



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Hálózati Rendszerek és Szolgáltatások Tanszék

Rudas Annamária

SZÁJHARMONIKA HANGKELTÉSÉNEK
MODELLEZÉSE

KONZULENS

Dr. Rucz Péter

BUDAPEST, 2021

Tartalomjegyzék

Kivonat.....	4
Abstract.....	5
1 Bevezetés	6
1.1 Motiváció	6
1.2 A szájharmonika története	6
2 A szájharmonika hangkeltésének alapjai	8
2.1 A szájharmonika felépítése	8
2.2 A hangkeltés fizikája	9
2.3 Korábbi eredmények	11
3 A szájharmonika hangkeltésének modellezése.....	14
3.1 A nyelv rezgése.....	14
3.1.1 A rúd hajlító szabadrezgései	14
3.1.2 Peremfeltételek	16
3.1.3 Transzcendens egyenlet levezetése.....	16
3.1.4 Transzcendens egyenlet megoldása és a módusalakok kifejezése.....	17
3.2 Useful section	20
3.2.1 Useful section meghatározása.....	20
3.2.2 Nyelv kiterjesztése	21
3.2.3 Eredmények	23
3.3 Egyszerű modell	24
3.4 Egyenletrendszer megoldása.....	27
3.5 Eredmények	29
3.6 A gerjesztés modellezése	31
4 Szimulációk.....	33
4.1 A nyelv vastagságának vizsgálata.....	33
4.2 A szájüregmodell L1 paraméterének vizsgálata	35
4.3 A hézagrés vizsgálata.....	37
4.4 Elektronikus melléklet	39
5 Összefoglalás.....	40
Irodalomjegyzék	41

HALLGATÓI NYILATKOZAT

Alulírott **Rudas Annamária**, szigorló hallgató kijelentem, hogy ezt a szakdolgozatot meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, csak a megadott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Hozzájárulok, hogy a jelen munkám alapadatait (szerző(k), cím, angol és magyar nyelvű tartalmi kivonat, készítés éve, konzulens(ek) neve) a BME VIK nyilvánosan hozzáférhető elektronikus formában, a munka teljes szövegét pedig az egyetem belső hálózatán keresztül (vagy hitelesített felhasználók számára) közzétegye. Kijelentem, hogy a benyújtott munka és annak elektronikus verziója megegyezik. Dékáni engedéllyel titkosított diplomatervek esetén a dolgozat szövege csak 3 év eltelte után válik hozzáférhetővé.

Kelt: Budapest, 2021. 12. 08.

.....
Rudas Annamária

Kivonat

A zenei akusztika egyik leginkább kutatott témája az, hogy megértsük adott hangszerek működését és modellalkotással képesek legyünk hangjuk reprodukciójára. A számítástechnika fejlődésének köszönhetően erre egyre pontosabban, hangzáshoz hűen vagyunk képesek. Fizikai modellezés során a hangképzést meghatározó fizikai törvényeket, összefüggéseket igyekszünk utánozni: vannak állandó paramétereink amelyek a hangszer fizikai méreteit és anyagát írják le, illetve nehezebben meghatározható időfüggő függvények, melyek a játékos interakcióját fejezik ki a hangszerrel, mint például a gitár húrjainak pengetése, vagy a furulya hanglyukainak elfedése.

Szakdolgozatomban egy fúvós hangszer, a szájharmonika hangkeltését modellezem programkóddal, a Matlab programrendszer segítségével. A felhasznált elméleti modell a Millot-Baumann modell; ez a tanulmány egy minimális modellt ad átcsapó típusú nyelvekre, mely felhasználható numerikus szimulációkhoz.

Először röviden ismertetem a hangszer történelmét, majd fizikai felépítését, illetve hogyan képes hangprodukcióra. Bemutatom a modellt meghatározó egyenleteket, illetve konstans gerjesztésre meghatározom a modellben felvett változók értékeit időlépéses módszerrel. Továbbá megvizsgálom, mi történik, ha a gerjesztés nem konstans, hanem dinamikus. Szimulációk segítségével megfigyelem, hogy bizonyos bemeneti paraméterek változtatása milyen hatással van a produkált hangra, különös tekintettel a nyelv vastagságának szerepére a hangmagasságban. Végül pedig összehasonlítom a kapott eredményeket a Millot-Baumann tanulmányban bemutatott eredményekkel.

Abstract

One of the most researched topics in musical acoustics is to understand how musical instruments work and to be able to replicate their sound production with computer modeling. With the rapid development of technology, we are able to do this more and more accurately, true to sound. In physical modeling, we attempt to imitate the physical laws that determine sound formation: we have constant parameters that describe the physical dimensions and material of the instrument, and more difficult-to-determine time-dependent functions that express the player's interaction with the instrument, for example plucking the strings of a guitar or covering the holes on a flute.

In this thesis I model the sound production of a wind instrument, the harmonica, with program code using Matlab. The theoretical model used is the Millot-Baumann model; this study provides a minimal model for free reeds that can be used for numerical simulations.

I will first briefly describe the history of the instrument, then its physical structure and how it produces sound. I present the equations defining the model, and I determine the values of the variables included in the model for a constant excitation using a time-step method. Furthermore, I examine what happens when the excitation is not constant but dynamic. Using simulations, I observe the effect of changing certain input parameters on the produced sound, with particular interest of the role the reed thickness plays in the pitch. Finally, I compare the results obtained with the results presented in the Millot-Baumann study.

1 Bevezetés

1.1 Motiváció

A szájharmonika egy nyitott aerofon, másnéven fúvós hangszer [1]. A hangszerbe belefújva benne nyomáskülönbség alakul ki, ennek következtében pedig erő hat a hangszerben található hajlékony fémnyelvekre, amitől azok periodikus rezgésbe kezdenek [2]. Célom ezen hangszer működésének megértése, a hangprodukciónak meghatározó fizikai törvények szimulációja [3] és ennek segítségével szintetikus megszólaltatása.

A fúvós hangszerek működési elvének megértése önfenntartó oszcilláció fizikai modelleken keresztül már évtizedek óta téma a zenei akusztikában [4]. A Millot-Baumann modell egy egyszerűsített rendszert javasol átcsapó nyelvű hangszerekre, lehetővé téve numerikus szimulációkat [5]. Figyelembe veszi a nyelv geometriai paramétereit és a nyelv alatti felület (a useful section) változását, amelyen a levegő áthalad. Szakdolgozatomban ezt a modellt használom fel a szájharmonika hangkeltése fizikai modelljének megalkotásához.

Adott nyelv hangmagassága függ annak anyagi és alaki tulajdonságaitól: a nyelv hosszától, szélességétől, vastagságától és súlyától. Az elkészített modell validálása érdekében ezeket a paramétereket változtatva szimulációkat készítek, melyek eredményeit összehasonlítom a tanulmányban bemutatott eredményekkel.

1.2 A szájharmonika története

A szájharmonika kicsi, könnyű és viszonylag olcsó hangszer; kezdőként is lehet kellemes hangzást produkálni vele. Nem véletlenül lett népszerű: a zenetanulás anyagi és iskolázottsági korlátait lépte át ezzel. Az 1820-as években, Németországban jelent meg először a hangszer, amikor még zongorahangolási segédeszközként használták. Azonban gyártása munkaigényes volt, a kereslet iránta pedig változó, ezért nem terjedt el azonnal. Alapvetően német és más európai népzene játszására volt tervezve, de idővel más stílusokhoz is adaptálták, például blues vagy country, mivel új hangszereknek számított, ami nem kötődött kifejezetten semmilyen kultúrához vagy nemzethez. Hartmut Berghoff tanulmánya [6] jó rálátást ad arra, hogy hogyan tudtak a hangszer gyártói egy egész világra kiterjedő piacot kialakítani.

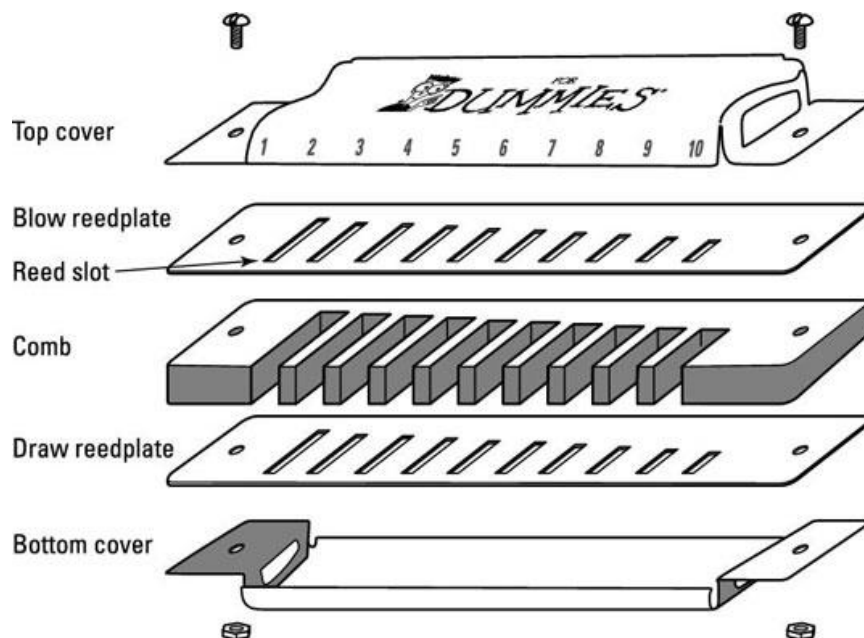
Amerikában először a polgárháború alatt jelent meg: a szájharmonika kis mérete miatt könnyen maguknál tudták tartani a katonák, akiknek vigaszt és szórakoztatást nyújtott, ha játszhattak. A háborút követően az ország gyors iparosodásba kezdett, az emberek rendelkezésre álló jövedelme nőtt, illetve postai csomagküldő szolgálatok jelentek meg; mindez segített a hangszer elterjedésében, melynek készítése az 1800-as évek végére már tömeggyártással történt. A szájharmonika népszerűségét segítette, hogy keresett ajándék volt gyerekeknek, illetve első világháborús katonák zsebében könnyen elfért, akik hasonló okokból kedvelték, mint az amerikai polgárháború katonái.

Érdekesség, hogy a szájharmonikának tüdőgyógyászati jelentősége is van: ellenállással szembeni erős be- és kilégzés szükséges játék közben [7], ami krónikus légúti betegségek rehabilitációjához használt gyakorlatokhoz hasonlít, mivel ez a művelet elősegíti az erős rekeszizom és a mély légzés kialakítását a teljes tüdőterefogat felhasználásával. A hangszeren való játék elsajátítása a rehabilitáció mellett motivációt is kínál, ezért számos tüdőrehabilitációs programban használják.

2 A szájharmonika hangkeltésének alapjai

2.1 A szájharmonika felépítése

Sokféle szájharmonika létezik; a diatonikus és a kromatikus szájharmonikák talán a legnépszerűbbek. A diatonikus szájharmonikákon alapvetően csak diatonikus hangsor játszható le, azonban vannak technikák, melyekkel köztes hangok is megszólaltathatók; kromatikus szájharmonikák esetében különböző technikai megoldások nélkül játszható le a teljes kromatikus skála [8]. Millot [9] tanulmánya azt vizsgálja, hogy mi történik a hangszer belsejében a különböző technikák alkalmazásakor.

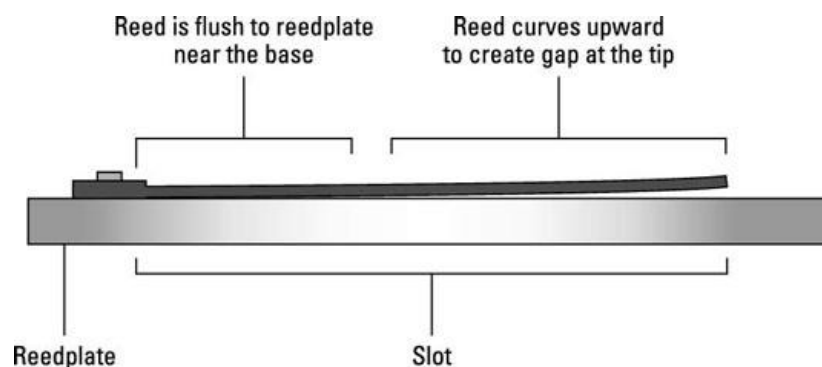


2.1. ábra: A szájharmonika részei. Fentről lefele: felső burkolat; lamellaszor; fésű; lamellaszor; alsó burkolat [16]

William Melton és Randy Weinstein könyve [10], mely egy útmutató a szájharmonikázáshoz, ismerteti annak részletes felépítését is: a hangszer egy fésűnek nevezett test, az ezt közrefogó két lamellaszorból, illetve egy külső burkolatból áll (2.1. ábra). A test anyaga lehet fa, műanyag vagy fém. A játékosok között vita van arról, hogy a fésű anyaga befolyásolja-e a harmonika hangját: egyrészt a szájharmonika teste nem elég nagy, és nem képes elég szabadon rezegni ahhoz, hogy jelentősen növelje vagy más módon megváltoztassa a hangzást. Ugyanakkor vannak, akik azt mondják, hogy jelentős hangzásbeli romlást érzékelnek, ha a fésű anyaga fától eltérő.

Abban viszont egyetértés van, hogy egy adott fésűanyag fő előnye egy másikkal szemben a tartóssága. Különösképpen a fa fésű képes felszívni a nedvességet a játékos leheletéből és a nyelvvel való érintkezésből, aminek következtében a fésű kitágulhat, ezzel kényelmetlenné téve a játékot; emiatt szükség lehet a fa fésű preventatív kezelésére. A kényelmetlenségnél komolyabb következménye a fésű nedvességből adódó tágulásának, hogy miután megszárad, visszazugorodik, ez az oda-vissza mozgás pedig idővel repedéseket eredményez a testben, aminek pedig levegőszivárgás a következménye.

A szájharmonika testét közrefogó lamellatorokra (melyeket rézfésűként [8] is szoktak megnevezni) lamellák (másnéven: rézlapocskák, nyelvek) vannak rögzítve, ezek rezgésének frekvenciája szabja meg a hang magasságát. A lamellák anyaga lehet sárgaréz, rozsdamentes acél vagy bronz. Egy lamella a 2.2 ábrán látható módon egyik végén rögzítve van, másik végén nem; a nyelv nyugalmi állapotban sem lapos, szabad végénél lehet egy alapvető elállása.



2.2. ábra: A nyelv nyugalmi állapotban [16]

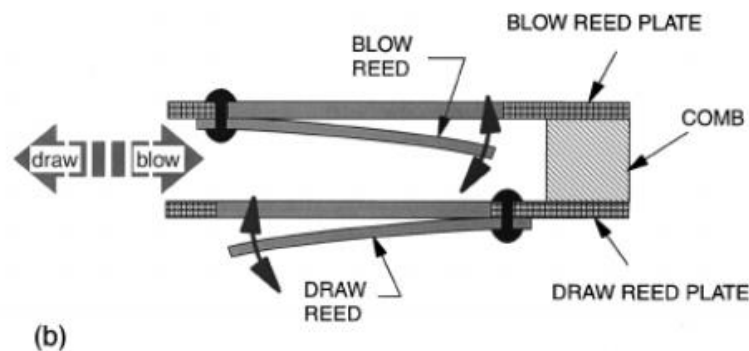
A lamellákat a lamellatorhoz csavarozással vagy szegecseléssel rögzítik. A csavarozás előnye, hogy a lamellák egyesével eltávolíthatók; ez hasznos, mivel idővel a lamellák elhangolódhatnak és szükség van cseréjükre.

A szájharmonika burkolata általában fémből vagy fából készül. A szájrészt a fésű légkamrája és a játékos szája közé helyezve [7]; lehet a fésű vagy a burkolat beépített része, vagy különálló, csavarokkal rögzített darabja.

2.2 A hangkeltés fizikája

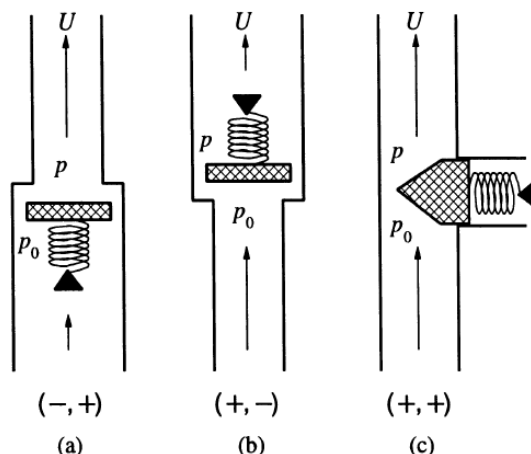
A nyelv modellezhető egy csillapított tömeg-rugó rendszerként: van tömege, rugóállandója és ha megpengetik, akkor sajátfrekvenciájával rezeg. A megpengetett nyelv

rezgése az anyag belső veszteségéből és a levegővel való surlódásból adódó csillapítások miatt lecseng. A nyelv és a tartó lap közötti résen a befújás hatására átáramló levegő által erő hat erre a tömeg-rugó rendszerre. Ez az erő gerjeszti a rendszert; amikor a játékos túlnyomást hoz létre a szájüregében, majd belefúj a játszani kívánt hangnak megfelelő lyukba [7] (mely egy légkamra, amit a lamellásorok határolnak), a keletkezett erő meglöki a nyelvet, ami rugalmasan visszatér. Emiatt a mozgás miatt változik a nyelv és a tartó lap közötti rés mérete, ezáltal pedig a nyelvre ható erő is. A nyelvre ható erő felveszi a nyelv rezgésének periódusát, ezáltal konstans befújásra is rezgőmozgás alakul ki, a hangszer pedig megszólal. A rezgésbe hozott nyelvek természetes frekvenciájukhoz nagyon közeli frekvenciával rezegnek [11].



2.3. ábra: Keresztmetszeti kép a szájharmonikáról. Fújás esetén a blow reed „záródik”, a draw reed „kinyílik”. Szívás esetén ehhez hasonlóan a blow reed „kinyílik” a draw reed pedig „záródik”. [11]

Azok a nyelvek, melyek a lamellásor belső oldalához vannak rögzítve, tehát ahol a nyelv belelóg a fésű légkamrájába, fújásra reagálnak (pozitív nyomás); ezzel ellentétesen azok a nyelvek, melyek a lamellásor külső oldalához vannak rögzítve, azok szívásra reagálnak (negatív nyomás). Ezzel a konstrukcióval tehát fújás és szívás esetén is lehet meg lehet szólaltatni a hangszeret; ez látható a 2.3. ábrán. Fújás esetén a blow reed az „aktív” nyelv, a draw reed pedig a „passzív” nyelv; szívás esetén a draw reed az „aktív” nyelv, a blow reed pedig a „passzív” nyelv. A „passzív” nyelv játék közben kis mértékben szintén rezeg az „aktív” nyelvhez hasonlóan, sokkal kisebb amplitudóval. A nyelveket modellezés szempontjából szelepeknek is tekinthetjük [12], melyeket nyomáskülönbség mozdit meg. Ezeket a nyomásvezérelt szelepeket három kategóriában vizsgáljuk, melyek függetlenek attól, hogy fújás vagy szívás okozza a szelep kitérítését (2.4. ábra).



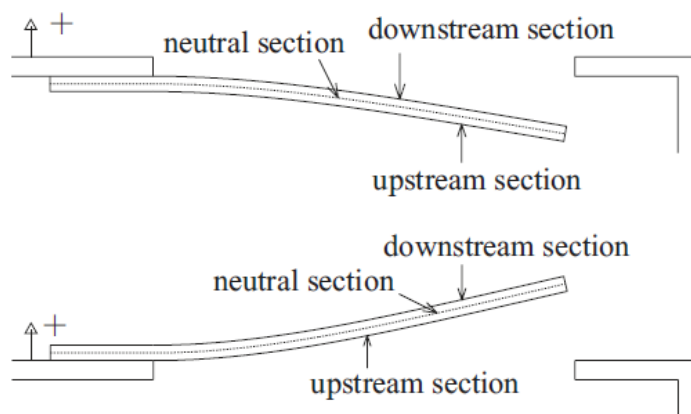
2.4. ábra: A nyelv mint nyomásvezérelt szelep. A bemeneti nyomást p_0 , kimeneti nyomást p jelöli. [12]

A szelepeket (σ_1, σ_2) szimbólumokkal jellemezhetjük: σ_1 pozitív, ha nyomástöbblet a bemenetnél kinyitja a szelepet, negatív ha zárja. σ_2 pozitív, ha a túlnyomás hatására zár a szelep, negatív ha nyit. Ennek mintájára megkülönböztetünk blown open és blown closed nyelveket: blown open esetben a nyelv nyugalmi állapotából nyomás hatására „kinyílik”, távolodik a tartó laptól. Blown closed esetben a nyelv nyugalmi állapotából nyomás hatására „záródik”, közeledik a tartó laphoz [13]. Ezek alapján a 2.4. ábrán látható (a) konfiguráció $(-, +)$ blown closed nyelvnek, a (b) konfiguráció $(+, -)$ blown open nyelvnek felel meg.

Minden nyelv egyedi hangmagasságra van hangolva. Ez függ a nyelv hosszától, súlyeloszlásától és merevségétől. Hosszabb, nehezebb és rugalmasabb nyelvek általában mélyebb hangokat produkálnak; rövidebb, könnyebb és merevebb nyelvek magasabb hangokat képesek létrehozni [10].

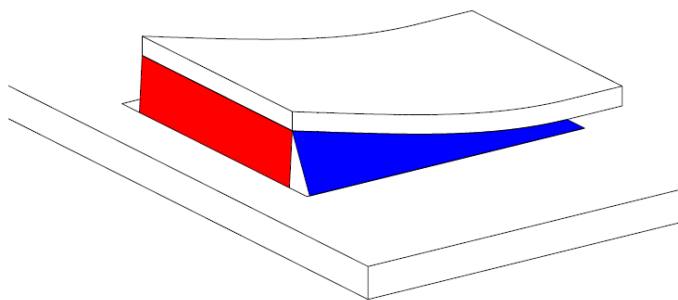
2.3 Korábbi eredmények

Általánosságban véve az átcsapó nyelvű (free reed) hangszerekről (mint amilyen a szájharmonika is) kevesebb tanulmány van rácsapó (beating reed) típusúakkal ellentétben [14]; Laurent Millot tanulmányai ezen a téren különösképpen fontosak.



2.5. ábra: Blown closed (fent) és blown open (lent) típusú nyelvek felvív és alvív oldalai [5]

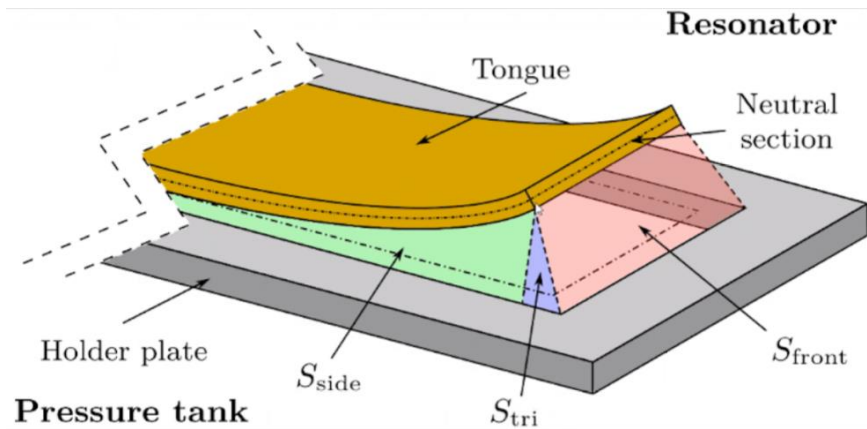
A Millot-Baumann tanulmány [5] új konfigurációt mutat be a nyelv és a lamellator közötti terület meghatározására, melyen a levegő áthalad (useful section). Ebben a nyelv alatti teljes tartományt, valamint a nyelv vastagságát is figyelembe veszi. Ehhez szükséges elkülöníteni a nyelv különböző szakaszait: a semleges szálát (neutral section), mely hossza mozgás közben állandó, továbbá az felvív (upstream section) és alvív (downstream section) részeket, melyek hossza mozgás közben megnyúlik illetve összehúzódik [15].



2.6. ábra: A useful section hiányos modellje [5]

A useful section meghatározása korábban csak a nyelv elülső része és a tartó lap közötti területet vette figyelembe (2.6. ábrán a pirossal jelölt terület). Rácsapó nyelvek esetében ez a modell az elfogadott, azonban átcsapó nyelveknél pontosabb számításokra van szükség.

Készültek ennél komplikáltabb modellek, de azok se vették számításba a teljes területet: a 2.6. ábrán látható módon a nyelv sarkainál maradt terület, mely nem került beszámításra a useful section meghatározásakor.



2.7. ábra: A useful section három része, S_{front} , S_{side} és S_{tri} jelölve rendre piros, zöld és kék színekkel [17]

Az [5] tanulmány módszere a useful section meghatározására nem mellőzi a korábban kihagyott területeket: a 2.7. ábrán látható a három tartomány, amivel az egész useful section lefedhető. A részletes számításokat később ismertetem, a 3.2.-es fejezetben.

3 A száharmonika hangkeltésének modellezése

3.1 A nyelv rezgése

A nyelv mozgásegyenletének levezetése során, illetve a nyelv rezgésformáinak meghatározása során feltételezzük, hogy az egydimenziós: kitérése keresztirányban lényegesen kisebb, mint hosszirányban. A témába kellően részletes betekintést adott Fiala Péter egyetemi jegyzete [15].

3.1.1 A rúd hajlító szabadrezgései

Rudak hajlító rezgéséről akkor van szó, ha egy egydimenziós rúdra keresztirányú erő hat, melynek következtében a rúd meghajlik. A továbbiakban feltételeznünk kell, hogy eközben a rúd keresztmetszete változatlan, illetve a rúd semleges szálának hossza nem változik.

A rudak hajlító rezgéseit leíró mozgásegyenlet levezetése részletesen megtalálható [15]-ben, melyhez Newton második törvényéből, illetve a Hooke-törvényből kell kiindulni. Ezek alapján az egyenlet:

$$g(x, t) - (E \cdot I(x) \cdot u''(x, t)) = \rho \cdot A(x) \cdot \ddot{u}(x, t) \quad (3.1)$$

ahol

$g(x, t) = \left[\frac{N}{m} \right]$ rúdra ható erőeloszlás,

$E = [Pa]$ Young-modulus,

$I(x) = [m^4]$ a rúd keresztmetszetének y irányú hajlítással szemben támasztott másodrendű nyomatéka, vagy más néven inerciája,

$u(x, t) = [m]$ a rúd transzverzális kitérése,

$\rho = \left[\frac{kg}{m^3} \right]$ a rúd sűrűsége,

$A(x) = [m^2]$ a rúd keresztmetszete.

Amennyiben a Young-modulus és a rúd keresztmetszete állandó, a rúd inerciája is állandó, ebben az esetben a mozgásegyenlet:

$$g(x, t) - E \cdot I \cdot u^{(4)}(x, t) = \rho \cdot A \cdot \ddot{u}(x, t) \quad (3.2)$$

Feltételezzük, hogy nem hat erő a rúdra, tehát szabadrezgést végez, ekkor $g(x, t) = 0$. A homogén rúdegyenlet megoldását a változók szeparálásának módszerével keressük; a rúd transzverzális kitérését felosztjuk csak időtől (t), illetve csak helytől (x) függő tagokra:

$$u(x, t) = U_t(t) \cdot U_x(x) \quad (3.3)$$

A rúd transzverzális kitérésének átírását visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$E \cdot I \cdot U_t(t) \cdot U_x^{(4)}(x) = \rho \cdot A \cdot U_x(x) \cdot \ddot{U}_t(t) \quad (3.4)$$

A csak időtől, illetve csak helytől függő tagokat azonos oldalra átrendezve megkapjuk az egyenleteket, amelyeket meg akarunk oldani:

$$-\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A} \cdot \frac{U_x^{(4)}(x)}{U_x(x)} = \frac{\ddot{U}_t(t)}{U_t(t)} = -\omega^2 \quad (3.5)$$

ahol ω a sajátfrekvencia. Ezt követően keressük külön a csak időtől, illetve csak helytől függő tagok megoldásának alakját. Az időtől függő tag esetében egy olyan függvényre van szükségünk, melynek második deriváltja önmagával arányos, a megoldás alakja tehát:

$$U_t(t) = U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad (3.6)$$

A helytől függő tag esetében olyan függvényt keresünk, melynek negyedik deriváltja önmagával arányos, itt a megoldás alakja:

$$U_x(x) = A \cdot \sin(k \cdot x) + B \cdot \cos(k \cdot x) + C \cdot \operatorname{sh}(k \cdot x) + D \cdot \operatorname{ch}(k \cdot x) \quad (3.7)$$

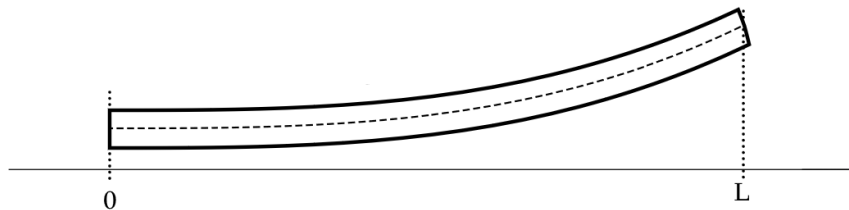
ahol

$$k = \frac{\rho \cdot A}{E \cdot I} \cdot \omega^2 \quad (3.8)$$

a hullámszám. Mivel k , ω , illetve A , B , C , és D változók mind ismeretlenek, szükséges megadnunk bizonyos peremfeltételeket, hogy a megoldások halmazát leszűkíthessük.

3.1.2 Peremfeltételek

A rúd két vége, amivel modellezük a nyelvet, többféle módon lehet rögzítve, ezeket a rögzítési módokat pedig fizikai mennyiségek definiálják, melyek által felírhatunk peremfeltételeket. A rúd végeinek rögzítése lehet egyszerű alátámasztás, merev befogás, vagy rögzítés nélküli, szabad rúdvég. A harmonika nyelve egyik végén szabad, másik végén merev befogással rögzített rúdként modellezhető. Felvehető egy koordináta rendszer, melyben a rúd merev befogással rögzített vége a zérus, a rúd szabad vége pedig L , a rúd hossza. Ez az elrendezés látható a 3.1. ábrán.



3.1. ábra: Koordináta rendszer 0-tól L -ig, a nyelv hosszában

A merev-szabad rúd mereven befogott végén az elmozdulás és szögelfordulás is zérus ($u(0) = 0$ illetve $u'(0) = 0$), szabad végén pedig sem erővel sem pedig nyomatékkal nem terheljük ($u''(L) = 0$ és $u'''(L) = 0$). Ezáltal meghatároztuk a merev-szabad lezárással befogott rúd peremfeltételeit.

3.1.3 Transzcendens egyenlet levezetése

A (3.7) egyenletbe a peremfeltételeknek megfelelően helyettesítünk be:

$$U_x(x) = A \cdot \sin(k \cdot 0) + B \cdot \cos(k \cdot 0) + C \cdot sh(k \cdot 0) + D \cdot ch(k \cdot 0) = 0 \quad (3.9)$$

$$U_x^{(x)} = A \cdot \sin(k \cdot 0) + B \cdot \cos(k \cdot 0) + C \cdot sh(k \cdot 0) + D \cdot ch(k \cdot 0) = 0 \quad (3.10)$$

$$U_x^{(x)} = A \cdot \sin(k \cdot L) + B \cdot \cos(k \cdot L) + C \cdot sh(k \cdot L) + D \cdot ch(k \cdot L) = 0 \quad (3.11)$$

$$U_x^{(x)} = A \cdot \sin(k \cdot L) + B \cdot \cos(k \cdot L) + C \cdot sh(k \cdot L) + D \cdot ch(k \cdot L) = 0 \quad (3.12)$$

Ezeknek megoldása sorban:

$$D = -B \quad (3.13)$$

$$C = -A \quad (3.14)$$

$$U_x^{(x)} = A \cdot (\sin(k \cdot L) + sh(k \cdot L)) + B \cdot (\cos(k \cdot L) + ch(k \cdot L)) = 0 \quad (3.15)$$

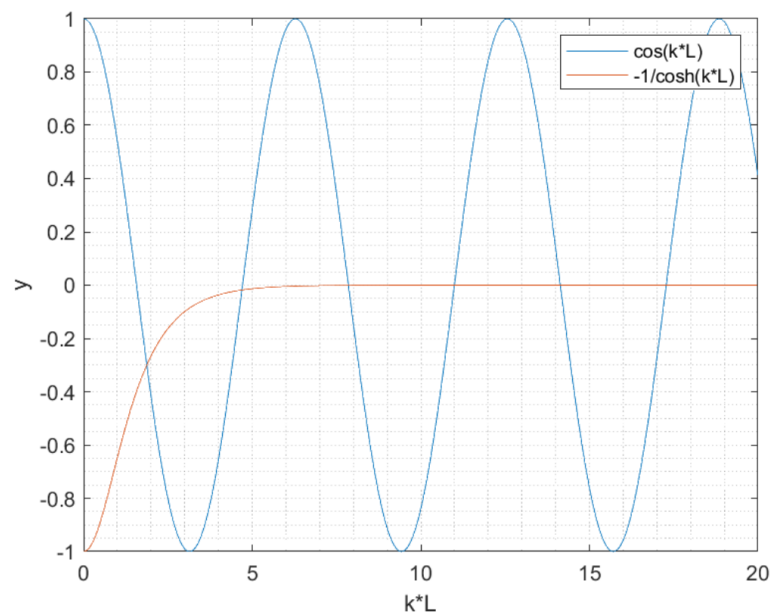
$$U_x''''(x) = -A \cdot (\cos(k \cdot L) + \operatorname{ch}(k \cdot L)) + B \cdot (\sin(k \cdot L) - \operatorname{sh}(k \cdot L)) = 0 \quad (3.16)$$

(3.15) és (3.16) egyenleteket B -re kifejezve, majd pedig a két egyenletet egyenlővé téve a megoldás a transzcendens egyenlet lesz:

$$\cos(k \cdot L) = -\frac{1}{\operatorname{ch}(k \cdot L)} \quad (3.17)$$

3.1.4 Transzcendens egyenlet megoldása és a módusalakok kifejezése

A transzcendens egyenlet grafikus megoldásán (3.2. ábra) a metszéspontok adják a (3.17) egyenlet megoldását.



3.2. ábra: A transzcendens egyenlet grafikus megoldása

A pontos megoldás a hullámszámmra:

$$k_n = \frac{\pi}{2 \cdot L} \cdot [1,194 \quad 2,985 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad \dots] \quad (3.18)$$

A hullámszámból (3.8) alapján kifejezhető a sajátfrekvencia is:

$$\omega_n = C_l \cdot K \cdot \frac{\pi^2}{4 \cdot L^2} \cdot [1,194^2 \quad 2,985^2 \quad 5^2 \quad 7^2 \quad 9^2 \quad \dots] \quad (3.19)$$

ahol C_l a longitudinális hullámok terjedési sebessége

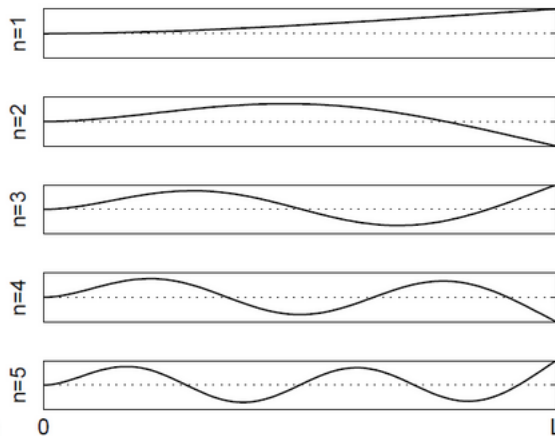
$$C_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.20)$$

illetve K az inerciasugár

$$K = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (3.21)$$

Amennyiben a rúd szabadrezgést végez, adott rezgésformák fognak kialakulni, hozzátartozó k_n hullámszámokkal. Ezeket a rezgésformákat, melyek az állóhullám térfüggését írják le, módusalakoknak hívják; jelölésük: ψ_n .

A módusalakok lineárisan függetlenek egymástól; egy módusalak sem állítható elő a többi szuperpozíciójaként, viszont tetszőleges rezgésalak előállítható a módusalakok szuperpozíciójából.



3.3. ábra: A rúd hajlító módusai [15]

A módusalakokat a következőképpen lehet kifejezni:

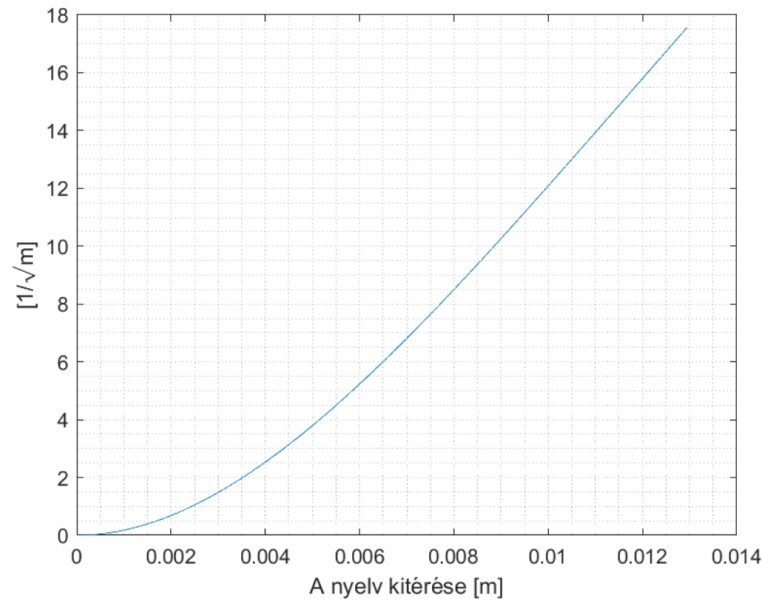
$$\psi_n = A \cdot [\sin(k_n \cdot x) - sh(k_n \cdot x)] + B \cdot [\cos(k_n \cdot x) - ch(k_n \cdot x)] \quad (3.22)$$

B értéke (3.15)-ből átrendezve:

$$B = -A \cdot \frac{\sin(k_n \cdot L) + sh(k_n \cdot L)}{\cos(k_n \cdot L) + ch(k_n \cdot L)} \quad (3.23)$$

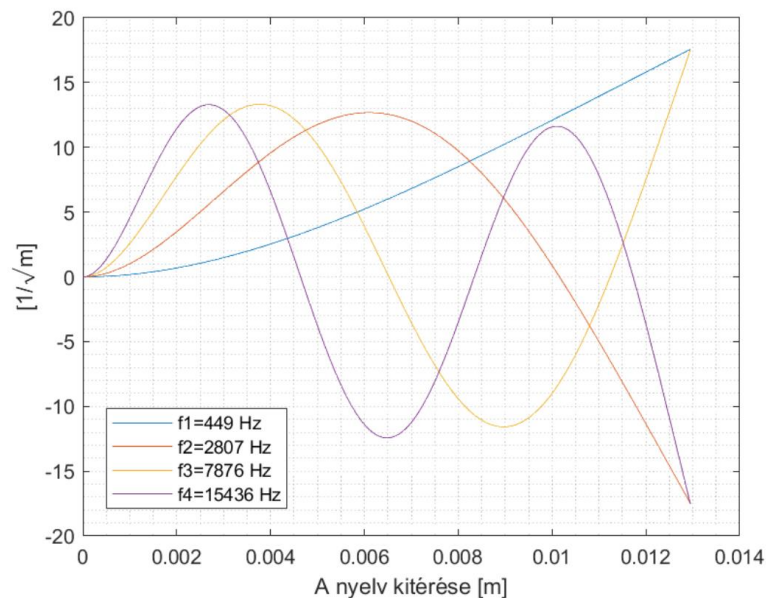
A értéke pedig tetszőlegesen megválasztható, mivel a rezgésalakok bármekkora amplitudóval kialakulhatnak; az én választásom: $A = 1$.

Matlab program [17] segítségével kirajzoltattam az első módus alakját: megadtam a nyelv geometria- és anyagparamétereit, ezek alapján meghatároztam a hullámszámot, majd a rúd módusalakját leíró egyenletet. Az eredmény a 3.4. ábrán látható.



3.4. ábra: Az első módusalak

A 3.3. ábrán láthatóak a nyelv módusalakjai, azonban a szájharmonika esetében elég csak az első módot figyelembe venni, mivel mindig az lesz a domináns; magasabb rendű módusok nem gerjesztődnek, csak az alapmódus és annak harmonikusai vannak jelen megszólaltatáskor. Más hangszereknél ez nem feltétlenül van így, azonban a szájharmonika esetében felesleges magasabb rendű módusokkal számolni, noha azt az elméleti modell lehetővé tenné (3.5. ábra).



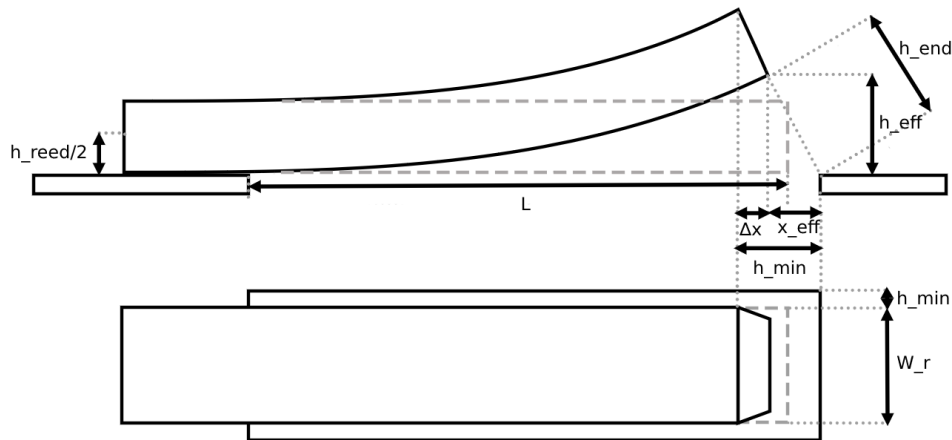
3.5. ábra: A nyelv első négy módusa, sajátfrekvenciákkal feltüntetve

3.2 Useful section

A useful section az a felület, melyen a mozgó nyelv és az őt tartó lap között átfolyik a levegő. A felület nagysága a nyelv mozgásával változik, meghatározva az átfolyó levegő mennyiségét. A Millot-Baumann tanulmány új módszert ad a useful section számítására, amely figyelembe veszi a teljes területet a nyelv és a tartó lap között. A useful section számításánál a nyelvre már nem tekinthetünk csupán egydimenziós rúdként, figyelembe kell vennünk a geometriai tulajdonságait.

3.2.1 Useful section meghatározása

Alapvetően három típusú szekcióra osztja (2.7. ábra) a Millot-Baumann tanulmány a nyelv és a tartó lap közötti területet: az elülső trapéz alakú szakaszra (S_{front}), két oldalt a nyelv hosszát végigkövető szakaszokra (S_{side}), illetve e kettő közötti két háromszög alakú szakaszra (S_{tri}). Ennek a három szakasznak az összege adja a useful section-t (S_u). A 3.6. ábrán láthatóak a felvett változók, illetve az 1. táblázat feltünteti a számításokhoz használt értékeket.



3.6. ábra: A useful section számításához felvett változók magyarázata. A felső ábrán a nyelv oldalnézetből, az alsó ábrán pedig felülnézetből van ábrázolva.

A trapéz területképlete alapján meghatározható S_{front} :

$$S_{front} = \frac{W_r + (W_r + 2 \cdot h_{min})}{2} \cdot h_{end} \quad (3.24)$$

ahol h_{end} felírható h_{eff} és x_{eff} segítségével, a Pitagorasz-tétel értelmében.

Mivel

$$h_{min} = \Delta x + x_{eff} \quad (3.25)$$

ezáltal behelyettesítés után S_{front} :

$$S_{front} = (W_r + h_{min}) \cdot \sqrt{h_{eff}^2 + (h_{min} - \Delta x)^2} \quad (3.26)$$

A nyelv két oldalát követő S_{side} szakasz meghatározásához integrálásra van szükség: a területet kis négyzetekre bontjuk, ezeket pedig összegezzük. h_{eff} helyfüggő, mivel a nyelv hosszában értéke változik (3.7 ábra).

$$S_{side} = \int_0^L \sqrt{h_{eff}^2(s) + h_{min}^2} ds \quad (3.27)$$

A háromszög alakú S_{tri} területek meghatározásához a háromszög területképlete használható fel:

$$S_{tri} = 2 \cdot \frac{x_{eff} \cdot h_{eff}}{2} \quad (3.28)$$

A (3.25) egyenlet alapján a képlet átírható:

$$S_{tri} = (h_{min} - \Delta x) \cdot h_{eff} \quad (3.29)$$

A meghatározott három szakasz összege adja a useful section-t:

$$S_u = S_{front} + S_{side} + S_{tri} \quad (3.30)$$

3.2.2 Nyelv kiterjesztése

A módusalak csak a semleges szál mozgását írja le, a useful section számításánál azonban szükség van a felvív és alvív szálak mozgására is. A 3.6. ábrán látható, hogy a useful section számításához a nyelv geometriája elhanyagolhatatlan: a (3.25) egyenletben bevezetett Δx értékéhez kell a nyelv felvív és alvív szálainak pozíciója.

Ehhez először meg kell határozni a semleges szál függőleges és vízszintes mozgását leíró egyenleteket. Ezt követően geometriai számításokkal felírható a nyelv szélének függőleges és vízszintes elmozdulása a semleges szálhoz képest. Így meghatározható a felvív és alvív szálak mozgása.

A semleges szál függőleges komponense:

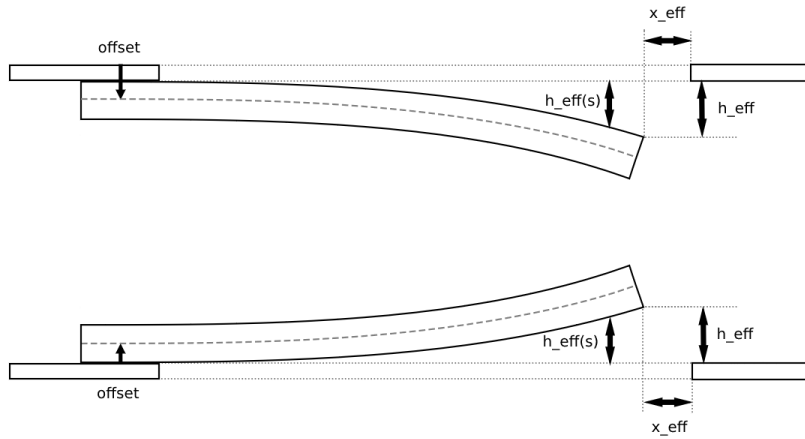
$$y_n(x, t) = u(x, t) + offset \quad (3.31)$$

ahol $u(x, t)$ a nyelv kitérése:

$$u(x, t) = \alpha_1(t) \cdot \psi_1(t) \quad (3.32)$$

Az $\alpha_1(t)$ a modális koordináta, mely a nyelv mozgását írja le az idő függvényében.

Az *offset* azt mondja meg, hogy a semleges szál milyen távol van a nyelvet tartó lap szélétől. A useful section három szekciója ugyanaz blown closed és blown open esetben is, azonban egyes változók számítási módja eltér. Például az *offset* esetében a 3.7. ábrán látható, hogy blown open nyelvénél az *offset* a nyelv vastagságának felével egyenlő, blown closed esetben azonban ehhez még hozzá adódik a nyelvet tartó lap vastagsága.



3.7. ábra: A nyelv blown closed (fent) és blown open (lent) esetben

A nyelv szélének függőleges és vízszintes elmozdulásának meghatározásához szükséges a semleges szál meredeksége; ez minden pontban:

$$u'(x, t) = \frac{du}{dx} \quad (3.33)$$

Ez megegyezik a 3.8. ábrán látható derékszögű háromszögben felvett α szög tangensével:

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta X}{\Delta Y} = \frac{du}{dx} \quad (3.34)$$

Továbbá a háromszögre felírható a Pitagorasz-tétel is:

$$\left(\frac{h_{reed}}{2}\right)^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2 \quad (3.35)$$

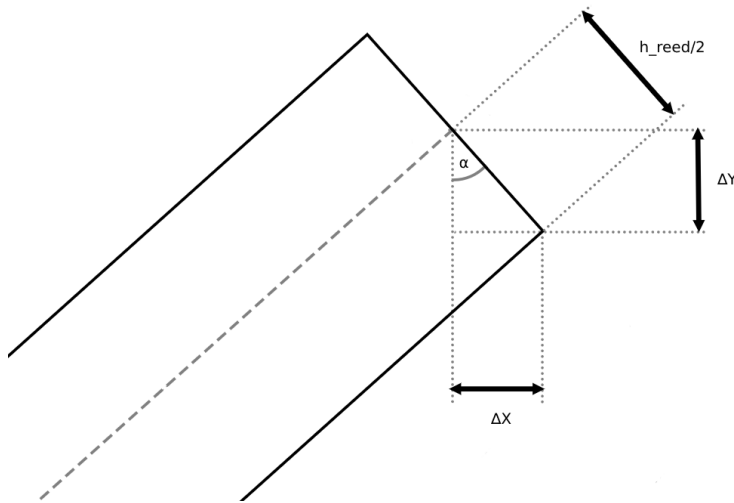
ahol h_{reed} a nyelv vastagsága.

A (3.35) egyenletet átrendezve ΔY -ra:

$$\Delta Y = \frac{h_{reed}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2}} \quad (3.36)$$

A (3.34) egyenlet megadja a kapcsolatot ΔY és ΔX között, tehát ΔX kifejezhető (3.36) alapján:

$$\Delta X = \frac{du}{dx} \cdot \frac{h_{reed}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2}} \quad (3.37)$$



3.8. ábra: A nyelv kitérése függőleges és vízszintes irányban

A felvív szál vízszintes és függőleges komponensei:

$$x_{up} = x_n(x, t) + \Delta X \quad (3.38)$$

$$y_{up} = y_n(x, t) - \Delta Y \quad (3.39)$$

Az alvív szál vízszintes és függőleges komponensei:

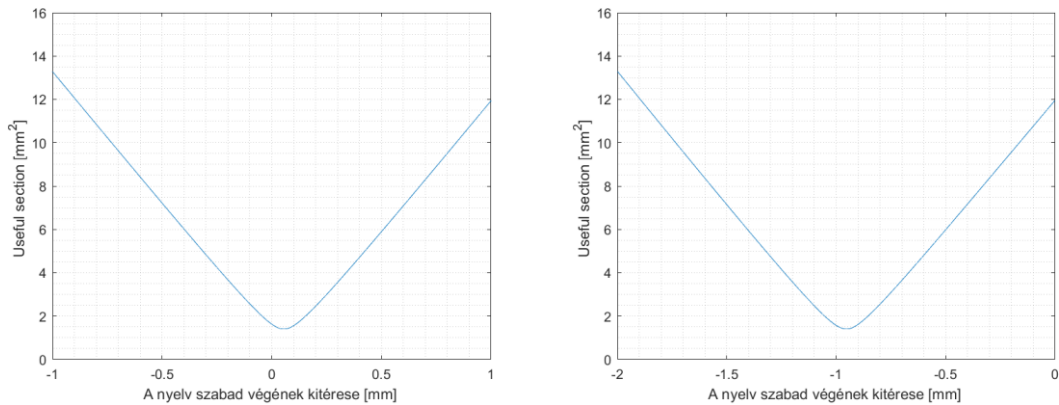
$$x_{dn} = x_n(x, t) - \Delta X \quad (3.40)$$

$$y_{dn} = y_n(x, t) + \Delta Y \quad (3.41)$$

ahol $x_n(x, t)$ a semleges szál vízszintes komponense.

3.2.3 Eredmények

A nyelv felvív és alvív szálai mozgásának meghatározása után kiszámolható a useful section. Mivel a nyelv mozgásával a tartó lap és a nyelv közötti terület változik, így a useful section ennek függvényében ábrázolható; ez látható a 3.9. ábrán.



3.9. ábra: Useful section ábrázolása a nyelv kitérésének függvényében blown open (bal), illetve blown closed (jobb) típusú nyelv esetén

A useful section értéke nő a nyelv kilengésével és csökken, ahogyan a nyelv az azt tartó lap takarásába kerül. Az *offset* miatt a useful section minimuma eltolódik a nullához képest. A nyelv rezgése a hangkeltés közben szinte tökéletesen szinuszos, viszont a useful section a nyelv kitérésének nemlineáris függvénye. Ennek következtében harmonikus nyelvrezgés esetén is felharmonikusokban gazdag lesz a lesugárzott hang.

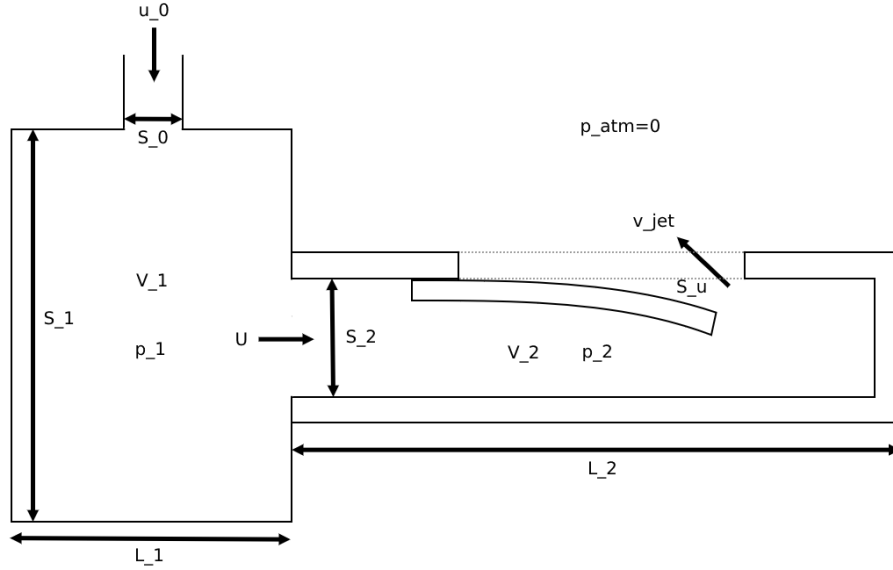
A hangszer számításokhoz felhasznált paraméterei a Millot-Baumann tanulmányban felhasznált paraméterek, melyek az 1. táblázatban vannak feltüntetve.

1. táblázat: Useful section számításához felhasznált értékek [5]

leírás	jelölés	érték
a nyelv hossza	L	12,95mm
a nyelv szélessége	W_r	2,1mm
a nyelv vastagsága	h_{reed}	110 μ m
hézagrés	h_{min}	50 μ m

3.3 Egyszerű modell

A nyelv mozgását meghatároztuk, ismert a területet, amin a levegő átáramlik a nyelv és a tartó lap között. Következő lépés egy olyan konfiguráció felvétele, amely modellezi mi történik, amikor a játékos belefúj a hangszerbe; ez látható a 3.10. ábrán. A konfiguráció úgy van megalkotva, hogy képes legyen (+, -) típusú és (-, +) típusú nyelvek vizsgálatára is.



3.10. ábra: Minimális modell blown closed típusú nyelvvel ábrázolva [5]

A játékos szájürege a modellben V_1 térfogatú és S_1 keresztmetszetű és L_1 hosszú, benne a nyomás p_1 , melyről feltételezzük, hogy egyenletesen oszlik el a térfogatban. V_1 térfogatba u_0 térfogatáram áramlik be, S_0 keresztmetszetű csövön keresztül. A gerjesztés v_0 . A szájüreg után egy L_2 hosszú cső található, amely a szájharmonika test egy légkamráját modellezi. A cső keresztmetszetét S_2 jelöli, térfogata V_2 . A csőben a nyomás p_2 , melyről szintén feltételezzük, hogy egyenletes eloszlású. A p_1 és p_2 közötti nyomáskülönbség hatására kialakuló térfogatáramot jellemzi U . A cső végében (+, -) vagy (-, +) típusú nyelv található, ami mellett a levegő S_u területen halad át, v_{jet} sebességgel. A hangszeren kívül a hangnyomás: $p_{atm} = 0 \text{ Pa}$.

A modellhez Millot-Baumann a következő egyenletrendszerrel veszi fel:

$$p_2 = p_{atm} + \frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot v_{jet}^2 \quad (3.42)$$

$$U = S_r \cdot \frac{d\xi}{dt} + \alpha \cdot S_u \cdot v_{jet} \quad (3.43)$$

$$\frac{V_1}{c_0^2} \cdot \frac{d(p_1 - p_{atm})}{dt} = \rho_0 \cdot (u_0 - U) \quad (3.44)$$

$$p_1 = p_2 + \rho_0 \cdot \frac{L_2}{S_2} \cdot \frac{dU}{dt} \quad (3.45)$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{1}{Q} \cdot \omega_0 \cdot \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \cdot \xi = \mu \cdot (p_2 - p_{atm}) \quad (3.46)$$

A (3.42) Bernoulli-egyenletből van levezetve: azt adja meg, hogy milyen sebességgel (v_{jet}) áramlik ki levegő egy tartályból, melyben p_2 nyomás van, egy lyukon keresztül, p_{atm} nyomással rendelkező térbe. ρ_0 a levegő sűrűsége.

A (3.43) egyenlet a térfogatáramot fejezi ki. α a *vena contracta* hatást jellemző szűkületi tényező, mivel az áramlás nem fogja kitölteni teljesen a felületet, amin áthalad; tapasztalati értéke $\alpha = 0,6$. A térfogatáram egyrésztől adódik az S_u felületen v_{jet} sebességgel átáramló térfogatáramból, másrésztől hozzáadódik, hogy maga a nyelv képes maga előtt tolni a levegőt (S_r a nyelv súlyozott felülete, mely figyelembe veszi, hogy a nyelv különböző pontjai eltérő sebességgel mozognak).

$u_0 \neq u$, mivel V_1 térfogatban keletkezhet nyomástöbblet. A térfogatban lévő nyomásváltozást a $\frac{d(p_1 - p_{atm})}{dt}$ kifejezés adja meg. A (3.44) egyenlet összefüggést teremt p_1 és u_0 között.

A Bernoulli-egyenletből (3.45) is levezethető. Itt azt használjuk ki, hogy a csőbe áramló térfogatáram egyenlő a cső térfogatának és keresztmetszetének szorzatával, illetve hogy az S_2 felületet egyik oldalról p_1 , másik oldalról p_2 nyomja. c_0 a hangsebesség.

A nyelv mozgása csillapított tömeg-rugó rendszerrel modellezhető, a csillapított tömeg-rugó rendszer mozgásegyenletéből pedig levezethető a (3.46) egyenlet. $\xi(t)$ a modális koordináta, Q a jósági tényező, ω_0 a sajátfrekvencia, μ pedig a modális felület.

Az egyenletrendszer öt egyenletből áll, az ismeretlen változók száma ezzel megegyezik: p_1, p_2, ξ, u , és v_{jet} , tehát az egyenletrendszer megoldható. Az ebben a fejezetben bemutatott paraméterek a Millot-Baumann tanulmányban felhasznált paraméterek, melyek a 2. táblázat vannak feltüntetve.

2. táblázat: Minimális modellben felvett változók paraméterei [5]

leírás	jelölés	érték
bevezető cső keresztmetszete	S_0	$30mm^2$
V_1 térfogat keresztmetszete	S_1	$800mm^2$
cső keresztmetszete	S_2	$25mm^2$
cső hossza	L_2	$20mm$
jósági tényező	Q	95

3.4 Egyenletrendszer megoldása

Az egyenletrendszer megoldásához valamilyen időlépéses módszerre van szükség. Erre alkalmas a Matlab program beépített differenciális egyenletrendszer megoldó függvénye, az ODE45. Ez a függvény magának állítja be az időlépést; gyors változás esetén képes finomítani azt, ezért a kapott eredmény megbízható, azonban a kiértékelés lassú.

Ehelyett alkalmazható fokozatos közelítő módszer, másnéven fixpont-iteráció. Ezt a megoldási módot validáltam a Matlab program beépített ODE45 függvényét tekintve referenciamegoldásnak. A két módszer azonos eredményt adott, tehát az itt bemutatott fixpont-iteráció megbízható.

Feltételezzünk valamiféle sorrendiséget az egyenletrendszer egyenletei között. Egy változóról feltesszük, hogy ismert, ezáltal fejezzük ki a többi paramétert és számítjuk újra az „ismert” változót. Meghatározunk egy hibaértéket, aminél nem lehet több a változó „ismert” és újraszámolt értékének különbsége.

Tegyük fel hogy $p_2^{(n)} = p_2^{(n-1)}$. Ezt követően a (3.46)-os egyenletet megfeleltetjük a tömeg-rugó rendszer mozgásegyenletének:

$$m \cdot \ddot{u} + r \cdot \dot{u} + k \cdot u = f \quad (3.47)$$

ahol

$$m = 1 \quad (3.48)$$

$$r = \frac{\omega_0}{Q} \quad (3.49)$$

$$k = \omega_0^2 \quad (3.50)$$

(3.47) egyenletet felírva n . időlépésben:

$$m \cdot \ddot{u}^{(n)} + r \cdot \dot{u}^{(n)} + k \cdot u^{(n)} = f^{(n)} \quad (3.51)$$

A Newmark-séma [19] értelmében közelítő értékeket határozhatunk meg \dot{u} és u n . időbeli értékeikre:

$$\dot{u}^{(n)} \approx \dot{u}^{(n-1)} + \Delta t \cdot [\gamma \cdot \ddot{u}^{(n)} + (1 - \gamma) \cdot \ddot{u}^{(n-1)}] \quad (3.52)$$

$$u^{(n)} \approx u^{(n-1)} + \Delta t \cdot \dot{u}^{(n-1)} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot [2 \cdot \beta \cdot \ddot{u}^{(n)} + (1 - 2 \cdot \beta) \cdot \ddot{u}^{(n-1)}] \quad (3.53)$$

ahol γ és β azt adja meg, hogy becslésnél milyen mértékben hagyatkozunk explicit, illetve implicit becslésre. Itt az ideális beállítás:

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad (3.54)$$

$$\beta = \frac{1}{4} \quad (3.55)$$

(3.52) és (3.53) egyenleteket behelyettesítjük (3.51)-be:

$$\ddot{u}^{(n)} = \frac{f^{n-k} \cdot \tilde{u} - r \cdot \tilde{\ddot{u}}}{m+r \cdot \Delta t \cdot \gamma + k \cdot \Delta t^2 \cdot \beta} \quad (3.56)$$

ahol

$$\tilde{u} = u^{(n-1)} + \Delta t \cdot \dot{u}^{(n-1)} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot (1 - 2 \cdot \beta) \cdot \ddot{u}^{(n-1)} \quad (3.57)$$

$$\tilde{\ddot{u}} = \dot{u}^{(n-1)} + \Delta t \cdot (1 - \gamma) \cdot \ddot{u}^{(n-1)} \quad (3.58)$$

Ezáltal $u^{(n)}$, $\dot{u}^{(n)}$ és $\ddot{u}^{(n)}$ tagokat kifejeztük $u^{(n-1)}$, $\dot{u}^{(n-1)}$ és $\ddot{u}^{(n-1)}$ tagok segítségével.

A (3.42) egyenletből kifejezhető v_{jet} az n . időlépésben:

$$v_{jet}^{(n)} = \sqrt{\frac{2 \cdot |p_2^{(n-1)}|}{\rho_0}} \quad (3.59)$$

(3.43) alapján $U^{(n)}$ is kifejezhető:

$$U^{(n)} = S_r \cdot \dot{u}^{(n)} + \alpha \cdot S_u^{(n)} \cdot v_{jet}^{(n)} \quad (3.60)$$

ahol a useful section n . értékeit előre meghatározzuk a nyelv adott pozícióihoz.

A kapcsolat v_0 gerjesztés és u_0 térfogatáram között:

$$u_0 = S_0 \cdot v_0 \quad (3.61)$$

(3.44) és (3.61) alapján kifejezhető $dp_1^{(n)}$, majd $p_1^{(n)}$:

$$dp_1^{(n)} = \rho_0 \cdot [S_0 \cdot v_0^{(n)} - U^{(n)}] \cdot \frac{c_0}{V_1} \quad (3.62)$$

$$p_1^{(n)} = p_1^{(n-1)} + dt \cdot dp_1^{(n)} \quad (3.63)$$

Ezt követően $dU^{(n)}$ meghatározható (3.45) alapján:

$$dU^{(n)} = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{S_2}{L_2} \cdot (p_1^{(n)} - p_2^{(n)}) \quad (3.64)$$

A már meghatározott változók segítségével kifejezhető $dv_{jet}^{(n)}$, majd pedig (3.63)-hoz hasonlóan $v_{jet}^{(n)}$. Erre azért van szükség, hogy $p_2^{(n)}$ új értékét meghatározhassuk a (3.42) egyenlet alapján. $p_2^{(n)}$ új értékét jelölje $p_{2,new}^{(n)}$.

$$dv_{jet}^{(n)} = \frac{1}{\alpha \cdot S_u} \cdot \left[dU^{(n)} - S_r \cdot \ddot{u}^{(n)} - \alpha \cdot S_u \cdot \dot{u}^{(n)} \cdot v_{jet}^{(n)} \right] \quad (3.65)$$

$$v_{jet}^{(n)} = v_{jet}^{(n-1)} + dt \cdot dv_{jet}^{(n)} \quad (3.66)$$

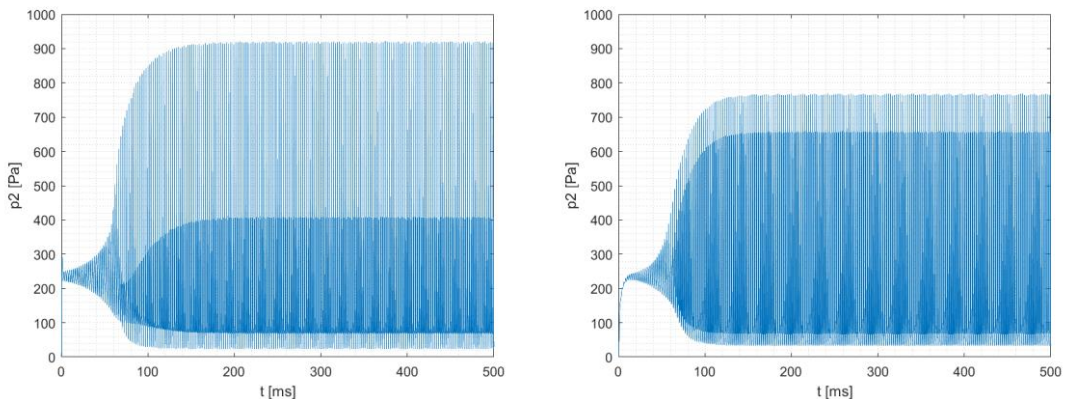
$$p_{2,new}^{(n)} = \frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot v_{jet}^{(n)2} \quad (3.67)$$

Ha $p_{2,new}^{(n)}$ és $p_2^{(n)}$ különbsége nagyobb, mint a hibaérték (itt: $10^{-10} Pa$), akkor $p_{2,new}^{(n)}$ értékével újra kell végezni a számolást, amíg a hibaérték nem esik 10^{-10} alá. Amikor ez megtörténik, rögzíthető $p_2^{(n)}$ értéke, és számolható a következő iteráció.

3.5 Eredmények

A szimuláció által számolt időfüggvények közül p_2 nyomás áll a legközelebb a hangszerrel megszólaltatható hanghoz; a 3.11. ábrán a p_2 nyomás látható az idő függvényében, konstans gerjesztés esetén. A Millot-Baumann tanulmánynak megfelelően állítottam be a v_0 és L_1 értékeket blown open ($v_0 = 3 \frac{m}{s}$, $L_1 = 1,5 cm$) és blown closed ($v_0 = 2,5 \frac{m}{s}$, $L_1 = 8 cm$) típusú nyelv esetén.

A jel burkolója követi a konstans gerjesztés alakját. Blown open esetben a gerjesztés értéke nagyobb, mint blown closed esetben, ennek megfelelően az állandósult állapotban blown open típusú nyelv esetén az amplitudó nagyobb.

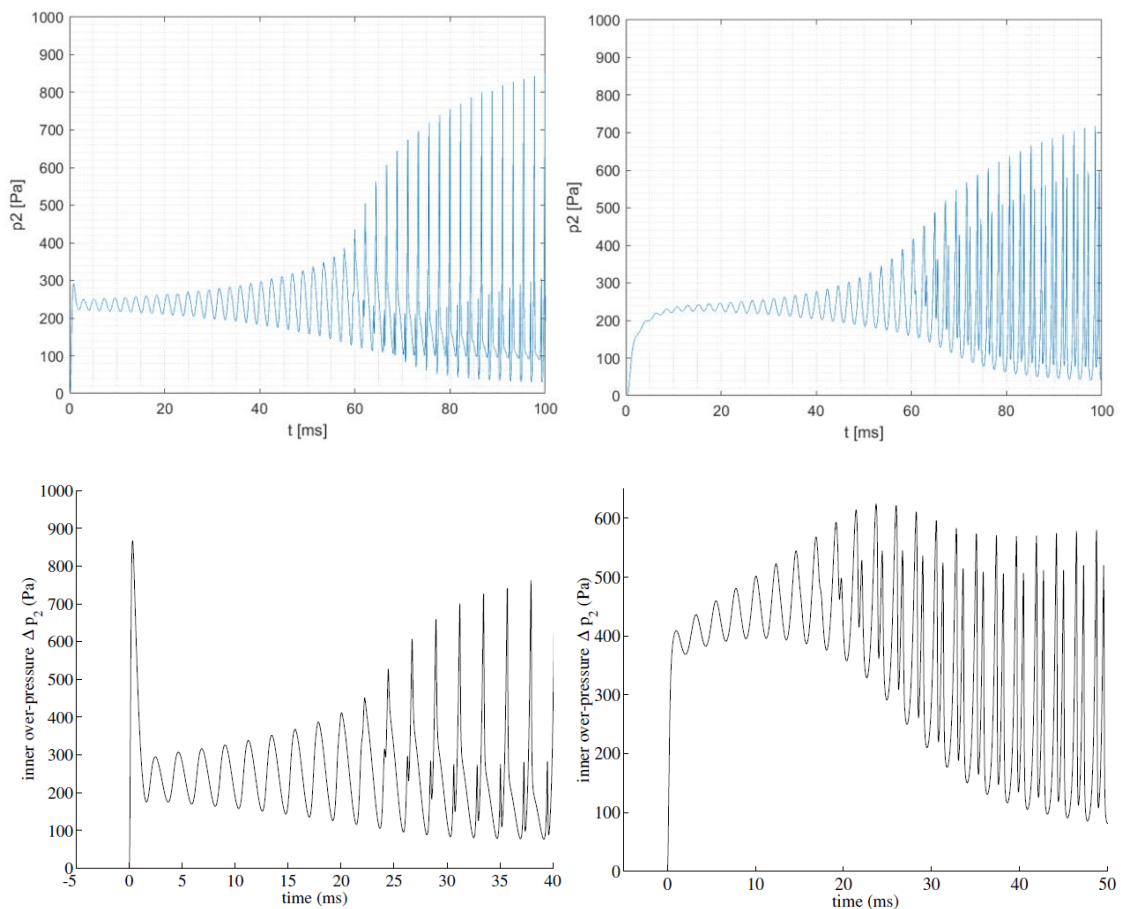


3.11. ábra: p_2 nyomás az idő függvényében, blown open (bal) illetve blown closed (jobb) típusú nyelv esetén.

Blown open esetben $v_0 = 3 \frac{m}{s}$, $L_1 = 1,5 cm$, blown closed esetben $v_0 = 2,5 \frac{m}{s}$, $L_1 = 8 cm$.

A 3.11. ábra elejére ráközelítve összehasonlítható az általam kapott és a tanulmányban bemutatott eredmény; ez látható a 3.12. ábrán. Megfigyelhető, hogy a Millot-Baumann eredmények esetén a válasz felfutása gyorsabb, ennek következtében a tranziens állapot kevesebb ideig áll fenn, illetve erősebb blown open és blown closed esetben is. A ráközelítés által megfigyelhető a folyamat, ahogy tranziens állapotban a lesugárzott hang először szinuszos; a nem szinuszos jelleg később, a tanulmány eredményein körülbelül 23 ms illetve 20 ms -nál, az én eredményeim körülbelül 60 ms -nál jelennek meg blown open, illetve blown closed esetben.

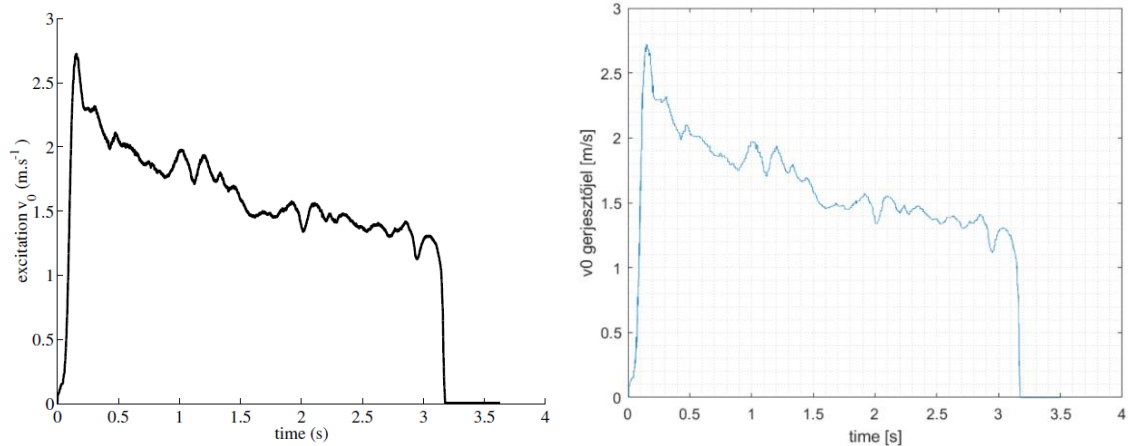
Az előállított hangot meghallgatva azt egy olyan hangként azonosítottam be, melyet egy szájharmonikától elvárnék. Blown open esetben a hangmagasság magasabbnak hangzik blown closed esethez képest; a nyelv lesugárzott frekvenciáját kiértékelve valóban blown open esetben értéke nagyobb ($451,76\text{ Hz}$), mint blown closed esetben ($444,76\text{ Hz}$). Az előállított hangok meghallgathatók a szakdolgozathoz csatolt elektronikus mellékletben (*1. Hangprodukció konstans gerjesztés esetén*).



3.12. ábra: p_2 nyomás az idő függvényében, a jel elejét felnagyítva, blown open (bal oldali ábrák) illetve blown closed (jobb oldali ábrák) típusú nyelv esetén. Az alsó ábrák a Millot-Baumann tanulmányban bemutatott eredmények.

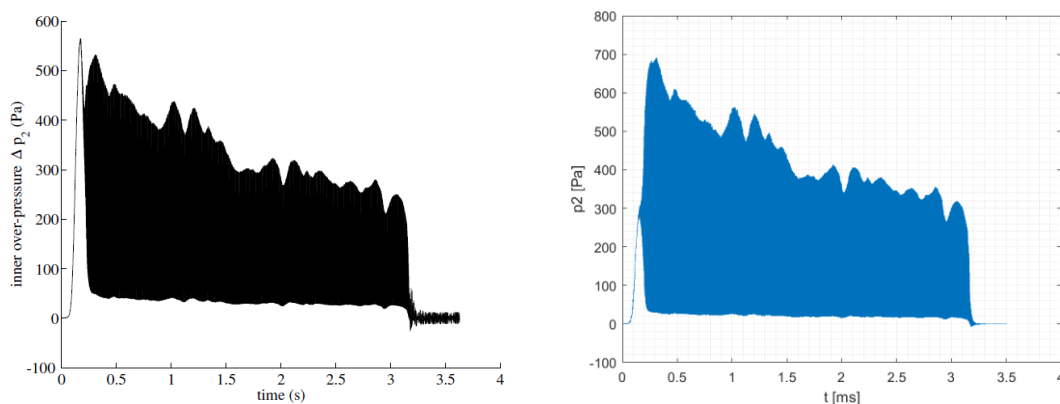
3.6 A gerjesztés modellezése

Konstans gerjesztés helyett valóságos gerjesztés esetére is végezhetők numerikus szimulációk; ehhez a Millot-Baumann tanulmányban bemutatott dinamikus gerjesztést használtam fel. A jelet digitalizáltam, majd pedig interpoláltam, hogy megfelelő számú adatponttal dolgozhassak. A 3.13. ábrán látható a két dinamikus gerjesztő jel.



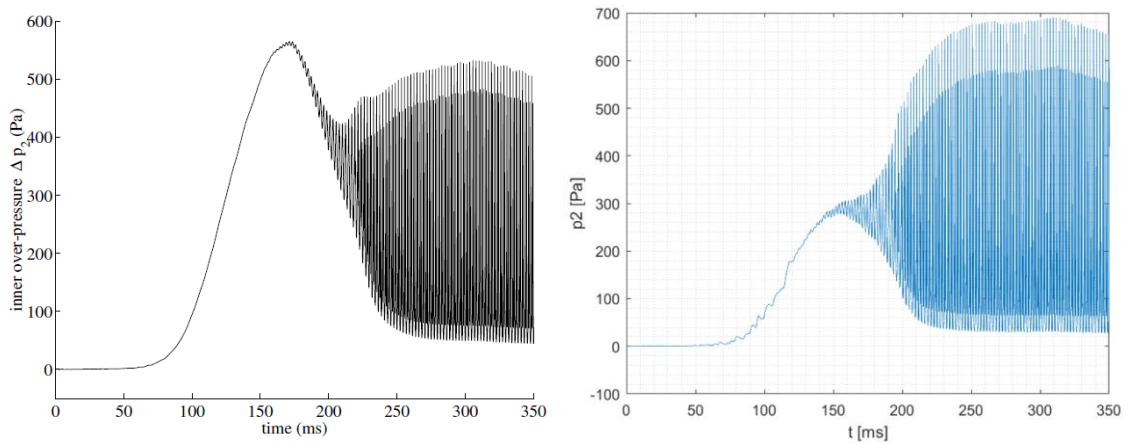
3.13. ábra: A Millot-Baumann tanulmányban használt gerjesztőjel (bal) és a digitalizált gerjesztés (jobb)

A dinamikus gerjesztésre adott válasz a 3.14. ábrán látható. A Millot-Baumann eredményekhez hasonlóan a válasz burkolója követni látszik a gerjesztés alakját, két jel jellegre megfelel egymásnak. Az eredmények elejére ránagyítva (3.15. ábra) azonban látható, hogy a transziens állapotok között eltérés van: körülbelül egyszerre reagál mindkét modell a gerjesztésre, azonban a Millot-Baumann modell reakciója erősebb, nagy túllövés figyelhető meg. A tanulmány eredménye a gerjesztés megszűnése után nem cseng le, valamilyen zaj jellegű maradékjel látható 3,5 másodperc környékén.



3.14. ábra: p_2 nyomás az idő függvényében, dinamikus gerjesztés esetén, mindkét esetben blown closed típusú nyelvvel. Bal oldalt látható a tanulmányban bemutatott eredmény, jobb oldalon a digitalizált gerjesztésre adott válasz.

A konstans gerjesztésű jelhez képest az előállított hang halkabb, a hangzása valóságosabb. Hasonlóan blown closed típusú nyelv esetén a hangmagasság mélyebb, mint blown open esetben. Az előállított hangok meghallgathatók a szakdolgozathoz csatolt elektronikus mellékletben (2. *Hangprodukciónál dinamikus gerjesztés esetén*).



3.15. ábra: p_2 nyomás az idő függvényében, dinamikus gerjesztés esetén, a jel elejét felnagyítva, mindkét esetben blown closed típusú nyelvvel. Bal oldalt látható a tanulmányban bemutatott eredmény, jobb oldalon a digitalizált gerjesztésre adott válasz.

4 Szimulációk

Az elkészített modell validálása érdekében a rendszer bizonyos paramétereit változtatva megvizsgálom, hogy azok milyen hatással vannak a rendszer válaszára, a kapott eredményeket pedig összehasonlítom a Millot-Baumann tanulmány eredményeivel. A vizsgált paraméterek h_{reed} , a nyelv vastagsága, a szájüregmodell L_1 paramétere (3.10. ábra), illetve h_{min} , a hézagrés (3.6. ábra).

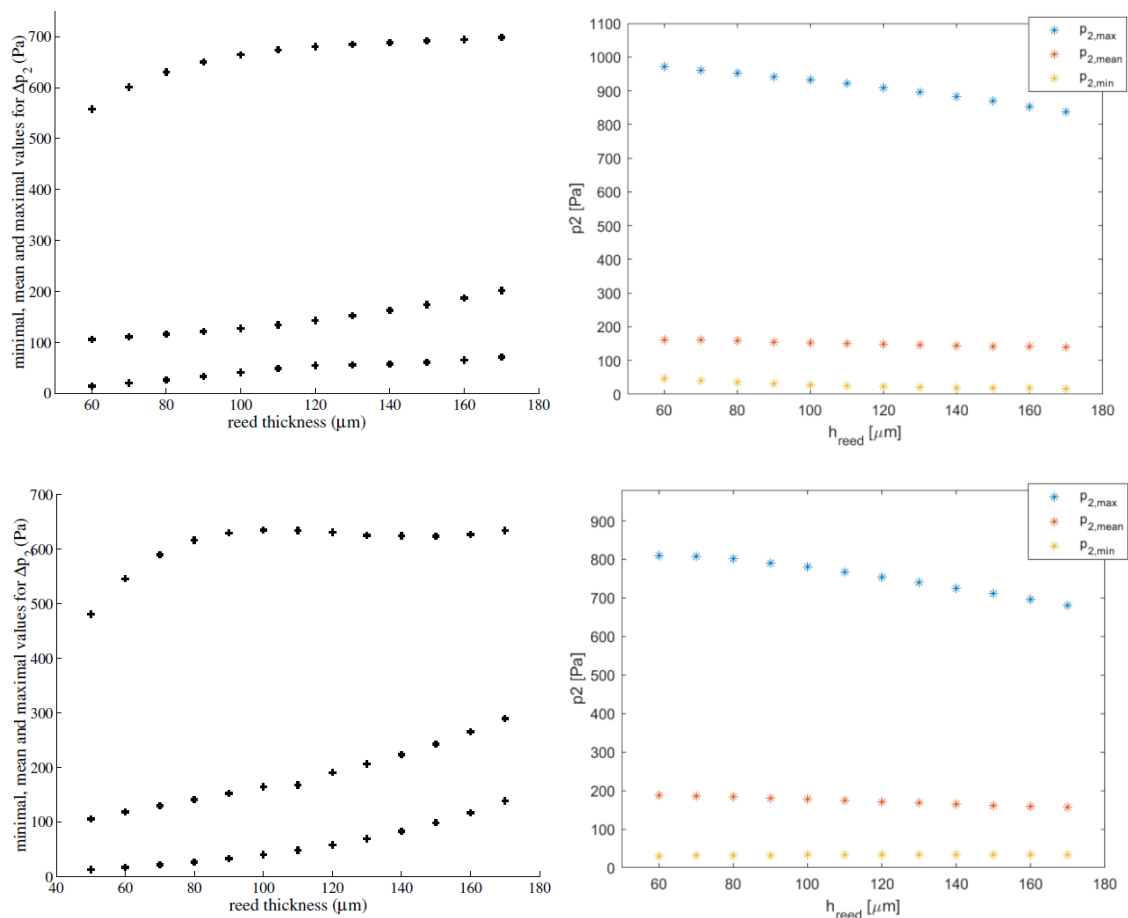
Először a nyelv vastagságának hatását vizsgálom a p_2 hangnyomásra, illetve a lesugárzott frekvenciára (playing frequency). A szimulációk során a tanulmánynak megfelelően a nyelv sajátfrekvenciáját konstans értéken tartom (449,11 Hz a nyelv sajátfrekvenciája az alapértelmezett paraméterekkel), továbbá a vastagság változtatásával párhuzamosan változtatom a nyelv hosszát illetve szélességét is, hogy a tömeg szintén konstans maradjon. A nyelv vastagsága a useful section számítását is befolyásolja, aminek pedig a hangszínre lesz hatása.

A szájüregmodell L_1 paraméter vizsgálatakor más változó értékét nem változtatom. h_{min} paraméter esetén azt vizsgálom, hogy különböző hézagrés méretek mellett milyen tartományban kell legyen a gerjesztés értéke, hogy a modell képes legyen hangprodukcióra. A nyelv vastagságához hasonlóan h_{min} is befolyásolja a useful section számítását, így azt várom, hogy lesz a hangszínre hatása. A Millot-Baumann tanulmányban ez a paraméter nem lett megvizsgálva.

4.1 A nyelv vastagságának vizsgálata

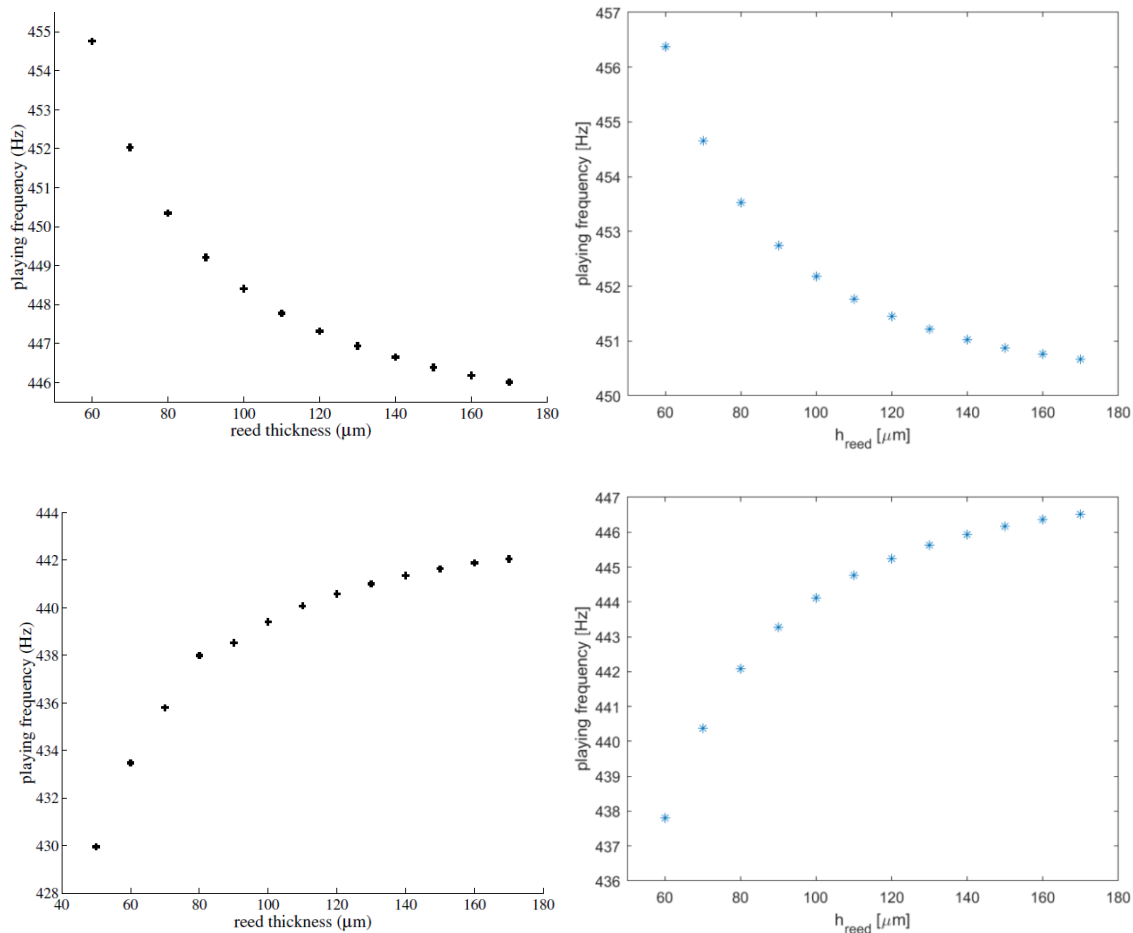
A Millot-Baumann tanulmány mintájára h_{reed} értéktartománya 60-170 μm , 12 adatponttal. A 4.1. ábrán látható a nyelv vastagságának befolyása p_2 hangnyomás nagyságára. A tanulmány eredményei alapján a nyelv vastagságának növelésével a p_2 hangnyomás maximuma növekedést mutat blown open és blown closed esetben egyaránt, szimulációim során azonban a hangnyomás maximuma csökken. Az eltérés oka a nyelv sajátfrekvenciájának meghatározásában lehet: számításaim során a nyelv anyagáról feltételeztem, hogy réz (ennek megfelelően a réz Young-modulusával és sűrűségével számoltam), a tanulmányban azonban nem világos a vizsgált nyelv anyaga, illetve pontosan milyen számítások vezettek a nyelv sajátfrekvenciájának meghatározásához.

A produkált hang blown closed esetben a nyelv vastagságának csökkenésével mélyebbnek, a vastagság növekedésével magasabbnak hangzik. Blown open esetben ezzel ellentétben, a nyelv vastagságának növelésével mélyebbnek, a vastagság csökkenésével pedig magasabbnak hangzik a megszólaltatott hang. A hangszín szubjektív értékelésem alapján érdemben nem változik. Az elektronikus mellékletben meghallgathatók a nyelv vastagságának minimális illetve maximális értékéhez tartozó hangprodukciók, blown open és blown closed esetben egyaránt (3. A nyelv vastagságának (h_{reed}) vizsgálata).



4.1. ábra: p_2 hangnyomás maximuma a nyelv vastagságának függvényében, blown open (fent) és blown closed (lent) típusú nyelv esetén. Bal oldalt láthatók a tanulmányban bemutatott eredmények.

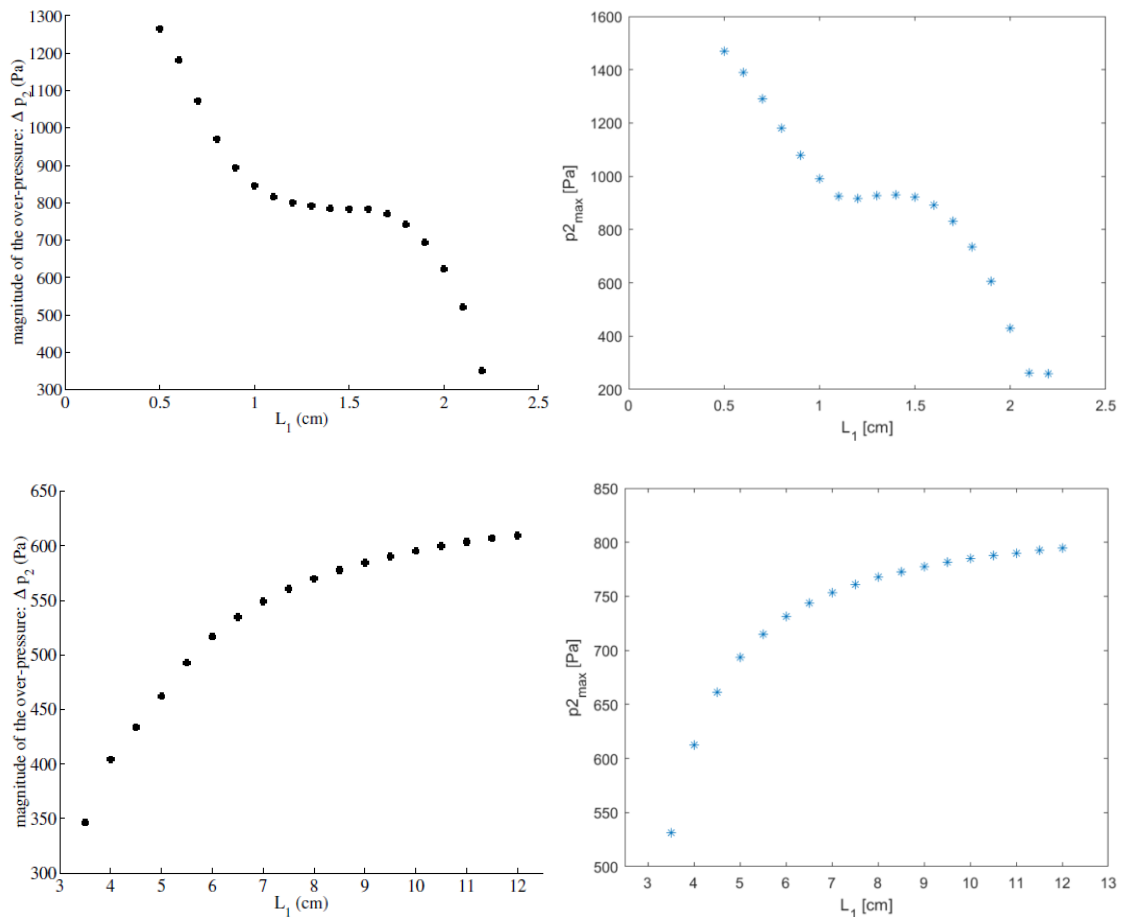
A 4.2. ábrán látható a nyelv vastagságának befolyása a lesugárzott frekvenciára. A tanulmány eredményei alapján a lesugárzott frekvencia csökken a nyelv vastagságának növelésével blown open típusú nyelv esetén, és növekedést mutat blown closed esetben. A szimulációk eredménye ezzel megegyezik; a nyelv vastagságának csökkenésével a lesugárzott frekvencia egyre jobban eltér a nyelv sajátfrekvenciájától (449,11 Hz).



4.2. ábra: A lesugárzott frekvencia (playing frequency) a nyelv vastagságának függvényében, blown open (fent) és blown closed (lent) típusú nyelv esetén. Bal oldalt láthatóak a tanulmányban bemutatott eredmények.

4.2 A szájüregmodell L_1 paraméterének vizsgálata

A tanulmánynak megfelelően L_1 értéktartománya 3,5-12 *cm* blown closed típusú nyelvnél, 0,5-2,2 *cm* blown open típusú nyelvnél, mindkét esetben 18 adatponttal. A 4.3. ábrán látható L_1 befolyása p_2 hangnyomás nagyságára. A tanulmány eredményein megfigyelhető, hogy blown open típusú nyelv esetén L_1 növekedésével p_2 hangnyomás maximuma csökken, ezzel ellentétben blown closed esetben p_2 hangnyomás maximuma nő. A szimulációk eredménye ezzel megegyezik, az adatpontokra illeszthető burkoló hasonló alakot mutat.



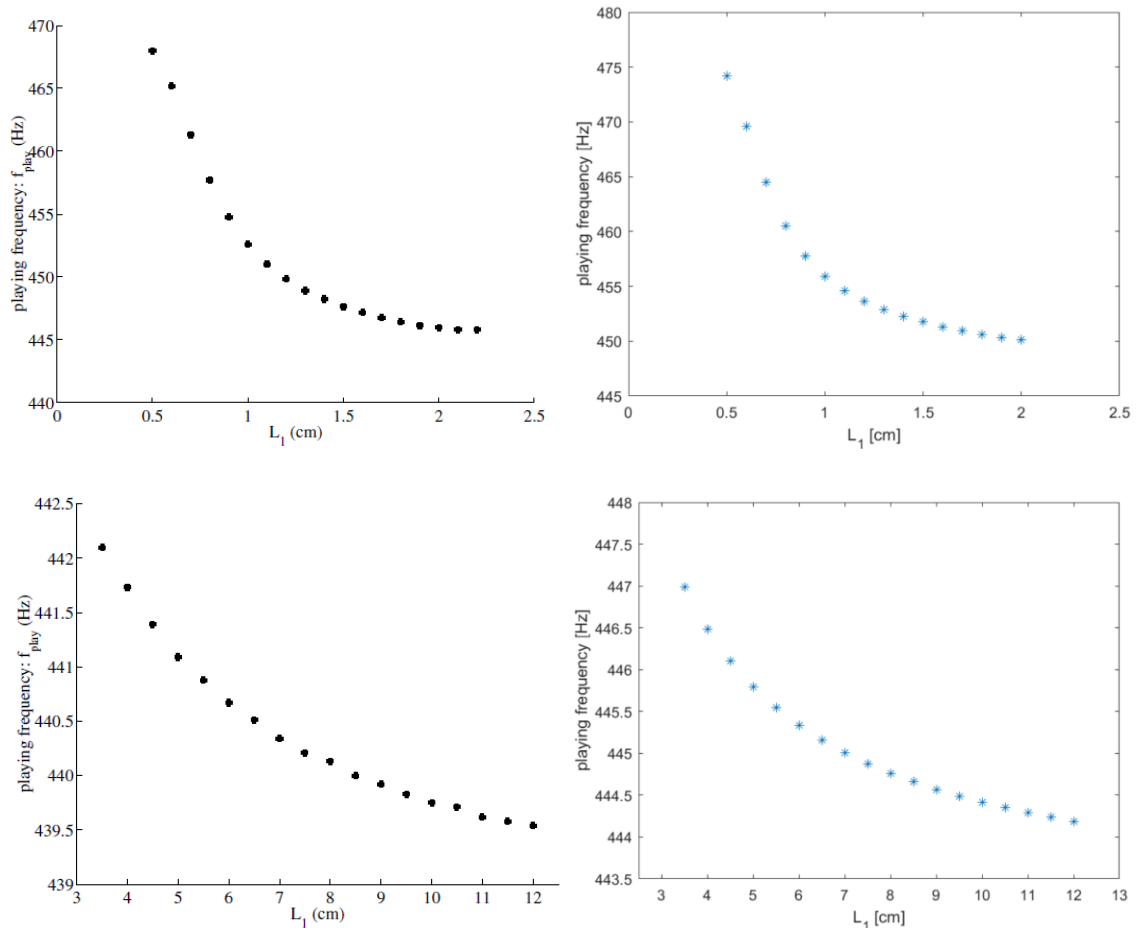
4.3. ábra: p_2 hangnyomás maximuma L_1 függvényében, blown open (fent) és blown closed (lent) típusú nyelv esetén. Bal oldalt láthatók a tanulmányban bemutatott eredmények.

A 4.4. ábrán látható a nyelv vastagságának befolyása a lesugárzott frekvenciára. A Millot-Baumann tanulmányban bemutatott eredmények alapján L_1 növekedésével a lesugárzott frekvencia csökken blown open és blown closed típusú nyelv esetén egyaránt; mindkét esetben az L_1 hossz növelésével lesugárzott frekvencia egyre jobban eltér a nyelv sajátfrekvenciájától (449,11 Hz). A szimulációk eredményei a tanulmány eredményeivel megfeleltethetők.

A produkált hang a 4.4. ábra alapján elvártakaknak megfelelően viselkedik: blown closed és blown open típusú nyelv esetén is L_1 hosszának csökkenésével magasabbnak, a hossz növekedésével mélyebbnek hangzik. Az elektronikus mellékletben meghallgathatók L_1 paraméter minimális illetve maximális értékéhez tartozó hangprodukciók, blown open és blown closed esetben egyaránt (4. A szájüregmodell L_1 paraméterének vizsgálata).

Megfigyelhető, hogy blown open típusú nyelv esetén 2 cm hosszt túllépve hirtelen csökken p_2 hangnyomás, illetve a lejátszási frekvencia nagysága (4.4. ábrán jóval a

tengelyhatárokon kívül esik 2,1 cm illetve 2,2 cm-hez tartozó 13,53 Hz és $2,36 \cdot 10^{-6}$ Hz). Blown open esetben a $v_0 = 3 \frac{m}{s}$ gerjesztés ezeknél a hosszértékeknél már nem elég, hogy periodikus rezgés kialakuljon.



4.4. ábra: A lesugárzott frekvencia (playing frequency) L_1 függvényében, blown open (fent) és blown closed (lent) típusú nyelv esetén. Bal oldalt láthatóak a tanulmányban bemutatott eredmények.

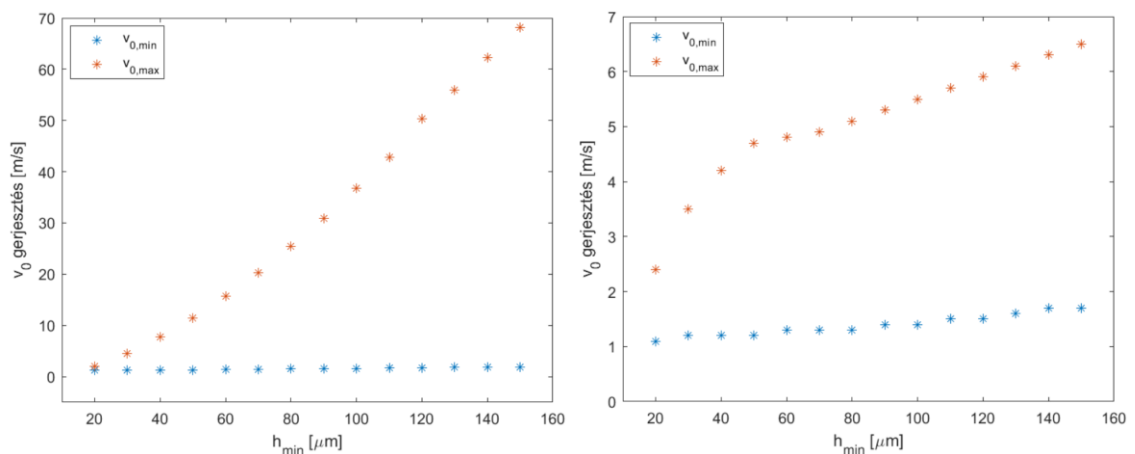
4.3 A hézagrés vizsgálata

A h_{min} értéktartománya 10-150 μm , 15 adatponttal. A 4.5. ábrán látható a különböző hézagrés méretekhez tartozó maximális és minimális gerjesztés értéke, blown open és blown closed esetben.

Mindkét esetben a hézagrés méretének növelésével a megszólaltatáshoz szükséges gerjesztés alsó és felső határa feljebb tolódik. Blown open esetben a minimális gerjesztés, ami szükséges a hangprodukcióhoz $1,2 - 1,9 \frac{m}{s}$ tartományban van; a maximális gerjesztés a $2,0 - 68,1 \frac{m}{s}$ tartományban. Ebben az esetben a gerjesztés felső határát a szimuláció korlátai szabják meg: a nyelv kitérése nagyon nagy lesz és ezért kilóg

a számításokhoz felvett tartományból. A hangprodukcióhoz szükséges minimum gerjesztésekhez tartozó hangmintákat meghallgatva a hézagrés méretének növelésével a hangszínt jelentősen változónak véltem: egyre kevésbé hasonlított szájharmonika által kiadott hangra. A maximális gerjesztésekhez tartozó összes hangminta zajos volt, a hangszín változását nem tudtam megállapítani. A hangmagasság azonos volt mindkét esetben.

Blown closed típusú nyelv esetén a megszólaltatáshoz szükséges minimális gerjesztés $1,1 - 1,7 \frac{m}{s}$ tartományban mozog; a maximális gerjesztés a $2,4 - 6,5 \frac{m}{s}$ tartományban van. Ebben az esetben a vártaknak megfelelő, hogy a gerjesztésnek van minimális és maximális korlátja, mivel a nyelv „nyílt” állapotból „záródik”, tehát a gerjesztés nem lehet akármekkora. Blown closed esetben sokkal kisebb tartományban mozog a gerjesztés értéke a blown open esethez képest. Blown open esethez hasonlóan, a hangprodukcióhoz szükséges minimum gerjesztésekhez tartozó hangminták hangszíne jelentősen változik a hézagrés méretének növelésével, illetve a maximális gerjesztésekhez tartozó összes hangminta zajos volt. A hangszín változását ebben az esetben sem tudtam megállapítani. A hangmagasság blown open esethez képest alacsonyabb volt, a minimum és maximum gerjesztés értékekhez azonban ugyanaz a hangmagasság tartozik.



4.5. ábra: Minimális és maximális gerjesztés értékek a hézagrés függvényében, blown open (bal) és blown closed (jobb) típusú nyelv esetén.

A 4.5. ábrán megfigyelhető, hogy $h_{min} = 10 \mu m$ hézagrés esetén nem volt olyan gerjesztés érték, amely hatására harmonikus nyelvrezgéstalakult volna ki a szimulációk során, se blown open, se blown closed esetben. A gerjesztés mellett a lesugárzott frekvenciát is vizsgáltam adott hézagrés méretekhez, a gerjesztés két végértékénél, amikor hangprodukció lehetséges volt; a lesugárzott frekvencia nem változott releváns

mértékben (blown open esetben 452 Hz, blown closed esetben 444 Hz). Az elektronikus mellékletben meghallgathatóak az adott hézagrés mérethez tartozó minimális és maximális gerjesztés értékek esetén megszólaltatott hangok, blown open és blown closed esetben egyaránt (5. A hézagrés (h_{min}) vizsgálata).

4.4 Elektronikus melléklet

A szakdolgozat részét képezi egy melléklet, mely tartalmazza a különböző szimulációk során generált hangfájlokat. Az egyes hangprodukciók hangszínének értékelése során szubjektív véleményemre hagyatkoztam, ezért hasznosnak tartom mellékelni őket.

A mellékletben öt mappa található. Az első a 1. *Hangprodukció konstans gerjesztés esetén*, melyben két hangfájl van: hangprodukció a paraméterek alapértékeivel, konstans gerjesztés esetén, blown open és blown closed típusú nyelvre. Hasonlóan, a második mappa, 2. *Hangprodukció dinamikus gerjesztés esetén*, ugyancsak két hangfájlt tartalmaz paraméterek alapértékeivel beállított szimulációkra, dinamikus gerjesztés esetén, blown open és blown closed típusú nyelvre.

A maradék mappákban a 4. fejezetben végzett szimulációk során készített hangfájlok találhatóak. A 3. *A nyelv vastagságának (h_{reed}) vizsgálata* mappában négy fájl van: a felvett nyelvvastagság tartományban a minimális és maximális értékekhez tartozó hangprodukciók, blown open és blown closed típusú nyelvre. A hangfájlok elnevezése megadja, hogy milyen nyelv vastagsághoz tartoznak.

Hasonlóan, a 4. *A szájüregmodell L_1 paraméterének vizsgálata* mappában négy fájl található: az L_1 értéktartomány minimális és maximális értékekhez tartozó hangprodukciók, blown open és blown closed típusú nyelvre. A hangfájlok elnevezése szintén utal az adott L_1 értékre, illetve hogy milyen típusú a nyelv.

Az utolsó mappa, 5. *A hézagrés (h_{min}) vizsgálata*, két almappát tartalmaz, melyek a hangmintákat blown open és blown closed nyelvtípus szerint szétválasztja. Az egyes almappákon belül a minimális és maximális gerjesztés alapján vannak rendszerezve a fájlok. A fájlnev tartalmazza a hézagrés méretét és a gerjesztés értékét.

5 Összefoglalás

Szakedolgozatomban a szájharmonika hangszer hangkeltését modelleztem a Millot-Baumann tanulmány alapján. Először ismertettem a hangszer történetét, majd működésének alapjait. Meghatároztam, milyen alakokat vesz fel a szájharmonika egy nyelve rezgés közben, mint egydimenziós rúd és mint kiterjedt test. Ezt követően meghatároztam a felületet, melyen a levegő átáramlik a nyelv és az őt tartó lap között, illetve amely a hangkeltésben kulcsfontosságú nemlineáris összefüggés.

A Millot-Baumann tanulmány egyszerűsített rendszere alapján felvettem a hangszer minimális modelljét és a változókat, melyek segítségével leírható a szájharmonika működése. A felírt egyenletrendszert időlépéses módszerrel, fixpont-iterációval oldottam meg. Ezt a megoldási módszert validáltam a Matlab beépített ODE45 függvényét tekintve referenciamegoldásnak.

A modell validálása érdekében szimulációkat végeztem, melyek eredményeit összehasonlítottam a tanulmányban bemutatott eredményekkel. A nyelvvastagság vizsgálatakor volt eltérés a lesugárzott hang maximum, minimum és középértékeiben a tanulmány eredményeihez képest, azonban ezt nem vélem számottevőnek. A lesugárzott frekvencia a nyelv vastagság függvényében jellegre megegyezett a tanulmányban bemutatottal.

A szájüregmodell L_1 paraméterének vizsgálatakor a kapott eredmények jellegre megfeleltethetőek voltak a Millot-Baumann tanulmányban bemutatott diagramokkal. A hézagrés változó vizsgálata nem része a tanulmánynak, ezért eredményeim elemzésekor ebből nem tudtam kiindulni, azonban a modell a hézagrés méret változtatásával a vártaknak megfelelően viselkedett.

Összefoglalva, a szimulációk eredménye konzisztens a Millot-Baumann tanulmány eredményeivel. A rendszer p_2 válasza jellegre megegyezett a tanulmány eredményeivel, a vizsgált paraméterek viselkedése is megfeleltethető volt. A kisebb eltérések oka, hogy a tanulmány adott számítási módszerei nem ismertek, így azokban lehet eltérés.

A modell továbbfejlesztéséhez érdemes megvizsgálni, hogy játék közben a hangszer egy légkamráján belül hogyan szól a „passzív” nyelv az „aktív” nyelvvel együtt. Továbbá, a felvett modellben bizonyos jelenségeket elhanyagoltam, melyek figyelembevételével bővíthető a modell.

Irodalomjegyzék

- [1] Wikipedia: *Fúvós hangszerek*, https://hu.wikipedia.org/wiki/F%C3%BAv%C3%B3s_hangszerek (utoljára megtekintve: 2021. november)
- [2] Wikipedia: *Aerofon hangszerek*, https://hu.wikipedia.org/wiki/Aerofon_hangszerek (utoljára megtekintve: 2021. november)
- [3] Wikipedia: *Physical modelling synthesis*, https://en.wikipedia.org/wiki/Physical_modelling_synthesis (utoljára megtekintve: 2021. november)
- [4] Douglas H. Keefe: *Physical Modeling of Wind Instruments*, In: *Computer Music Journal* Vol. 16, No. 4 (Winter, 1992), pp. 57-73
- [5] Laurent Millot, Clément Baumann: *A Proposal for a Minimal Model of Free Reeds* article in *Acta Acustica united with Acustica* 93(1):122-144, January 2007
- [6] Hartmut Berghoff: *Marketing Diversity: The Making of a Global Consumer Product - Hohner's Harmonicas, 1857-1930* in *Enterprise & Society* Vol. 2, No. 2 (June 2001), pp. 338-372
- [7] Wikipedia: *Harmonica*, <https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonica> (utoljára megtekintve: 2021. november)
- [8] Wikipedia: *A szájharmonika*, <https://hu.wikipedia.org/wiki/Sz%C3%A1jharmonika> (utoljára megtekintve: 2021. november)
- [9] L. Millot, Ch. Cuesta, C. Valette: *Experimental Results when Playing Chromatically on a Diatonic Harmonica* article in *Acta Acustica united with Acustica* 87(2):262-270, March 2001
- [10] William Melton, Randy Weinstein: *The complete idiot's guide to playing the harmonica*, 1st edition, ISBN: 0-02-864241-4, Alpha, 2001
- [11] Henry T. Bahnson, James F. Antaki and Quinter C. Beery: *Acoustical and physical dynamics of the diatonic harmonica* in *Acoustical Society of America*, January 1998
- [12] Neville H. Fletcher Thomas D. Rossing: *The Physics of Musical Instruments*, 2nd edition, ISBN: 978-1-4419-3120-7, Springer, 2010
- [13] Nagy Nóra: *Modeling the sound production of a novel organ pipe construction with free reed* TDK, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki kar, 2016

- [14] Vincent Debut, Laurent Millot: *Time domain simulation of the diatonic harmonica*, In Workshop on current research direction in computer music: mosart european program, Barcelona, 143–146, 2001
- [15] Fiala Péter: *A hangszerek fizikája (egyetemi jegyzet)*, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Villamosmérnöki és Informatikai kar, 2015, <https://last.hit.bme.hu/sites/default/files/documents/hangfiz.pdf> (utoljára megtekintve: 2021. november)
- [16] Winslow Yerxa: *Harmonica for dummies*, 1st edition, ISBN: 978-0-470-33729-5, For Dummies, 2008
- [17] P. Rucz, N.M. Nagy, J. Angster, F. Augusztinovicz, A. Miklós. *Time domain simulations of a novel lingual organ pipe construction* In: Journal of the Acoustical Society of America 140.4 (2016). Invited paper presented at the 5th joint meeting of the ASA and ASJ, Honolulu, Hawaii, 28 November–2 December 2016, p. 3036. DOI : 10.1121/1.4969425.
- [18] MATLAB, 9.10.0.1739362 (R2021a) Update 5, Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc.
- [19] N. M. Newmark. *A method of computation for structural dynamics* In: ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division 85 (1959), pp. 67–94.