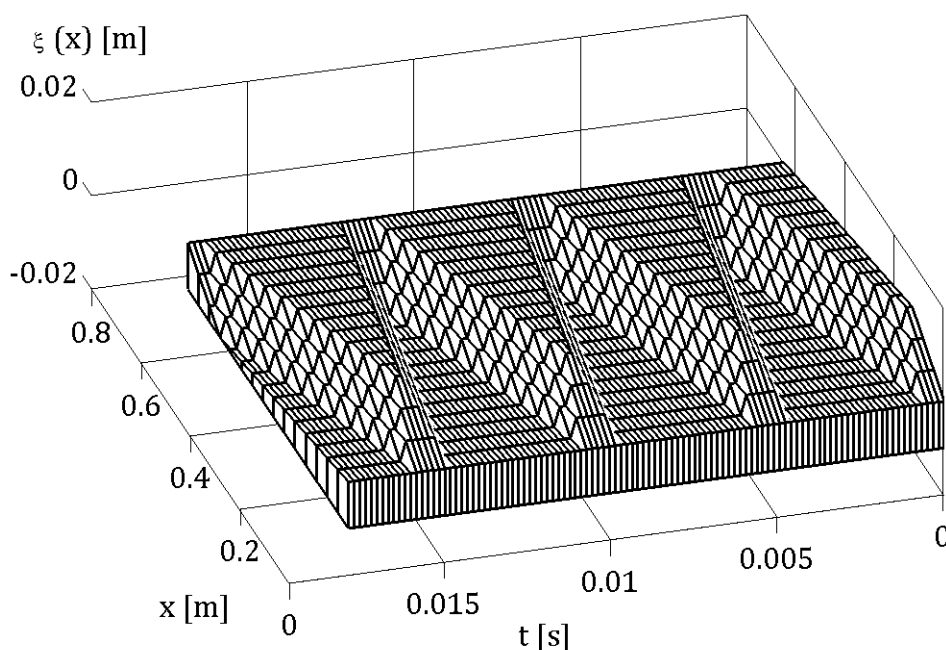
4.2.1. Homogén, csillapítatlan húr

Az első esetben homogén húr tekintetem, tehát a hosszegységre vonatkozó tömeg nem függ a helytől, állandó. A húrvégekről a rezgés csillapítatlanul tud visszaverődni, $K_1 = K_2 = 0$ és

$R_1 = R_2 \rightarrow \infty$, vagyis tökéletesen merev a húr rögzítése. Ezzel az esettel könnyen tesztelhető, hogy megfelelően működik-e a modell.

A modellben kiszámított hullámalak hely- és időfüggését mutatja az ún. vízszintes-grafikon (10. ábra), mely háromdimenzióban ábrázolja a kitérést, és a szomszédos rácspontokhoz tartozó értékeket összeköti. A függőleges tengely jelenti a kitérést. A (közel) szemközti vízszintes időtengely balra növekszik. A befelé mutató x -tengely a húron belüli pozíciót jelképezi, tehát $x \in [0; 0,65 \text{ cm}]$. A grafikon jobb szélén jelenik meg a kezdeti érték (a megpendítés), mely elengedés után végigfut a húron. A rezgés amplitúdója konstans. A rezgés másik szélsőértéke (minimumhelye) a grafikon bal oldalán, az utolsó ábrázolt időpontban figyelhető meg.

10. ábra: A megpendített homogén, csillapítatlan húr vízszintes-görbéje



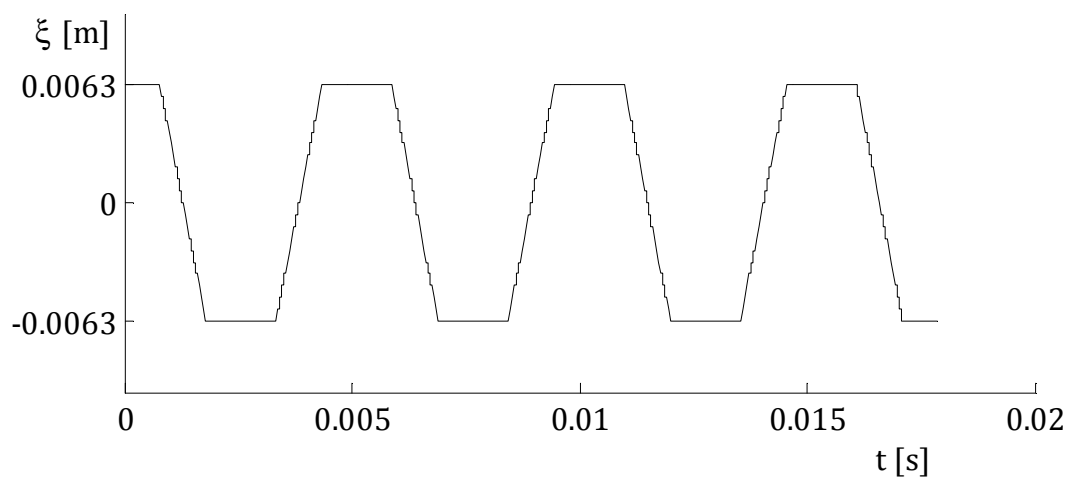
A 10. ábra grafikonjának x tengelyre merőleges elmettségével egy adott pont kitérésének időfüggését kaphatjuk. A 11. ábra a középpontot mutatja, melyre szimmetrikus, periodikus jel adódott, vagyis a nyugalmi helyzethez képest pozitív irányba ugyanakkora a kitérése, mint negatív irányba. A 12. ábra a húr végpontjához közeli pont mozgását illusztrálja (a pengetés helyéhez közelebb). Látható, hogy ekkor pozitív irányba (tehát a megpendítés irányába) tolódik a kitérés időfüggvénye, és a jelalak periodikus, de nem szimmetrikus.

A kitérés időtől független megjelenítése (a kitérés maximuma és minimuma) látható a 13. ábra grafikonján. A hullám a két szélsőérték között változik a 10. ábra időfüggvényén látható módon. Az egyes pontok kitérésének tartománya a 13. ábra alapján úgy kapható, ha a függőleges tengellyel párhuzamosan, az adott pontnak megfelelő x értéknél elmetsszük a két burkolót. (Ezt a berajzolt két nyíl szemlélteti.)

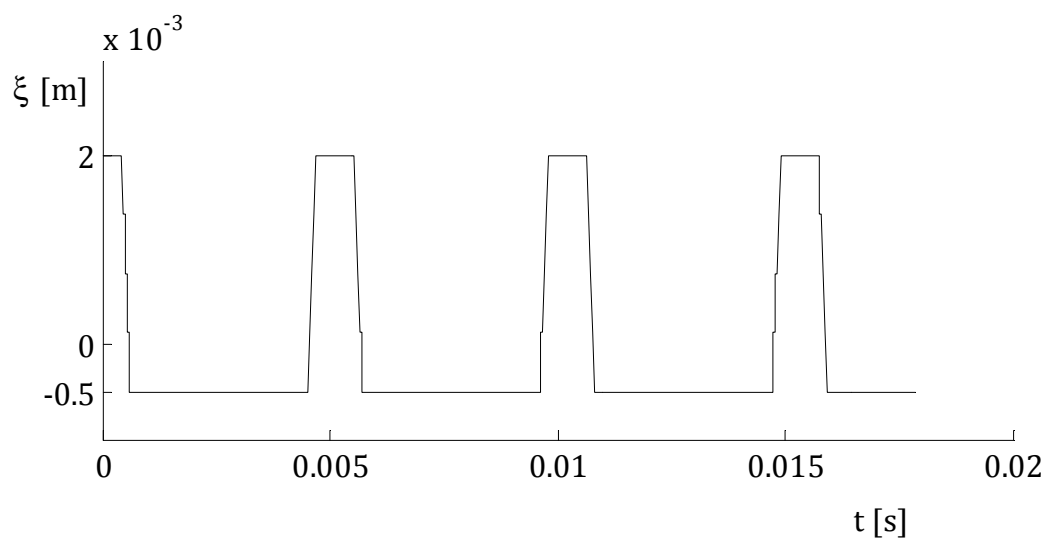
A kitérés húrvégnél vett deriváltjából számítható erő (14. ábra) időfüggése ebben az egyszerű esetben négyzetjel. Ennek kitöltési tényezője a pengetési helyből adódóan 20% (1/5). Ha a húr középpontjában történne a pengetés, a kitöltés 50% lenne.

A modell az ideális, mereven rögzített húr esetén a véges differencia modell a várakozásoknak megfelelő eredményeket adja.

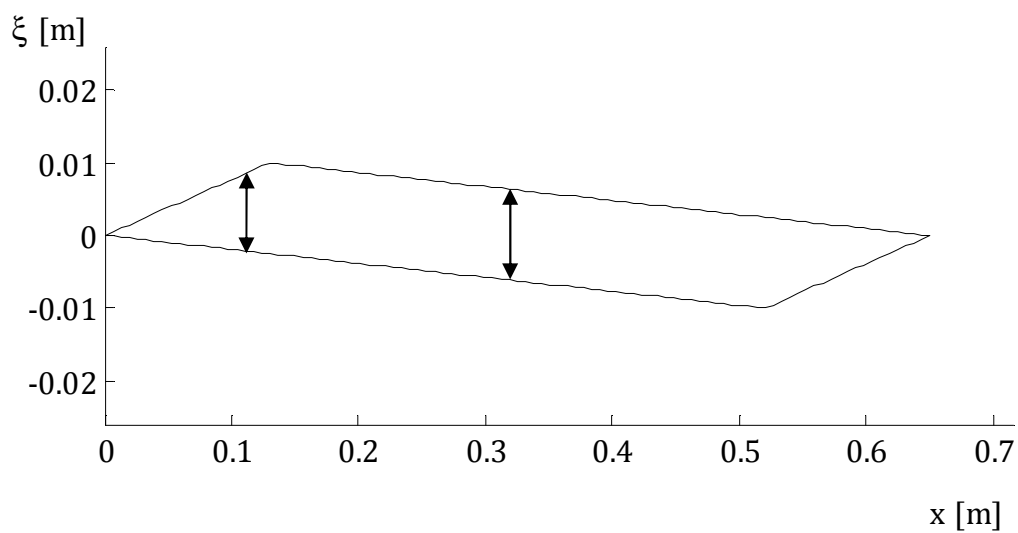
11. ábra: A homogén, csillapítatlan húr középpontjában a kitérés időfüggése



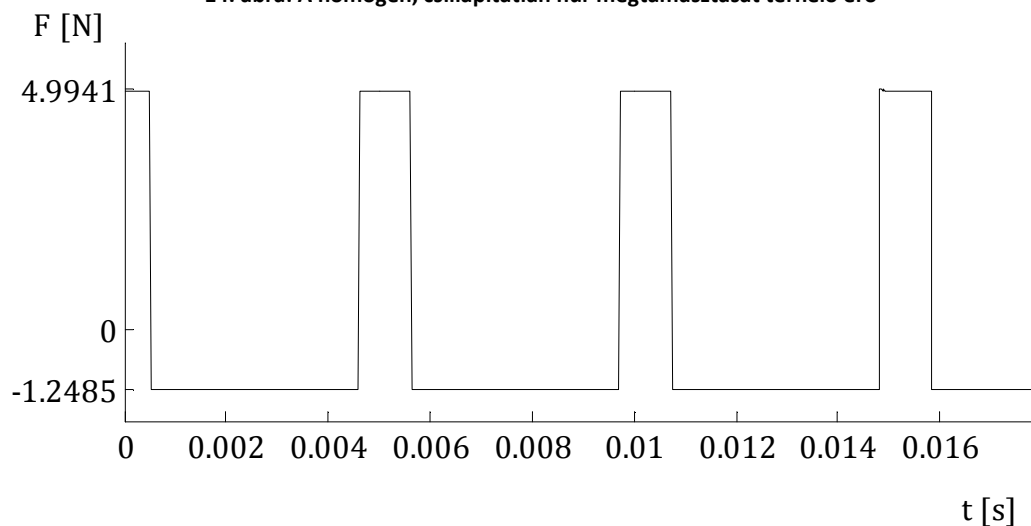
12. ábra: A homogén, csillapítatlan húr végéhez közeli pont kitérésének időfüggése



13. ábra: A megpendített, homogén, csillapítatlan húr rezgésének burkolója



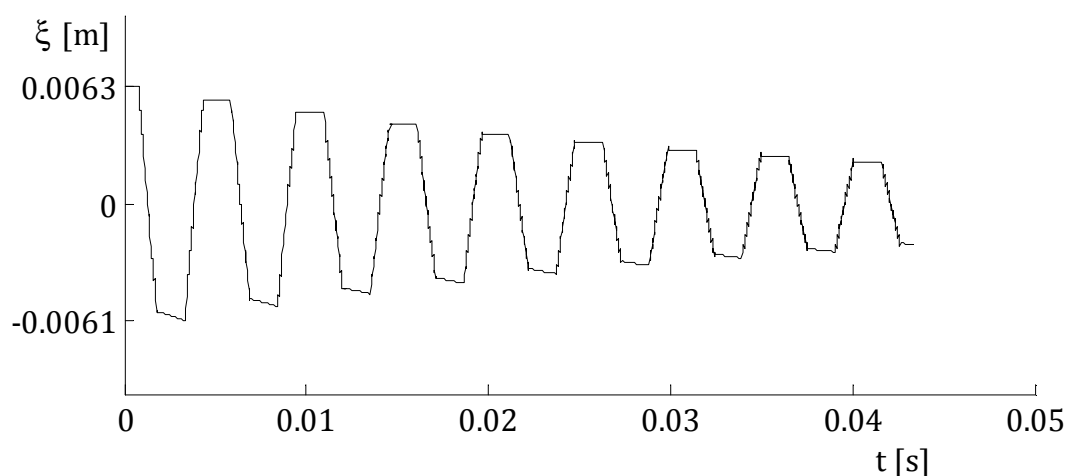
14. ábra: A homogén, csillapítatlan húr megtámasztását terhelő erő



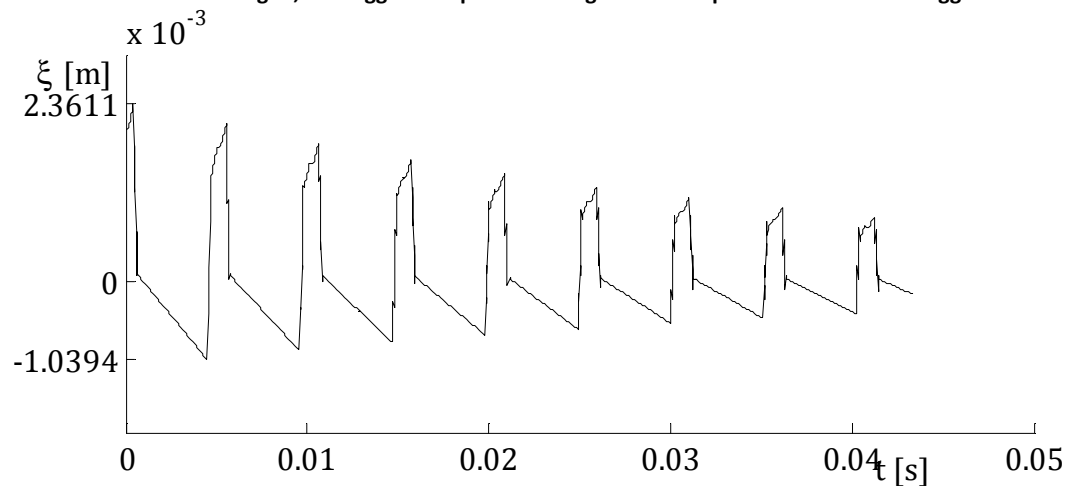
4.2.2. Homogén, csillapított húr

A gitár húrjának legegyszerűbb modellezése az, ha az egyik végét a húrlábat képviselő tömegrugó (R-K) tagra kötjük, mint ezt a 8. ábra mutatta. A húr másik vége mereven rögzített ($K_1 = 0$ és $R_1 \rightarrow \infty$). A lecsengés megjelenítéséhez hosszabb szimulációs időt kell választani.

15. ábra: A homogén, R-K taggal csillapított húr középpontjában a kitérés időfüggése

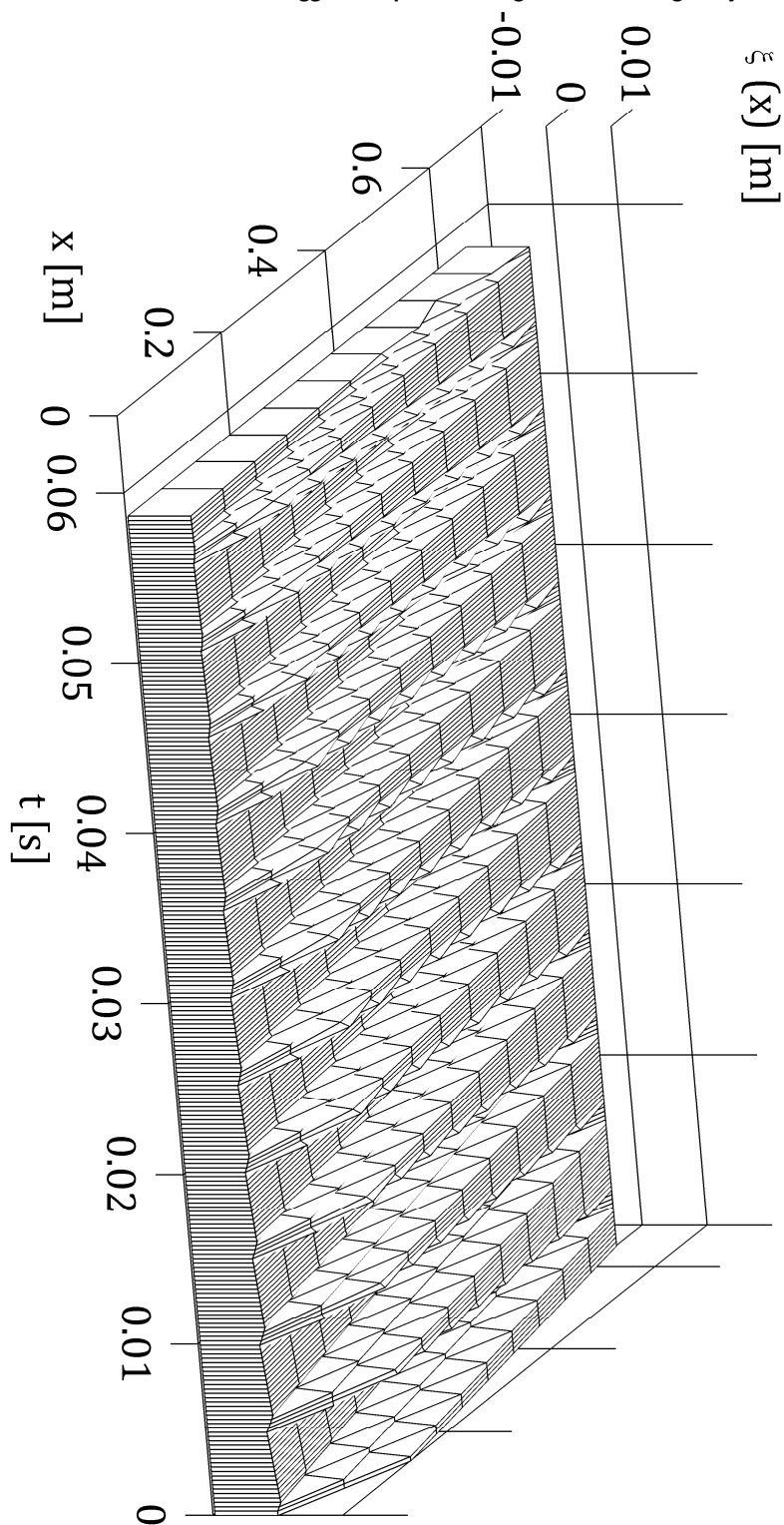


16. ábra: A homogén, R-K taggal csillapított húr végéhez közeli pont kitérésének időfüggése

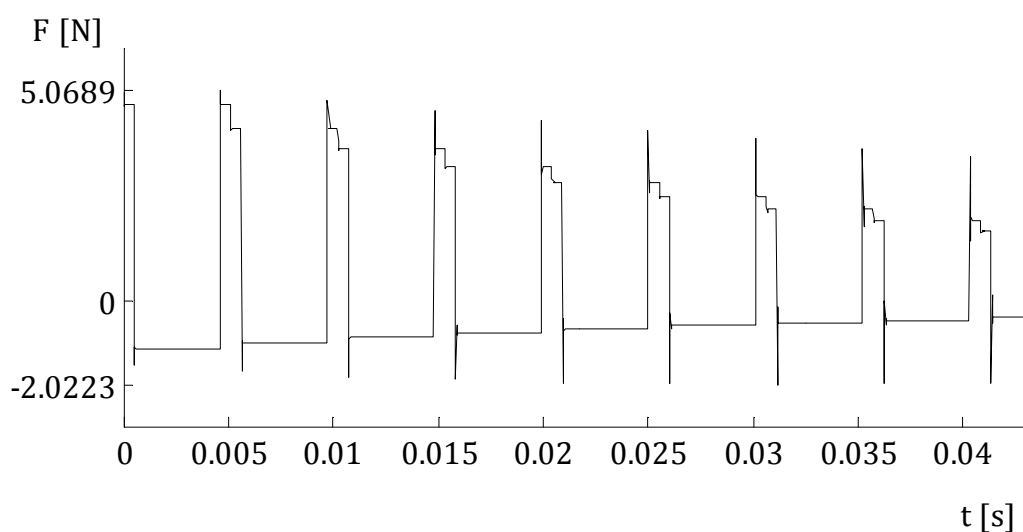


A 15. ábra és a 16. ábra a húr közepének és végéhez közeli pontnak kitérését illusztrálja. Az időfüggvények vízszintes szakaszai a csillapító tag miatt torzulnak. A csillapított hely-idő függvény a 17. ábra. A kitérés jelalakjai jellegükben nem változnak a mindkét végén mereven rögzített húrhoz képest, de az amplitúdó időbeli csillapodást mutat. A húrlábhoz rögzített húr vég kitérése ebben az esetben már véges, a megtámasztást a húr a 18. ábra időfüggvényének megfelelő erővel „rángatja”, így azok együtt mozognak.

17. ábra: Az R-K taggal csillapított homogén húr vízésés-görbéje



18. ábra: A homogén, R-K taggal csillapított húr megtámasztását terhelő erő



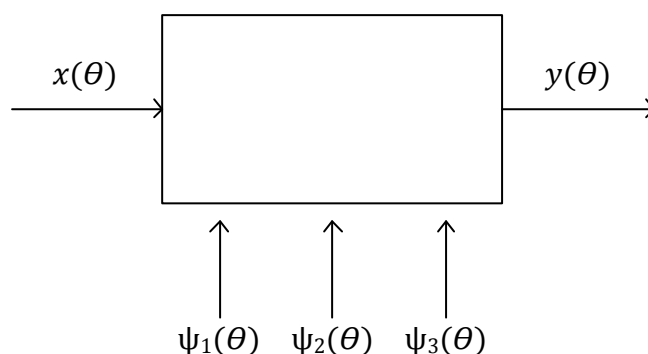
4.2.3. Inhomogén húrok sztochasztikus modellezése

A valódi hangszerben a húr nem homogén, játék közben változik a feszítőerő, illetve a húrnak hajlító merevsége is van. E a jelenségek közül az inhomogenitás hatását vizsgálom. Az inhomogenitás azt jelenti, hogy a húr hosszegységre eső tömege nem egyenletes a hossza mentén. Ennek következménye az, hogy a $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ összefüggéssel adott terjedési sebesség is a hely függvénye lesz.

Ezen felül az egyes húrok egymástól is különbözőek, így a terjedési sebesség véletlenszerű paraméterként kezelhető. A statisztika elemei a hasonló, sztochasztikus vizsgálatokban leggyakrabban az egydimenziós, elsőfokú abszolút momentum (várható érték) és a kétdimenziós, másodfokú centrális momentum (kovariancia). A kovariancia tulajdonképpen az autokorreláció várhatóértéktől független része [33] [34].

Az általános véletlenszerű rendszer felépítését mutatja a 19. ábra. A véletlenszerű anyagparaméter miatt a determinisztikus gerjesztés ellenére véletlenszerű a rendszerválasz. A reális hangszerekben természetesen determinisztikus gerjesztés sem feltételezhető, illetve annak jelalakja nem pontszerű pengetés. A sztochasztikus terjedési sebesség a modellbe legegyszerűbben a Monte Carlo szimulációval (19. ábra) vihető be. Ennek lényege, hogy meghatározott eloszlású valószínűségi változó hatását nagyszámú realizáció generálásával szimuláljuk a rendszer viselkedésének elemzésénél. Emiatt (a centrális határeloszlás tétel következményeképpen) a válaszra adódó átlagos becslés normális eloszlású lesz, szórása pedig a realizációk számával lesz összefüggésben [35].

19. ábra: A rendszer modellezése Monte Carlo szimulációval



Az egyes realizációkra számított rendszerválaszok átlaga szintén valószínűségi változó. A nagy számok törvénye kimondja, hogy minél több realizációt vizsgálunk ($N \rightarrow \infty$), annál valószínűbb, hogy az átlagos válasz a várható értékkel egyezik. A centrális határeloszlás tétele szerint $N \rightarrow \infty$ -re a várható értékkel csökkentett átlagos válasz standard normális eloszlásúvá válik. Ez azt jelenti, hogy annak valószínűsége, hogy a kettő eltérése kisebb, mint ε [34]:

$$P\left\{\left|\hat{\xi}_N - m_{\xi}\right| < \varepsilon \frac{\sigma_{\xi}}{\sqrt{N}}\right\} = F_{norm}(\varepsilon) - F_{norm}(-\varepsilon)$$

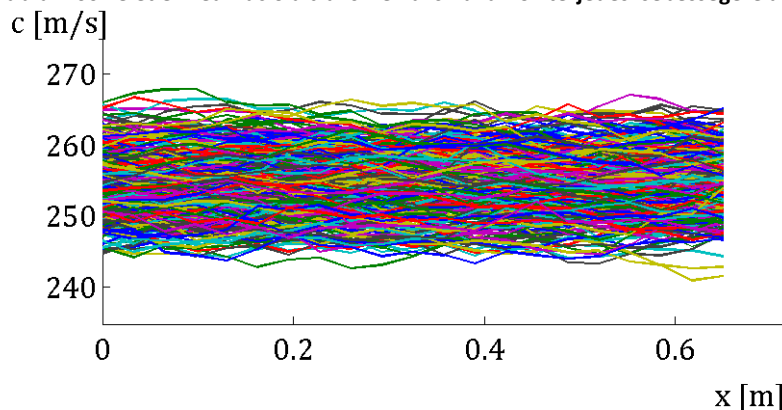
A véletlen adatok eloszlását szórással, várható értékkel, illetve egy korrelációs hossz definiálásával adtam meg. A korrelációs hossz azt mondja meg, hogy egy realizáción belül mennyire sima a terjedési sebesség helyfüggése (az a távolság, mely után a korreláció 1/e-szeresére csökken). A korrelációs hossz kapcsolata a kovarianciával: $C(x) \sim \sigma_c^2 e^{-x/d_{corr}}$. A $\lambda = 1/d_{corr}$ paraméter csökkentése tehát egyre inkább helyfüggetlenné teszi a valószínűségi változót.

Cholesky-dekompozícióval a pozitív definit kovariancia mátrix $\mathbb{E}\{\underline{\zeta} \cdot \underline{\zeta}^T\} = \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{L}}^T$ alakban állítható elő, ahol $\underline{\underline{L}}$ alsó háromszög mátrix. Ekkor a χ fehérzaj-jellegű valószínűségi változót $\underline{\underline{L}}$ -lel szűrve $\mathbb{E}\left\{\left(\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\chi}\right) \left(\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\chi}\right)^T\right\} = \mathbb{E}\left\{\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\chi} \cdot \underline{\chi}^T \cdot \underline{\underline{L}}^T\right\} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{L}}^T = \underline{\underline{C}}$ épp ilyen kovarianciájú valószínűségi változót kapunk.

A $\underline{\eta} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\chi}$ vektorból (melynek minden eleme megfelelő eloszlású valószínűségi változó 0 várható értékkel) és a terjedési sebesség ideális húrra meghatározott várható értékéből adódik a terjedésssebesség-sokaság: $\underline{c} = \underline{\eta} + \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

A Monte Carlo szimulációban tehát Cholesky-dekompozíció segítségével állítottam elő a véletlen adathalmazt. A szimuláció során 400 realizációt vizsgáltam. Erre mutat példát a 20. ábra, amelyen minden görbe egy realizációt jelképez, és megmutatja abban a rezgések terjedési sebességét a hely függvényében. A realizációk várható érték $254,8 \frac{m}{s}$, a szórás $1 \frac{m}{s}$, a korrelációs hossz 1 m.

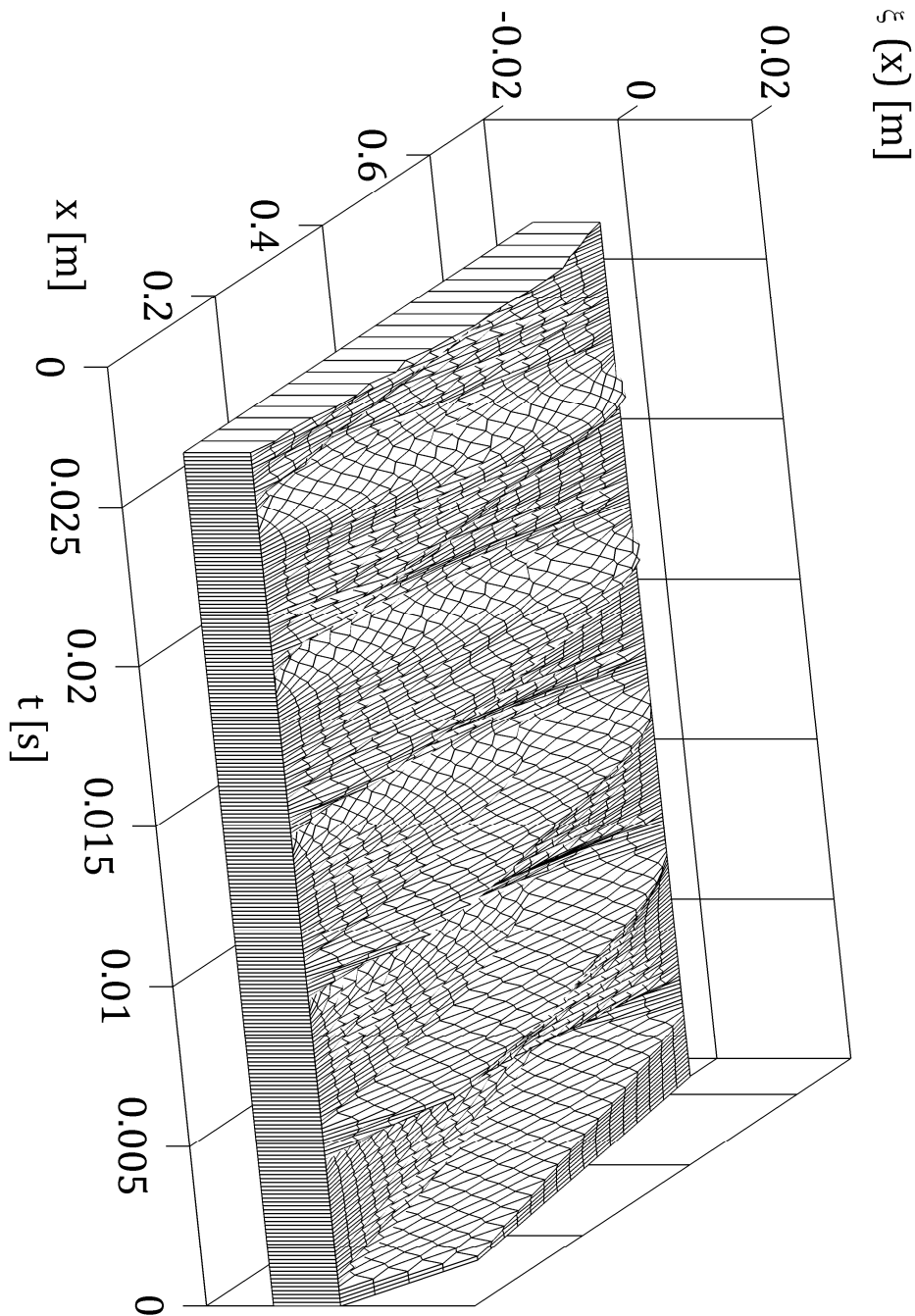
20. ábra: 400 véletlen realizáció a transzverzális hullámok terjedési sebességére a húrban



4.2.4. Inhomogén húr

A 20. ábra realizációinak egyikére a modellben szimulált kitérés hely- és időfüggését mutatja a 21. ábra vízés-görbéje, a 22. ábra pedig a húr megtámasztását terhelő erő időfüggvényét illusztrálja. A húr nincs R-K tagra rögzítve. Az inhomogenitás hatása az ideális húr vízés-görbéivel összehasonlítva látható: a $t = 0$ -nál még tiszta hullámalak az idő növekedésével „elkenődik”, bár amplitúdójából nem veszít.

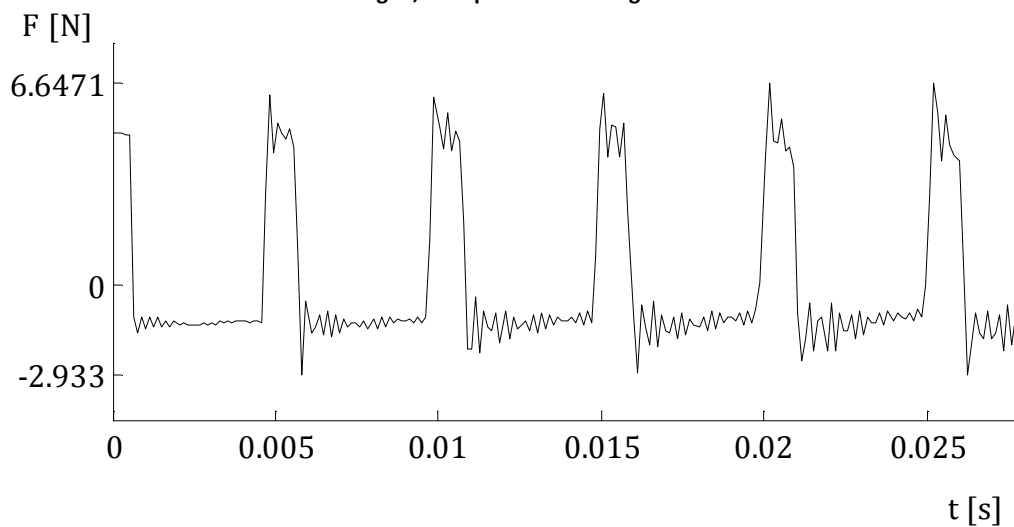
21. ábra: Az inhomogén, csillapítatlan húr vízésés-görbéje



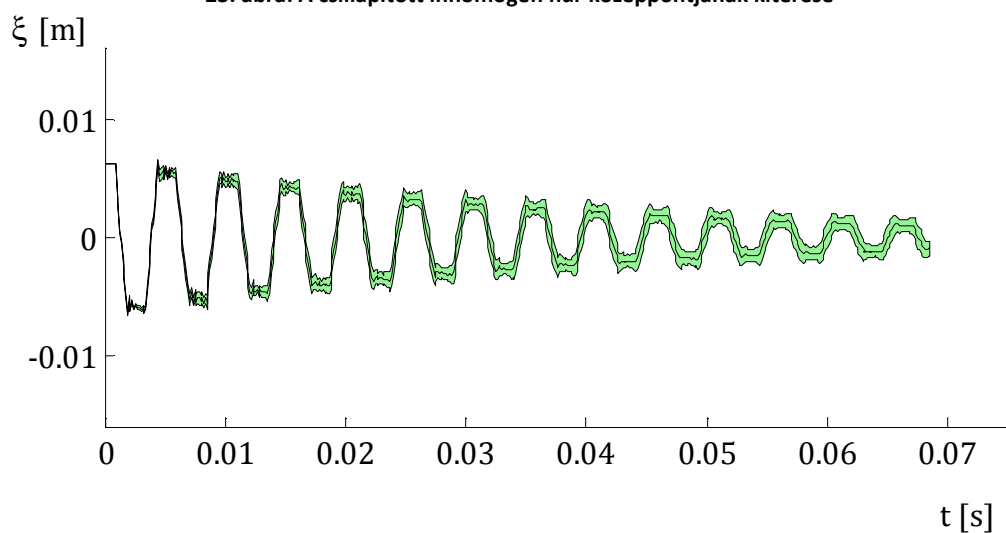
Az inhomogén hurok realizációin a hullámalak lefutása más és más. Egyetlen vízésés-görbe vagy erő időfüggvény nem jellemzi az egész sokaságot. Ezért az inhomogén húr adott pontjainak kitérése kvantilis-ábrával könnyebben értelmezhető (23. ábra). Ezen ki van emelve a sokaság átlaga, illetve a „középső” 80% a beszínezett területre esik. Az alsó és felső határoló vonal a 10%-os, illetve a 90%-os kvantilis. Ezek a hullámalakok alsó és felső 10%-át választják el a többi jelalaktól. A lecsengési szakasz megfigyelhető a 24. ábrán, amely ugyanazt a realizáció-sokaságot ábrázolja, csak a megjelenített idő kétszer olyan hosszú. Sok realizáció átlagában is látszik, hogy a pengetett húr kitérése exponenciális jelleggel csillapodik, az eltérő sebességek miatt pedig az idő növekedtével egyre jobban összemosódnak az egyes hullámalakok (tehát a kiszínezett terület kiszélesedik). Az inhomogén, csillapított húr vízésés-görbéje látható a 25. ábra grafikonján, mely megtartja a

csillapítatlan inhomogén húrnál ismertetett jellemzőket, de a rezgés amplitúdócsökkenése is látszik, ha gondolatban levetítjük a maximális kitéréseket a z tengelyre.

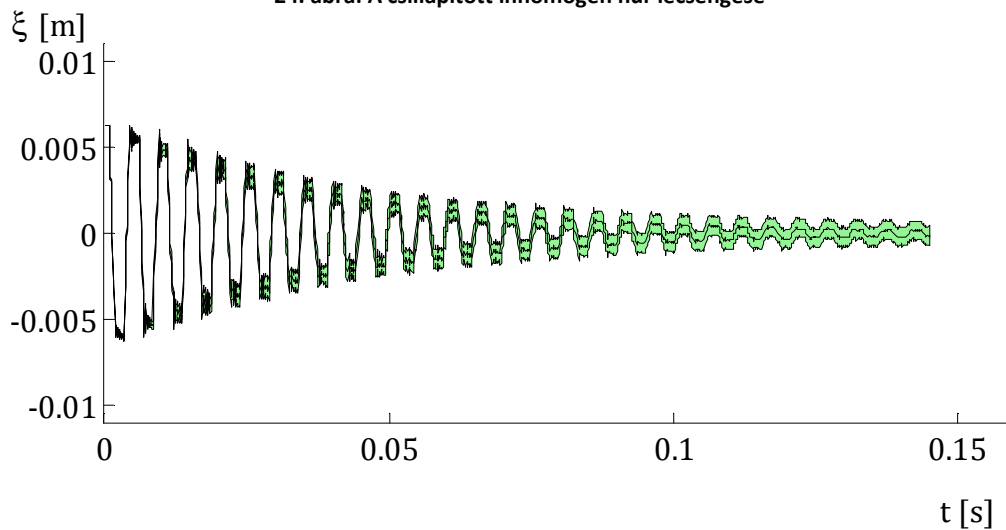
22. ábra: Az inhomogén, csillapítatlan húr megtámasztását terhelő erő



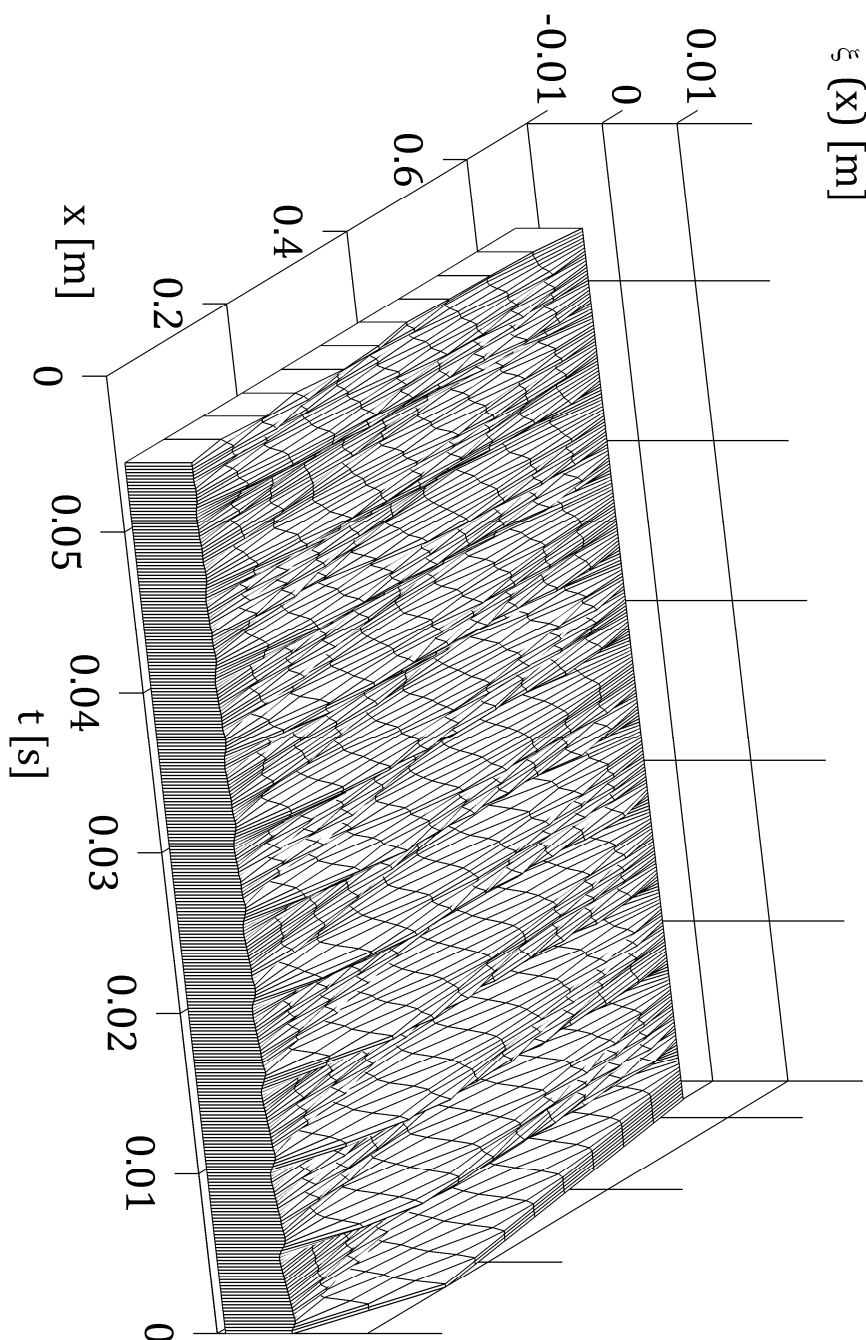
23. ábra: A csillapított inhomogén húr középpontjának kitérése



24. ábra: A csillapított inhomogén húr lecsengése



25. ábra: A csillapított inhomogén húr vízész-görbéje



4.2.5. Összefoglalás a véges differencia modelltól

A véges differencia módszer egyszerűen implementálható, és az elvárásoknak megfelelő eredményeket szolgáltat, azonban igen nagy a számításigénye (a modell kiszámítása 400 realizációval akár 10 másodperc nagyságrendjébe eső ideig tarthat). Ezen felül az alkalmazhatóságát korlátozza az instabilitási probléma. A húrlábhöz csatolt húrok modelljét ezért végeselem-módszerrel próbáltam megalkotni.

5. A húr-húrláb rendszer végeelem-modellje

A végeelem-módszer parciális differenciálegyenlet numerikus megoldására szolgál. A közelítést az értelmezési tartomány véges dimenziójú alterén keresi, melynek bázisát az alakfüggvények alkotják.

A differenciálegyenlet $\mathcal{D}\{y(x)\} = f(x)$, ahol x a d dimenziós tér zárt tartományából való: $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, a peremfeltételek pedig a $\mathcal{B}\{y(x)\} = b(x)$ szerint adóttak a $d\Omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ peremen. A Galerkin-módszer szerint az $y(x)$ megoldás közelítését az Ω -n értelmezett $G_i(x)$ alakfüggvények lineáris kombinációjaként keressük, melyet a differenciálegyenletbe behelyettesítve kapott közelítés hibafüggvénye ortogonális az alakfüggvényekre (vagyis magára $y(x)$ -re is), így a hiba minimális.²

$$y(x) \approx \sum_{k=1}^n \psi_k \cdot G_k(x)$$

$$\sum_{k=1}^n \psi_k \int_{\Omega} G_i(x) \mathcal{D}\{G_k(x)\} d\Omega = \int_{\Omega} G_i(x) f(x) d\Omega, \quad i = 1 \dots n$$

Ez egy n egyenletből álló lineáris egyenletrendszer, mely mátrixos alakba is írható, ha a ψ_k értékeket összefoglaljuk egy $\underline{\psi}$ vektorba.

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\psi} = \underline{b}$$

Itt az $\underline{\underline{A}}$ mátrix és $\underline{b}$ vektor elemei:

$$A_{ik} = \int_{\Omega} G_i(x) \mathcal{D}\{G_k(x)\} d\Omega$$

$$b_i = \int_{\Omega} G_i(x) f(x) d\Omega$$

5.1. A húr és a rúd hullámegyenlete végeelem-modellben

A húr transzverzális rezgésekre vonatkozó hullámegyenletét a végeelem-modellben való számításhoz átírjuk frekvenciatartományba:

$$\left(-\mu\omega^2 - T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Xi = f$$

$$\Xi = \sum_{k=0}^n \xi_k G_k(x)$$

$$T \cdot \sum_{k=1}^n \Xi_k(\omega) \int_0^L G'_i(x) G'_k(x) dx + \mu \cdot \sum_{k=1}^n \Xi_k(\omega) \int_0^L G_i(x) G_k(x) dx = f$$

Ha bevezetünk egy K merevség- és egy M tömegmátrixot, amelyek elemei alább olvashatók, akkor az egyenletrendszer $(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) \underline{\Xi} = \underline{f}$ alakú lesz.

² A függvények skaláris szorzata $\int_{\Omega} g_1(x) g_2(x) d\Omega$, vagyis az $\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^n \psi_k \cdot \mathcal{D}\{G_k(x)\} - f(x)$ hibafüggvényre $\int_{\Omega} G_i(x) \varepsilon(x) d\Omega = 0$.

A húr tömeg- és merevségmátrixainak elemei:

$$K_{ik}^{(húr)} = T \cdot \int_0^L G_i'(x) G_k'(x) dx, \quad M_{ik}^{(húr)} = \mu \cdot \int_0^L G_i(x) G_k(x) dx$$

A rúd hullámegyenlete ugyanilyen mátrixos alakra hozható. A rudat jellemző mátrix elemei:

$$K_{ik}^{(rúd)} = EI \cdot \int_0^L G_i''(x) G_k''(x) dx, \quad M_{ik}^{(rúd)} = \rho A \cdot \int_0^L G_i(x) G_k(x) dx$$

A két mátrix meghatározásához alakfüggvényeket kell választani. Látható, hogy a rúd esetén a második deriváltak megjelenése miatt a polinomiális alakfüggvények fokszáma legalább kettő. Azért, hogy a rúdelem négy szabadsági fokához (két csomópontjának kitéréseihez és elfordulásaihoz) egyaránt egyértelműen tartozzon alakfüggvény, harmadfokú polinomot kell felírni [36].

$$G_i(x) = \sum_{j=0}^3 \alpha_{ij} x^j$$

MATLAB-számításokkal ez alapján szimbolikusan kifejezhetőek a húrelem és a rúdelem tömeg- és merevségmátrixai. A modellben valós anyagparaméterekkel számoltam.

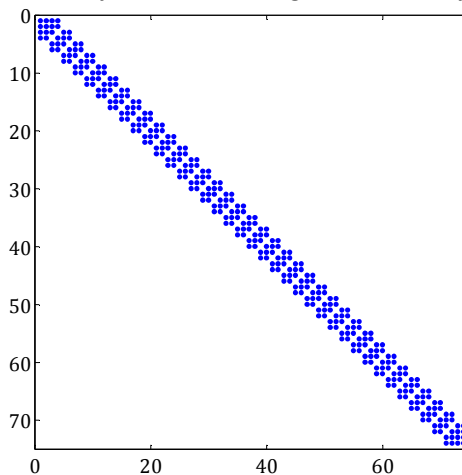
$$\underline{\underline{K}}_{húr} = \frac{T}{L_{húr}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{M}}_{húr} = \frac{\mu L_{húr}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_{rúd} = \frac{EI}{L_{rúd}^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L_{rúd} & -12 & 6L_{rúd} \\ 6L_{rúd} & 4L_{rúd}^2 & -6L_{rúd} & 2L_{rúd}^2 \\ -12 & -6L_{rúd} & 12 & -6L_{rúd} \\ 6L_{rúd} & 2L_{rúd}^2 & -6L_{rúd} & 4L_{rúd}^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}}_{rúd} = \frac{\rho A L_{rúd}}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L_{rúd} & 54 & -13L_{rúd} \\ 22L_{rúd} & 4L_{rúd}^2 & 13L_{rúd} & -3L_{rúd}^2 \\ 54 & 13L_{rúd} & 156 & -22L_{rúd} \\ -13L_{rúd} & -3L_{rúd}^2 & -22L_{rúd} & 4L_{rúd}^2 \end{bmatrix}$$

A húrok, illetve a rúd teljes tömeg- és merevségmátrixai a fenti blokkokból összerakott ritka (sávós) mátrixok, amelyek a fenti mátrixokból oly módon számíthatók, hogy az egyes, a húron/rúdon belül csatolt csomópontokhoz tartozó elemeket összeadjuk. Példaként a 26. ábra a húrláb merevségmátrixának felépítését ábrázolja (a bejelölt mátrixelemekben van nullától különböző érték).

26. ábra: A teljes húrláb merevségmátrixának felépítése



A húrelemek szabadsági foka kettő, vagyis a húrelem által képviselt két csomópontnak egyaránt van kitérése. A rúdelemek esetén a szabadsági fok négy: a rúdelem csomópontja kitéréssel és szögelfordulással is rendelkezik. A gerjesztés húr esetén erő, rúd esetén pedig erő és forgatónyomaték.

A húr-húrláb rendszer csatolásait kényszerekkel és peremfeltételekkel adhatók meg. A hurok húrlábhöz rögzített vége azt jelenti, hogy az adott húrelemek és a megfelelő rúdelemek kitérése azonos, vagyis ezek a szabadsági fokok páronként egymásból származtathatók. A hurok másik végére befogási kényszert lehet megfogalmazni (vagyis a húrvégek a véges differencia modellhez hasonlóan most is mereven rögzítettek, kitérésük zérus. A húrláb a gitártesthez van rögzítve, ezt szintén befogási kényszerrel lehet egyszerűen modellezni a rúd két végére.

A kényszeregyenleteket egy $\underline{\underline{P}}$ ritka mátrixba lehet csoportosítani, melynek annyi sora van, ahány csatolás, illetve peremfeltétel, és annyi oszlopa, ahány szabadsági fok a rendszerben összesen van. A mátrix a befogási kényszerek soraiban csak egy 1 elemet tartalmaz (a mereven rögzített elem pozíciójában), a csatolások soraiban pedig 1 és -1 jelenik meg az összekötött szabadsági fokok helyén. A következő alak a kényszeregyenleteket és a $\underline{\underline{P}}$ mátrix felépítését illusztrálja (az üres mátrixelemek értéke nulla).

$$\begin{aligned}\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\Xi}} &= \underline{\underline{P}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\underline{\Xi}}_{\text{független}} \\ \underline{\underline{\Xi}}_{\text{származtatott}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{P}}_1 & \underline{\underline{P}}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{\Xi}}_{\text{független}} \\ \underline{\underline{\Xi}}_{\text{származtatott}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{P}}_1 \cdot \underline{\underline{\Xi}}_{\text{független}} &= -\underline{\underline{P}}_2 \cdot \underline{\underline{\Xi}}_{\text{származtatott}} \\ \underline{\underline{\Xi}}_{\text{származtatott}} &= -\underline{\underline{P}}_2^{-1} \underline{\underline{P}}_1 \cdot \underline{\underline{\Xi}}_{\text{független}} \\ \underline{\underline{P}} &= \begin{bmatrix} & 1 & & \dots & -1 & & \\ & & 1 & & & -1 & \\ & & & 1 & & & -1 \\ & & & \vdots & & & \\ 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & \end{bmatrix}\end{aligned}$$

A rendszer szabadsági fokai két halmazra bonthatók. Az egyik a független szabadsági fokokat tartalmazza, a másik pedig az ezekből származtatottakat. A kényszmátrix, mely $\underline{\underline{P}}$ -ből az alábbi módon származtatható, megadja az összes szabadsági fok kiszámítását a független szabadsági fokokból.

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Xi}} &= \begin{pmatrix} \underline{\underline{\Xi}}_{\text{független}} \\ \underline{\underline{\Xi}}_{\text{származtatott}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\Xi}}_{\text{független}} \\ -\underline{\underline{P}}_2^{-1} \underline{\underline{P}}_1 \cdot \underline{\underline{\Xi}}_{\text{független}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ -\underline{\underline{P}}_2^{-1} \underline{\underline{P}}_1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{\Xi}}_{\text{független}} \\ \underline{\underline{T}} &= \begin{pmatrix} I \\ -\underline{\underline{P}}_2^{-1} \underline{\underline{P}}_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

A számítás során a szabadsági fokok száma így a származtatott szabadsági fokok számával csökkenthető. A redukált tömeg- és merevségmátrix $\underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{T}}$ és $\underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{T}}$ alakot vesz föl, a megoldandó egyenletrendszer pedig a következő:

$$\left(\underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{T}} - \omega^2 \cdot \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{T}} \right) \underline{\underline{\Xi}}_{\text{független}} = \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{\underline{f}}$$

A mátrixok meghatározásához az egyes húrokra jellemző hosszegységre eső tömegekből és az első sajátfrekvenciákból számítottam feszítőerőt. A sűrűsége a www.noyceguitars.com internetes oldalán feltüntetett tipikus értékeket feltételeztem. A 3. táblázat mutatja a hurok alapfrekvenciáját (f_1), sűrűségét (μ), a feszítőerőt (T) és a transzverzális hullám terjedési sebességét (c).

3. táblázat: A gitárhúrok alapfrekvenciája, hosszegysége eső tömege, feszítőereje és a hullámok terjedési sebessége

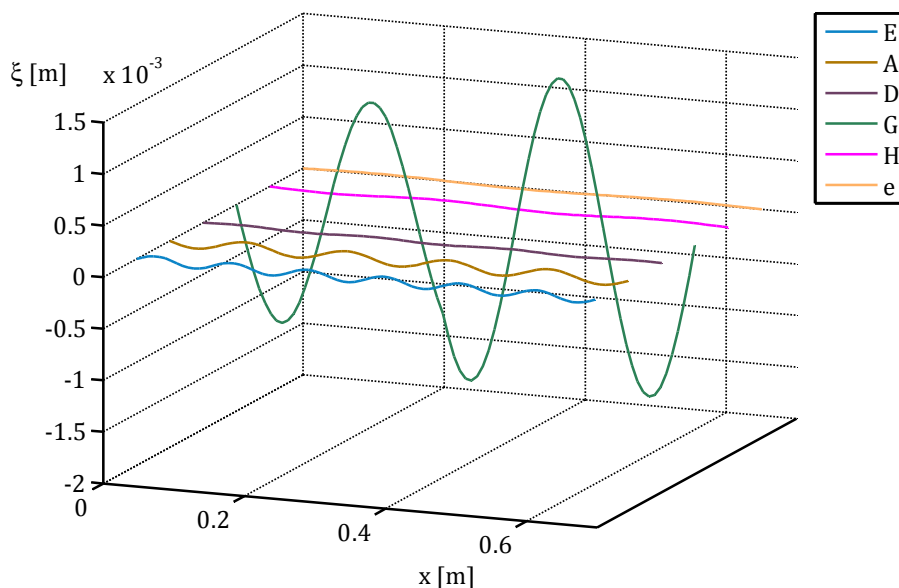
Húr	f_1 [Hz]	μ $\left[\frac{kg}{m}\right]$	T [N]	c $\left[\frac{m}{s}\right]$
E	82,4	$6,79 \cdot 10^{-3}$	77,9	107,1
A	110	$4,47 \cdot 10^{-3}$	91,3	143
D	146,8	$2,33 \cdot 10^{-3}$	84,9	190,8
G	196	$1,14 \cdot 10^{-3}$	74	254,8
H	246,9	$0,71 \cdot 10^{-3}$	72,9	320,9
e	329,6	$0,41 \cdot 10^{-3}$	73,6	428,5

A húrláb modellezésénél 15 cmx1 cmx4 cm méretű, hasáb alakú, rózsafa rudat feltételeztem, melynek Young-modulusa $E = 1,6 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$, sűrűsége $\rho = 850 \frac{kg}{m^3}$.

Ez a modell a frekvenciatartományban dolgozik, így csak harmonikus gerjesztésre adott válasza vizsgálható.

A 27. ábra például a csatolt húrok válaszát (pontosabban annak egyik szélső helyzetét) mutatja a hely függvényében, ha a G húr nyolcadánál elhelyezkedő pontját 1 kHz-cel oszcilláló kitérítő erővel gerjesztjük. A G húr rezgése a csatoláson keresztül átvihető a többi húrnak is, melyek szintén kényszerrezgésbe kezdenek. Ezek frekvenciája szintén 1 kHz. Az egyes húrok kényszerrezgésének hullámhosszai a különböző terjedési sebességek miatt térnek el.

27. ábra: A frekvenciatartomány-beli csatolt végelem-húrmodell válasza harmonikus gerjesztésre



A fizikai várakozásoknak megfelelő az eredmény, de ehhez hasonló periodikus gerjesztés hangszerekben nem szokott megjelenni.

Jelen vizsgálat szempontjából harmonikus gerjesztések megadása nem előnyös. A lassan megpengetett, majd elengedett húr kezdetiérték-problémát jelent. Emiatt áttérek az időtartománybeli leírásra. Ez a véges differencia modell kényelmi előnyeivel jár, ám a végelem-módszer mátrixaival számol. Az időtartományban a húrelemek csomópontjainak kitérése és sebessége, valamint a rúdelemek csomópontjainak kitérése, szögelfordulása, illetve sebessége és szögsebessége számítható ki. A hibrid modell hátralépő Euler-formulát alkalmazva stabilitását is megőrzi.

5.2. Állapotváltozás leírás az időtartományban

A rezgőrendszerek viselkedését általában le lehet írni az $M\ddot{\xi} + R\dot{\xi} + K\xi = f$ egyenlettel. Mivel $\dot{\xi} = v$, ez az egyenlet átírható a következő formába:

$$M\dot{v} + Rv + K\xi = f$$

Itt M a tömeg, K a merevség, R pedig egy csillapító ellenállás. Vezessük be az $x = \begin{pmatrix} \xi \\ v \end{pmatrix}$ állapotváltozót. Az előző két egyenlet alkotta rendszert ekkor mátrixos alakba lehet írni.

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

A már említett hátralépő Euler-formula a deriváltakat a jelenlegi és az előző időponthoz tartozó értékek különbségével definiálja. A most következő levezetés megmutatja, miként lehet az implicit alakot megoldani.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_k &= \frac{\xi_k - \xi_{k-1}}{\Delta t}, & \dot{v}_k &= \frac{v_k - v_{k-1}}{\Delta t} \\ \frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} \xi_k \\ v_k \end{pmatrix} - \frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} \xi_{k-1} \\ v_{k-1} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_k \\ v_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \xi_k \\ v_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_{k-1} \\ v_{k-1} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \Delta t \\ -\Delta t \cdot M^{-1}K & -\Delta t \cdot M^{-1}R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_k \\ v_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta t \cdot f \end{pmatrix} \\ \left\{ I + \begin{bmatrix} 0 & -\Delta t \\ \Delta t \cdot M^{-1}K & \Delta t \cdot M^{-1}R \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \xi_k \\ v_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi_{k-1} \\ v_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta t \cdot f \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \xi_k \\ v_k \end{pmatrix} &= \left\{ I + \begin{bmatrix} 0 & -\Delta t \\ \Delta t \cdot M^{-1}K & \Delta t \cdot M^{-1}R \end{bmatrix} \right\}^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} \xi_{k-1} \\ v_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta t \cdot f \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

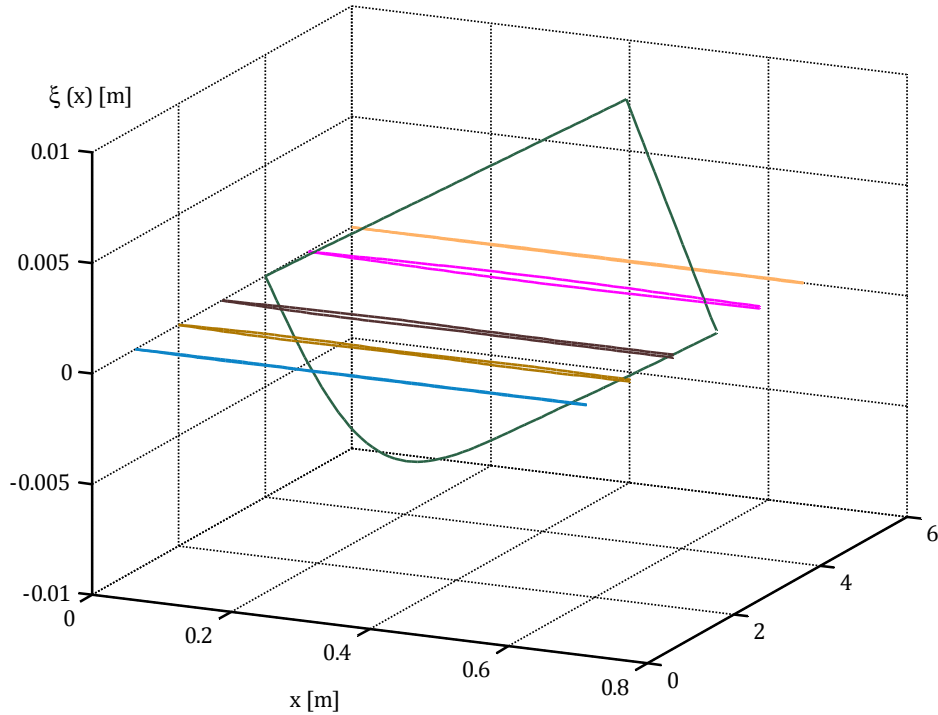
Általában a végeelem-modellekben a csillapításmátrix (damping) nem ismert. Becslésére több módszer áll rendelkezésre. A többi paraméter pontos ismeretében meg lehetne határozni mérésrel, ezek hiányában azonban becslésekre kell hagyatkoznunk. A közelítések általában a meglévő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait vagy az ismert válaszspektrumot veszik számításba [37]. Egyszerűbb azonban a következő becsléssel élni [38]:

$$R = \alpha M + \beta K$$

Az α és β paraméterek megválasztása problémafüggő, de R általában sokkal kisebb elemeket tartalmaz, mint a tömegmátrix és a merevségmátrix. Gitárhúr esetén a légellenállás viszkózus jellegű, vagyis a sebességgel arányos csillapítást okoz, és a tömegmátrixhoz hasonló alakot vesz fel. Ha nem számolunk a levegő közegellenállásával, a húr rezgése akkor is lecseng, ugyanis energiája egy idő után átadódik például hőenergia formájában. Ekkor R inkább merevségmátrix-jellegű [39].

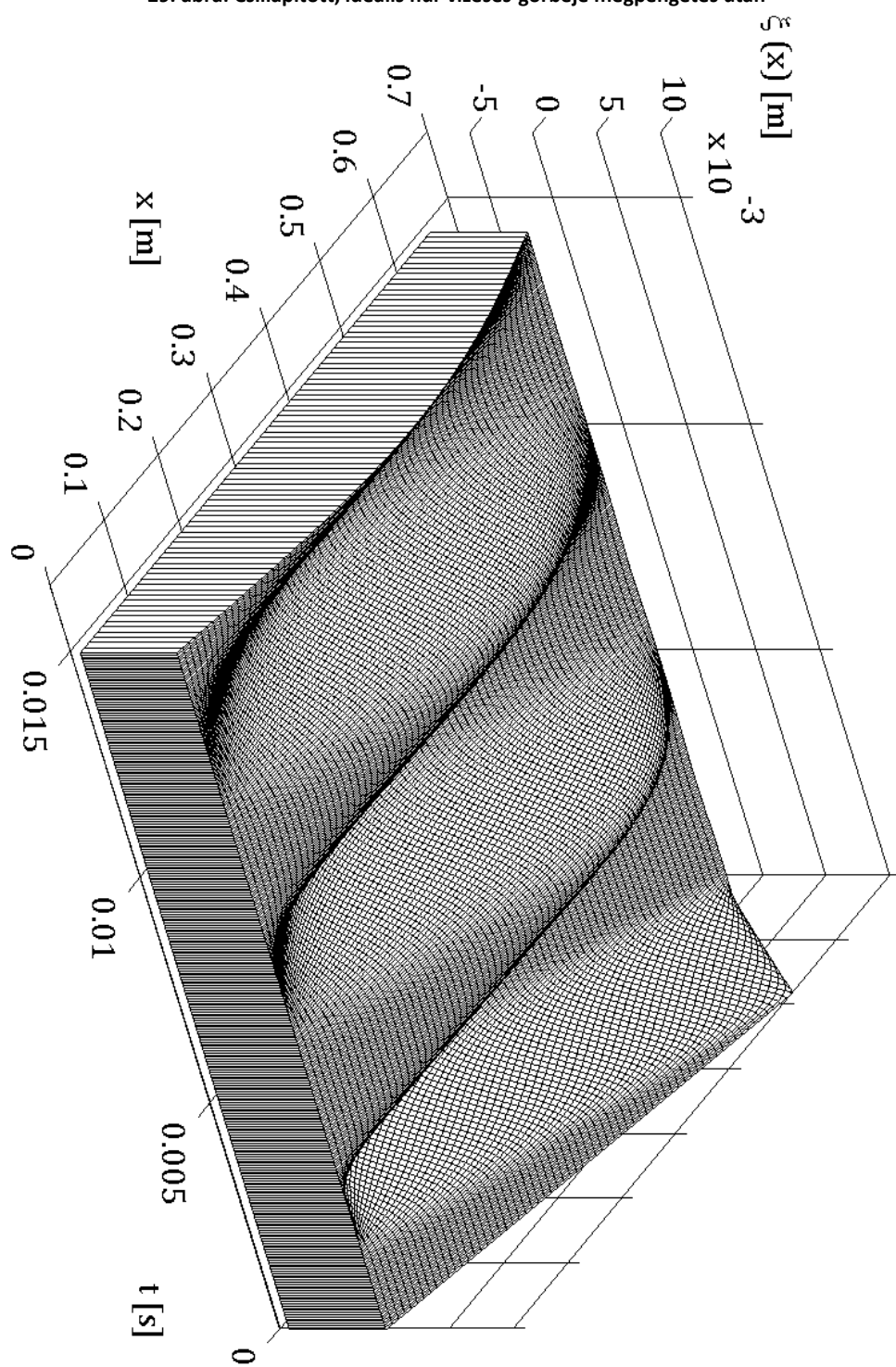
$R = 10^{-10} \left[\frac{Ns}{m \cdot kg} \right] \cdot K$ választásra, ideális húrokra kapott eredményt mutatja a 28. ábra. A grafikon a 27. ábra színezését követi. Minden húrnál látszik az ábrán a kitérés maximuma és minimuma, tehát a függvények az állóhullámok ábrázolásánál megszokott elrendezést követik. A megpendített húr hullámalakja a csillapítás miatt a másik szélsőérték (minimum) elérésének idejére már „eltompul”. A többi húr kis amplitúdójú rezgésekbe kezd.

28. ábra: Az időtartomány-beli csatolt végelem-húrmodell hullámalakjának szélső kitérései megpengetés után

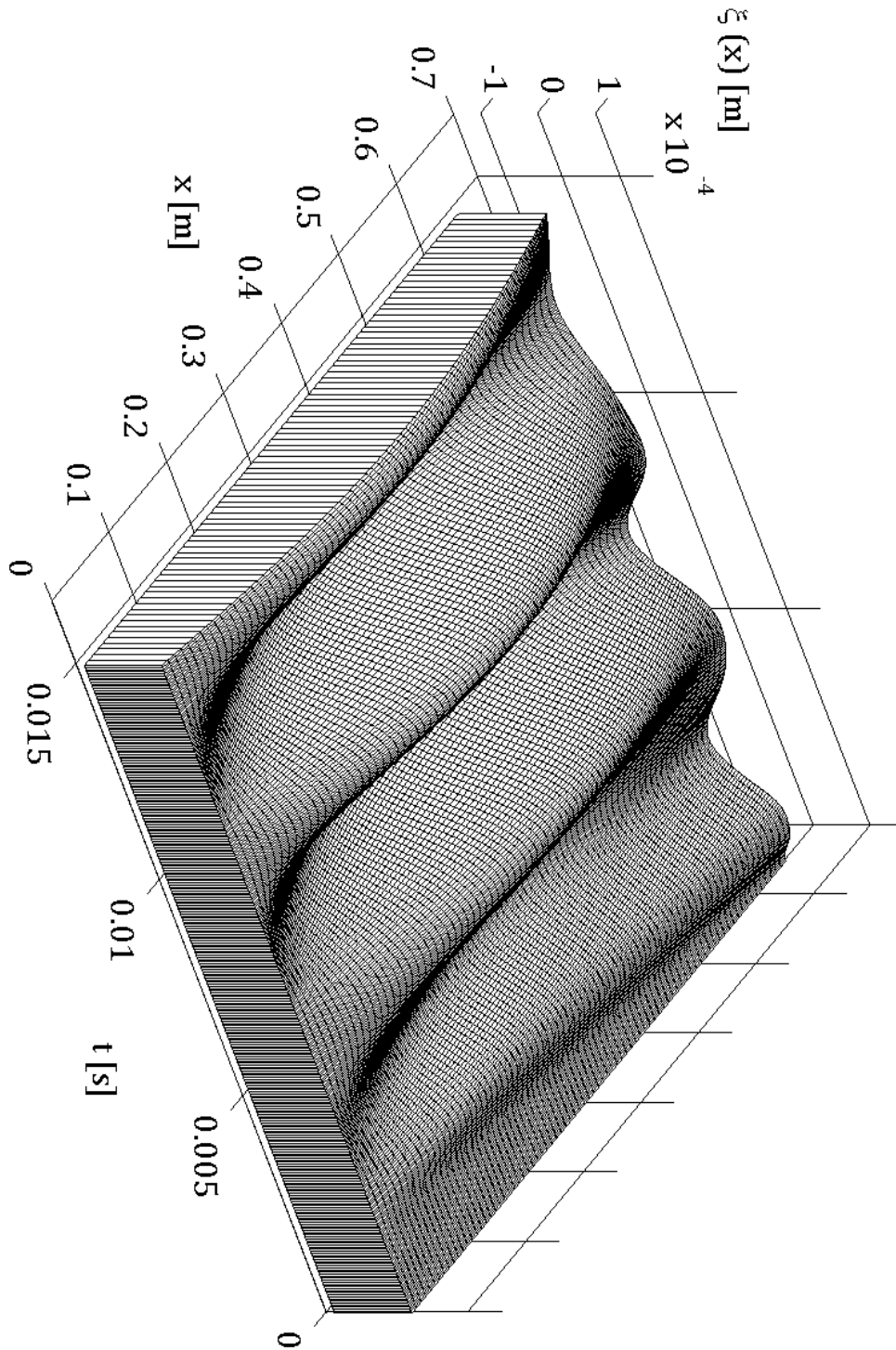


A 29. ábra az ideális, megpengetett húr csillapított rezgésének vízesés-görbét mutatja. A rezgés kezdeti értéke a megpendítés jele. A rezgés csúcsa hamar „elkenődik”, illetve amplitúdója is láthatóan csökken. A csatolás a többi húr is rezgésbe hozza, a 30. ábra például a megpengetett G húr mellett lévő H húr vízesés-görbét szemlélteti. A kezdeti érték itt nulla. A rezgés amplitúdója közel egy nagyságrenddel kisebb, mint a megpendített húr. Látható, hogy a húrlábhoz rögzített húr vég azzal együtt rezegni tud, a másik azonban a befogási kényszer miatt $\xi = 0$ pozícióban marad. A csillapítás itt is jelentkezik.

29. ábra: Csillapított, ideális húr vízész-görbéje megpengetés után



30. ábra: A megpengetettel csatolásban lévő húr vízésés-görbéje



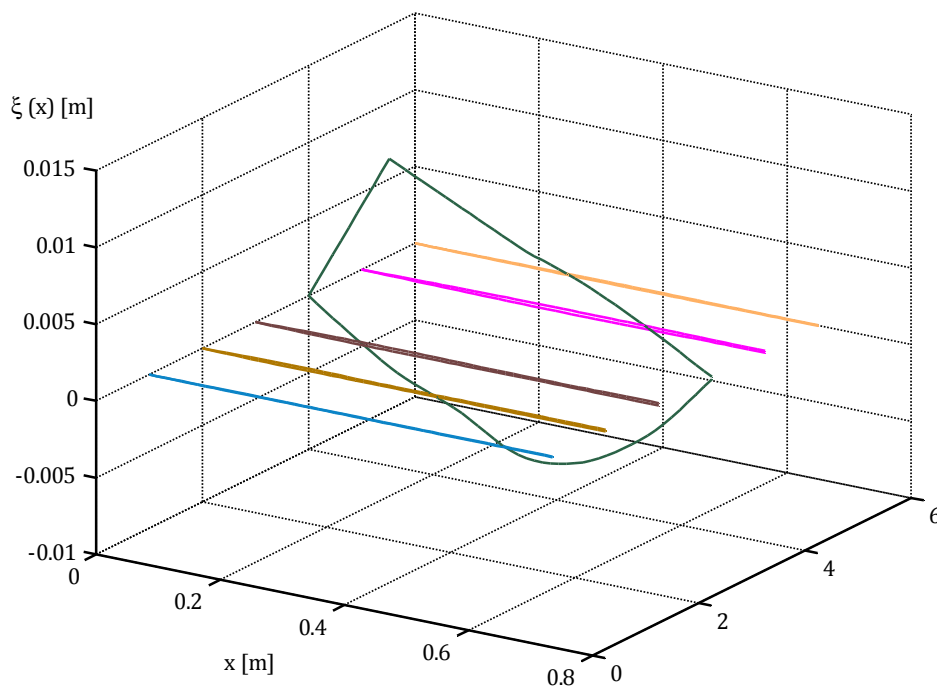
5.3. Inhomogén hurok az állapotváltozós végelem-modellben

A hurok inhomogenitása hasonló módon kezelhető, mint a véges differencia modellben. Az adott statisztikai jellemzőkből Cholesky-dekompozíció segítségével lehet anyagparamétereket előállítani. A különbség az, hogy ebben az esetben a hosszegységre eső tömeg a sztochasztikus folyamat, mert a végelem-modell μ -ból származtatja mátrixait, nem a rezgés terjedési

sebességéből. A statisztikai jellemzők ugyanazok, mint a véges differencia modellnél (várható érték, szórás, korrelációs hossz).

Az egyes húrok maximális kitérése látható a 31. ábra grafikonján. A színezés az eddig megszokottal egyezik. A G húron megfigyelhető a hullámalak torzulása az inhomogenitások miatt (a többi húron kicsi a rezgés amplitúdója ahhoz, hogy ez látszódjék).

31. ábra: Az inhomogén csatolt húrok maximális kitérése a G-húr megpendítése után



A megpendített, léghellenállással csillapított húron az inhomogenitás hatása elsimul, ezért a 32. ábra vízésés-görbéje a pengetés után létrejövő kis időszelket felnagyítva mutatja. Ezen látható még az inhomogenitás miatt megjelenő szabálytalan ingadozás, azonban ez sokkal kisebb mértékű, mint az egyszerűbb (nagyobb elhanyagolásokkal élő) véges differencia modellben kapott eredménynél.

A 33. ábra a megpendített csatolásban lévő, szintén inhomogén (H) húr vízésés-görbéje. Ezen a grafikonon a hullámalak torzulása egyáltalán nem figyelhető meg, talán a lefutó hullámalak sima jellege miatt. A végeelem-modell összetettebb implementációja miatt egyszerre csak egy realizációt tudtam vizsgálni, ezért ehhez kvantilis-ábra nem készült.

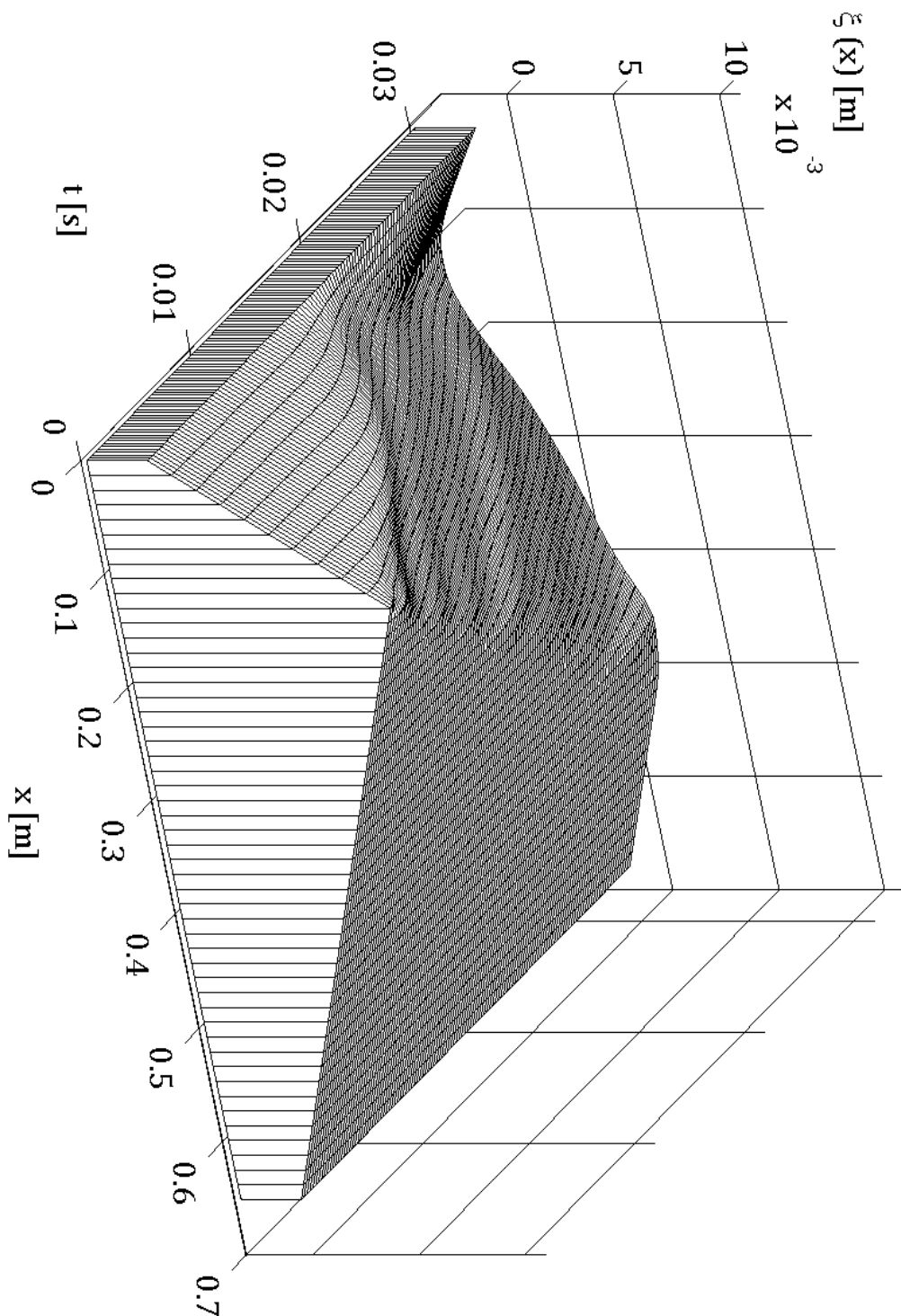
5.4. A hibrid végeelem-módszer áttekintése

Az állapotváltozós leírásra azért kellett áttérni, mert a megpendítés nem írható le harmonikus gerjesztésként. Az időtartományi végeelem-módszerben hátralépő Euler-formulával biztosítottam a stabilitást (természetesen a modell számításának egyéb módjai is vannak).

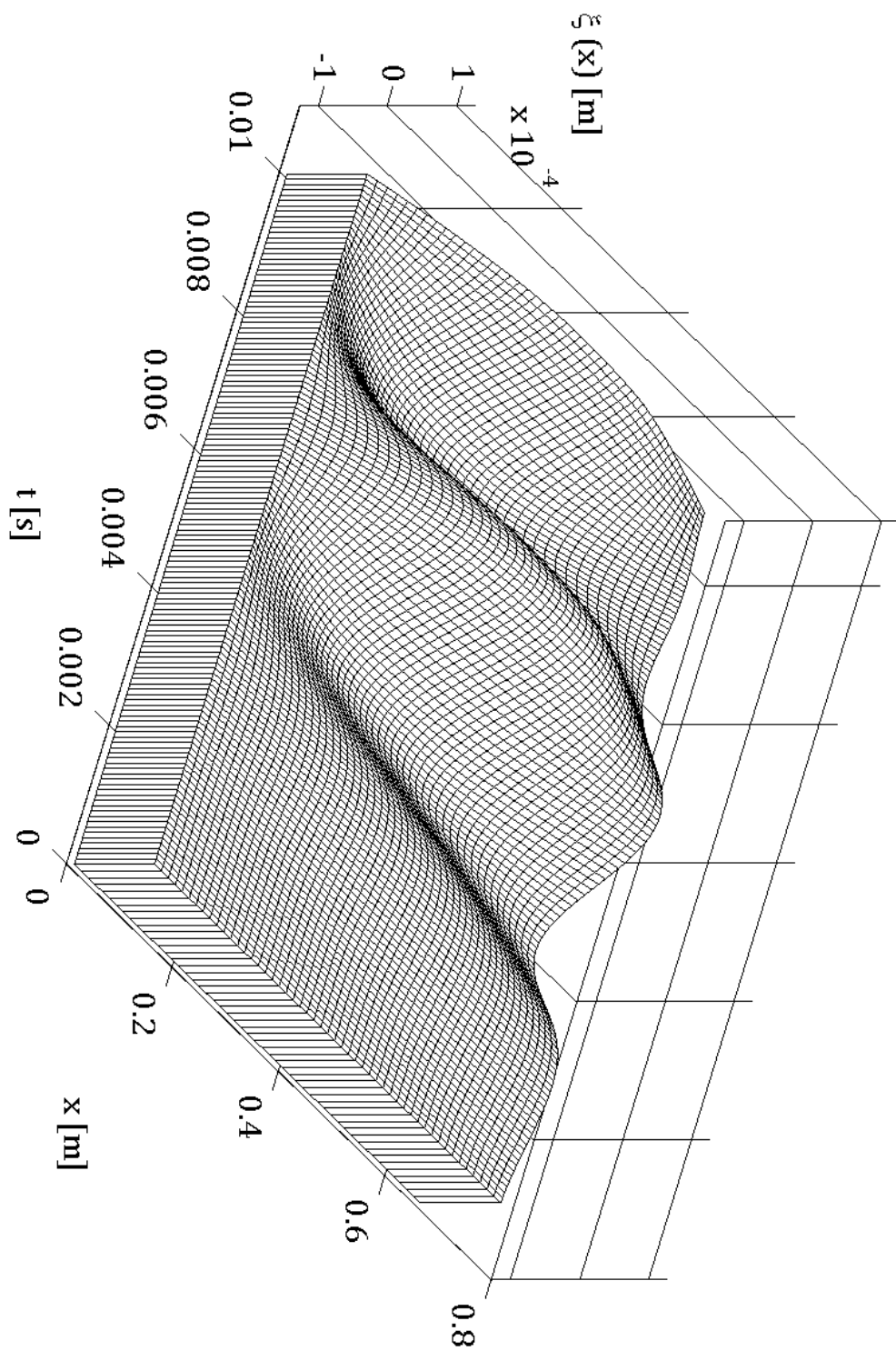
A szimulált eredmények a 2. fejezetben ismertetett ideális húr mozgásának plauzibilis általánosításai lehetnek, és a véges differencia modellben kapott jelalakokhoz is hasonlítanak (azzal a különbséggel, hogy FDM-ben több húr összecsatolását nem sikerült megvalósítani). A léghellenállás figyelembe vétele ugyan durva közelítéssel történt, de a csillapítás jellege megfelel az előzetes tapasztalatoknak. A csatolások a frekvenciatartományban és az időtartományban is kirajzolódtak a

húrok között. Előbbi esetben nem csak az erőhatásnak kitett, de a vele csatolt húrok is kényszerrezgésbe kezdtek a kényszererő frekvenciáján, utóbbi esetben pedig minden húron lecsengő hullámalak jelent meg az ideálisan lassú megpendítés hatására.

32. ábra: A megpendített inhomogén húr vizesés-görbéje az időtengely első szakaszára nagyítva. A húr a légellenállás csillapítja



33. ábra: A megpengetett inhomogén húrral csatolásban lévő inhomogén húr vízész-görbéje



6. Összefoglalás

Vizsgálatom célja a hangszerek húr-húrláb csatolásának elemzése volt, a homogén és inhomogén húrok különbségeinek feltárásával. A csatolást és az elemek modellezését többféleképpen is megvalósítottam, majd a kapott eredményeket egymáshoz és az előzetes feltételezésekhez hasonlítva értékeltem.

A dolgozatban először az egyedüli húr húrlábhöz kötött egyszerűsített rendszerét valósítottam meg véges differencia módszerrel. A modell a rendszerre illesztett pontrácson közelíti a kitérés-hely-idő függvényt. A húrlábat egy rugó-ellenállás tag helyettesíti. Ezt először teljesen merev rögzítést modellezve teszteltem; az így kapott eredmények az ideális, mereven rögzített húrra vonatkozó *a priori* feltételezésekkel jó egyezést mutattak. Ezután a húrt ténylegesen ellenállást és rugót tartalmazó elemmel rögzítettem. Ez az egyszerű modell csak egy csillapító tag vizsgálatára volt alkalmas, a többi húr és a húrláb bevitele túlzottan elbonyolította volna a számítást.

A végeelem-modellben a húrt és a húrlábat is kis darabokra osztva sok szabadsági fokú rendszert írtam le, melyben egy homogén, ideális rúd jelképezte a húrlábat. A rúd adott pozíciójú elemeinek kitérése a húrvégek kitéréséhez csatolt, a húrláb végei és a húrok másik (nem csatolt) vége mereven rögzített volt. A végeelem-modellbe már a légellenállást is be lehetett vinni.

A frekvenciatartományban harmonikus gerjesztő erőt alkalmazva megvizsgáltam a FEM működését. A szimuláció eredménye kényszerrezgés lett minden húron, ez a csatolás feltételeinek megfelel.

Az időtartomány-beli vizsgálathoz áttértem állapotváltozós leírásra, ahol a rendszer állapota az elemek kitérése és sebessége. A szimulációt hibrid végeelem-véges differencia módszerrel végeztem, mely az addig kiszámított paraméterekből és megvalósított eljárásokkal dolgozott. A húrok egyikük megpendítése után rezgésbe jöttek, mely rezgés a csillapításnak köszönhetően elhalt. Ez a csillapítási modell pontosabb, mint a véges differenciáknál kapott, hiszen utóbbi csak a húrok végein fejtette ki hatását.

Az inhomogén húr anyagparamétereit sztochasztikus folyamattal jellemeztem. A Monte Carlo-szimuláció eredményében az FDM modellben jól megfigyelhető volt a hullámalak torzulása a nem egyenletes tömegeloszlás miatt. A FEM-ben az egyéb ráhatások miatt a torzulás kevésbé volt nyilvánvaló, de hatása látszott.

A további lépések közé tartozik a sztochasztikus folyamatok számításának fejlesztése: a hibrid végeelem-modellben még megvalósításra vár a realizációk FDM-hez hasonló együttes kezelése. Ehhez a program adatstruktúráit kell átszervezni.

A megvalósított modellek a gitártest rezonátoraiban kialakuló rezgésekről nem szolgáltatnak információt, csak a húrokon és a húrlábakon kialakuló kitérést (és az FEM-ben a sebességet is) szimulálják numerikusan. Ebből az 1. fejezetben bemutatott összetett hálózat (2. ábra) gerjesztőereje számítható. Az itt megvalósított rendszer bővíthető a hálózat többi elemével, például a gitártest (rezgőtető - hátlap - káva) végeelem-modelljével.

A kapott jelalakok szimulációs eredmények. Ezek korrelációját egy valódi gitárban kialakuló hullámalakokkal például a húrlábat terhelő erő mérésével, vagy közvetlenül a húr mozgásának Doppler-effektuson alapuló lézeres mérésével is meg lehetne határozni.

7. Az ábrák jegyzéke

1. ábra: A gitár elemei közti csatolások [7] és [8] alapján.....	3
2. ábra: A gitár egy akusztikai/mechanikai modellje [9] alapján.....	3
3. ábra: A gitár elektromos analóg hálózata [9] alapján	3
4. ábra: A kitérített húrra ható erők [8] és [13] alapján	4
5. ábra: A Railsback-görbe Railsback, Martin és Ward adatai alapján (forrás: Wikipedia) [18].....	7
6. ábra: A gitártestbe zárt levegő rezgésének egyik módusa végeselem-modellben [27]. A színek a hangnyomás-hullám amplitúdóját jelképezik.	9
7. ábra: A véges differencia modell pontrácsa. A piros pont kitérésének kiszámításához a kék pontok szükségesek	11
8. ábra: A húr peremfeltételei a véges differencia modellben	12
9. ábra: A megpengetett húr kitérésének kezdeti értéke (a pengetés jelalakja)	13
10. ábra: A megpendített homogén, csillapítatlan húr vízésés-görbéje	14
11. ábra: A homogén, csillapítatlan húr középpontjában a kitérés időfüggése	15
12. ábra: A homogén, csillapítatlan húr végéhez közeli pont kitérésének időfüggése	15
13. ábra: A megpendített, homogén, csillapítatlan húr rezgésének burkolója.....	15
14. ábra: A homogén, csillapítatlan húr megtámasztását terhelő erő.....	16
15. ábra: A homogén, R-K taggal csillapított húr középpontjában a kitérés időfüggése	16
16. ábra: A homogén, R-K taggal csillapított húr végéhez közeli pont kitérésének időfüggése	16
17. ábra: Az R-K taggal csillapított homogén húr vízésés-görbéje	17
18. ábra: A homogén, R-K taggal csillapított húr megtámasztását terhelő erő	18
19. ábra: A rendszer modellezése Monte Carlo szimulációval.....	18
20. ábra: 400 véletlen realizáció a transzverzális hullámok terjedési sebességére a húrbán.....	19
21. ábra: Az inhomogén, csillapítatlan húr vízésés-görbéje.....	20
22. ábra: Az inhomogén, csillapítatlan húr megtámasztását terhelő erő	21
23. ábra: A csillapított inhomogén húr középpontjának kitérése	21

24. ábra: A csillapított inhomogén húr lecsengése	21
25. ábra: A csillapított inhomogén húr vízésés-görbéje.....	22
26. ábra: A teljes húrláb merevségmátrixának felépítése.....	24
27. ábra: A frekvenciatartomány-beli csatolt végeelem-húrmodell válasza harmonikus gerjesztésre	26
28. ábra: Az időtartomány-beli csatolt végeelem-húrmodell hullámalakjának szélső kitérései megpengetés után.....	28
29. ábra: Csillapított, ideális húr vízésés-görbéje megpengetés után	29
30. ábra: A megpengetettel csatolásban lévő húr vízésés-görbéje	30
31. ábra: Az inhomogén csatolt hurok maximális kitérése a G-húr megpendítése után	31
32. ábra: A megpendített inhomogén húr vízésés-görbéje az időtengely első szakaszára nagyítva. A húrt a légellenállás csillapítja	32
33. ábra: A megpengetett inhomogén húrral csatolásban lévő inhomogén húr vízésés-görbéje	33

8. Táblázatok jegyzéke

1. táblázat: Egyes népek jellemző, pengetéssel megszólaltatott népi hangszere.....	2
2. táblázat: A részhangok relatív intenzitása pengetés esetén [12].....	5
3. táblázat: A gitárhúrok alaphékvenciája, hosszegységre eső tömege, feszítőereje és a hullámok terjedési sebessége	26

9. Irodalomjegyzék

- [1] Bacon, Tony: Nagy gitárkönyv. Budapest : Panemex, 2002. p. 16-25.
- [2] Hangszerek enciklopédiája. Szerk. Midgley, Ruth. Budapest : Gemini, 1996. p. 162-197
- [3] Ardley, Neil: Hangszerek. 2. kiad. Budapest : Park Könyvkiadó, cop. 2003. p. 26-43. (Szemtanú ; 17.)
- [4] Brückner János: Akusztika. Budapest : Műszaki Könyvkiadó, 195. p.116-121. (Bolyai-könyvek. Fizika)
- [5] Howard, David M. – Angus, Jamie A. S.: Acoustics and Psychoacoustics. 4. ed. Amsterdam etc. : Elsevier ; Focal Press, 2009. p. 170-181.
- [6] Bacon, Tony et al.: A gitár : útmutató zenészeknek. [Budapest] : Kossuth Kiadó, 2009. p. 10-17.
- [7] French, Richard Mark: Engineering the Guitar : Theory and Practice. New York : Springer, 2009. p. 95-151.
- [8] Fletcher, Neville H. – Rossing, Thomas D.: The Physics of Musical Instruments. 5. ed. New York : Springer, 2005. p. 34-68, 239-245.0
- [9] Granát János: Hangszerek fizikája. Budapest : BME HT, 2003. p. 15-33, 85-93
- [10] Boullosa, Ricardo R.: Vibration measurements in the classical guitar. In: Applied Acoustics 62. Elsevier, 2002. p. 311-322.
- [11] Mersenne, Marin: Harmonie universelle. 1636.
- [12] Tarnóczy Tamás: Zenei akusztika. Budapest : Zeneműkiadó, cop. 1982. p. 56-59.
- [13] Alonso, Marcelo – Finn, Edward J.: Fundamental University Physics. Volume II., Fields and Waves. Reading, Mas. etc. : Addison-Wesley, 1972. p. 687-690.
- [14] d'Alembert, J.: Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration. In: M'emoire de l'Acad'emie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin 3. [1749]. p. 214-249.
- [15] d'Alembert, J.: Addition au m'emoire sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration. In: M'emoire de l'Acad'emie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin 6. [1752]. p. 355-360
- [16] Fiala Péter: A hangszerek fizikája : jegyzet. Budapest, 2010.
<http://sites.google.com/site/pfialaoktat/home/hangszerek-fizikaja/jegyzet> (2010. október 13.)
- [17] Railsback, O. L.: Scale Temperament as Applied to Piano Tuning. The Journal of the Acoustical Society of America 9. 1938. p. 274.

- [18] Tung, Brian: Railsback Curve, a plot of typical detuning of a piano from an even-tempered scale. <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Railsback2.png>. (2010. október 17.)
- [19] Bolwell, J. E.:– How Realistic is the D’Alembert Plucked String? In: European Journal of Physics 20. IOP Publishing, 1999. p. 313-320
- [20] Lai, S. K. et al.: Higher-order approximate solutions for nonlinear vibration of a constant-tension string. In: Journal of Sound and Vibration 317. Elsevier, 2008. p. 440-448.
- [21] Penttinen, Henri – Välimäki, Vesa: A time-domain approach to estimating the plucking point of guitar tones obtained with an under-saddle pickup. In: Applied Acoustics 65. Elsevier, 2004. p. 1207-1220.
- [22] Bapat, C. N.: An approximate approach to study the free vibration of a string with an arbitrary variation in mass density and tension, with attached concentrated masses, and its application to hanging chain and rotating cord. In: Journal of Sound and Vibration 290. Elsevier, 2006. p. 529-537.
- [23] Schelling, J. C.: The Violin as a Circuit. In: Journal of the Acoustical Society of America 35. 1963. p. 326-338.
- [24] Garamvölgyi Zsolt: Dobhang fizikai alapú szintézise (TDK dolgozat). 2006. p. 15-17.
- [25] Hernández, D et al.: Simulación de la cuerda de un violín y una guitarra por diferencias finitas. In: Revista Colombiana de Física Vol. 28:2. Sociedad Colombiana de Física, 2006. p. 998-1001.
- [26] Ezcurra, A.: Influence of the material constants on the low frequency modes of a free guitar plate. In: Journal of Sound and Vibration 194(4). Elsevier, 1996. p. 640-644.
- [27] Elejabarrieta, M. J. – Santamaría, C.: Air cavity modes in the resonance box of the guitar: the effect of the sound hole. In: Journal of Sound and Vibration 252(3). Elsevier, 2002. p. 584-590
- [28] Stanciu, Mariana Domnica et al: Dynamical Analysis with Finite Element Method of the Acoustic Plates as Constituents of the Guitar. In: Pro Ligno Vol. 4(1). Fundatia Pro Ligno, 2008. p.41-52
- [29] Torres, Jesús Alejandro – Boullosa, Ricardo R.: Influence of the bridge on the vibrations of the top plate of a classical guitar. In: Applied Acoustics 70. Elsevier, 2009. p. 1371-1377.
- [30] Brebbia, C. A – Dominguez, J.: Boundary Elements : An Introductory Course. McGraw-Hill, 1992.
- [31] Inácio, O. – Antunes J. – Wright, M. C. M.: Computational modelling of string–body interaction for the violin family and simulation of wolf notes. In: Journal of Sound and Vibration 310. Elsevier, 2008. p. 260-286.

- [32] Garamvölgyi Zsolt: Physics-based Modeling of Membranes for Sound Synthesis Applications (diplomaterv). Budapest : BME MIT, 2008. p. 17-38.
- [33] Gaál József: Diszkrét idejű véletlen jelek (jegyzet). 2007.
- [34] Mattias Schevenels: The Impact of Uncertain Dynamic Soil Characteristics on the Prediction of Ground Vibrations (disszertáció). Katholieke Universiteit Leuven, 2007. p. 115-148.
- [35] Bartha Bendegúz – Vas Mihály András: Teremakusztikai modellezés sztochasztikus módszerrel (TDK dolgozat). 2008. p. 8-20.
- [36] Fiala Péter: Bevezetés a végelemek módszer alkalmazásába (Segédlet).
- [37] Pilkey, Deborah F.: Computation of a Damping Matrix for Finite Element Model Updating (disszertáció). Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, 1998. p. 2-17.
- [38] Rao, S.: The Finite Element Method in Engineering. 4. ed. Amsterdam et al. : Elsevier, 2004. p. 447-450.
- [39] Shimoseki M. et al: FEM for Springs. Berlin : Springer-Verlag, 2003. p. 38-40.