



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
VILLAMOSMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR
HÁLÓZATI RENDSZEREK ÉS SZOLGÁLTATÁSOK TANSZÉK

A hangszerek fizikája

jegyzet

Fiala Péter

Utoljára módosítva:

2015. március 27.

Tartalomjegyzék

1. Egyszerű rezgő rendszerek	1
1.1. Bevezetés	1
1.2. A tömeg-rugó rendszer mozgásegyenlete	1
1.3. Sajátrezgések	1
1.3.1. A tömeg-rugó rendszer energiája	2
1.3.2. Dekád, oktáv, cent és decibel	3
1.4. Csillapított sajátrezgések	4
1.4.1. A csillapított rendszer mozgásegyenlete és megoldása	4
1.4.2. Csillapított rendszer energiája	6
1.5. Gerjesztett rezgések	6
2. Húrok rezgései	9
2.1. Bevezetés	9
2.2. Az ideális húr mozgásegyenlete	9
2.3. Rezgésterjedés a végtelen ideális húrbán	10
2.3.1. Haladó hullámok	10
2.3.2. Rezgés visszaverődése megfogott hűrvégződésről	11
2.3.3. Rezgés visszaverődése szabad hűrvégződésről	11
2.3.4. A félvégtelen húr bemenő impedanciája	12
2.4. A véges ideális húr rezgései	13
2.4.1. A véges hosszú húr sajátrezgései	13
2.4.2. A módusok energiája	16
2.4.3. Pengetett hűrok rezgései	16
2.4.4. Ütéssel gerjesztett hűrok rezgései	20
2.4.5. Kalapács-húr kölcsönhatásmodellek	22
2.4.6. A zongorahúr gerjesztésének modellezése	24
2.5. Csillapított rezgések hűrokban	25
2.5.1. A csillapítás forrásai	25
2.5.2. A csillapított húr mozgásegyenlete	25
2.5.3. Véges hosszú csillapított húr szabadrezgései	26
2.5.4. Pengetett csillapított húr	27
2.5.5. Ütéssel gerjesztett csillapított húr rezgései	28
2.6. Nemideális hűrlezárások	30
2.6.1. Lezárás koncentrált rugóval	30
2.6.2. Lezárás koncentrált tömeggel	31
3. Hangsorok és hangolás	33
3.1. A diatonikus hangsor	33
3.1.1. A diatonikus hangsor püthagoraszai hangolása	34

3.1.2. A diatonikus skála tiszta hangolása	34
3.2. Tizenkétfokú hangsorok	36
3.2.1. A tizenkétfokú skála püthagoraszi hangolása	36
3.2.2. A tizenkétfokú skála tiszta hangolása	36
3.3. A hangsorok kiegyenlítése	37
3.3.1. A negyedkommás középhangú temperálás	37
3.3.2. Jóltemperált skálák	38
3.3.3. Az egyenletesen temperált hangsor	39
4. Rudak rezgései	41
4.1. Bevezetés	41
4.2. Rudak longitudinális rezgései	41
4.2.1. A mozgásegyenlet levezetése	41
4.2.2. A longitudinális mozgásegyenlet megoldása	43
4.3. Rúd hajlító rezgése	44
4.3.1. A mozgásegyenlet levezetése	44
4.3.2. Néhány tipikus keresztmetszet másodrendű nyomatéka	46
4.3.3. A rúd hajlító szabadrezgései – diszperzió	47
4.3.4. Véges hosszú rúd hajlító módusai	47
4.3.5. Bütykös harangjáték	51
4.4. Rudak hangolása	52
4.4.1. A perturbációmódszer	53
4.4.2. Alkalmazás téglalap keresztmetszetű rúdra	53
4.4.3. Marimbarúd hangolása	55
4.5. Merev húrok inharmonicitása	55
4.5.1. Bevonatolt húrok	57
4.5.2. A Railsback-görbe	58
5. Membránok rezgései	61
5.1. Az ideális membrán egyenlete	61
5.2. A membránegyenlet megoldása	62
5.2.1. A téglalap alakú membrán módusai	62
5.2.2. Kör alakú membránok módusai	63
5.2.3. Megütött membránok szabadrezgései	65
5.3. Harmonikus membránok – a timpani	66
6. Lemezek rezgései	69
6.1. Homogén sík lemez rezgései	69
6.1.1. Lemezek diszperz viselkedése	69
6.1.2. Ortotróp falemezek	70
6.2. Merev membránok	70
7. Kísérleti móduselemzés	71
7.1. Az impulzusválasz mérése	71
7.1.1. H1- és H2-becslők	71
7.1.2. Az impulzusválasz mérése	72
7.2. Móduselemzés	73
7.2.1. A komplex pólusok meghatározása	73
7.2.2. A módusalakok meghatározása	74

8. A hangtér	75
8.1. Bevezetés	75
8.2. A hangtér alapegyenletei	75
8.2.1. Egydimenziós leírás	75
8.2.2. Háromdimenziós leírás	76
8.3. A hullámegyenlet egyszerű megoldásai	77
8.3.1. Síkhullámok	77
8.3.2. Megoldás gömbi koordináta-rendszerben	78
8.3.3. A lélegző gömb	78
8.3.4. Monopólus, forráserősség	79
8.3.5. Dipólus, dipól nyomaték	79
8.4. Összetett sugárzók hangtere	80
8.4.1. Véges vonalforrás tere	80
8.4.2. Hangsugárzás végtelen féltérbe – A Rayleigh-integrál	81
8.4.3. Hengeres dugattyú tere	82
8.4.4. Hangsugárzás rezgő lemeztől	84
8.4.5. Véges méretű lemeztől lesugárzott hangnyomás	84
8.4.6. Tetszőleges alakú sugárzó hangtere	85
9. Hangterjedés zárt hangszertestekben	89
9.1. Egyenes hengeres csövek	89
9.1.1. Hullámterjedés végtelen, merev falú csőben – haladó és evaneszcens hullámok	90
9.1.2. Véges hosszú, merev falú hengeres csövek módusai	91
9.1.3. Véges hosszú hengeres cső bemenő impedanciája	93
9.1.4. Oldalfuratok	95
9.2. Kürtök	97
9.2.1. A Webster-egyenlet	97
9.2.2. A kürtfüggvény	98
9.2.3. Salmon-kürtök	98
9.2.4. Salmon-kürtök módusai	99
9.2.5. Kompozit kürtök	101
9.2.6. Kürtök finomhangolása	103
9.2.7. Kürtök határfoka	103
9.3. Fúvós gerjesztés	104
9.3.1. Nádgerjesztés	104

1. fejezet

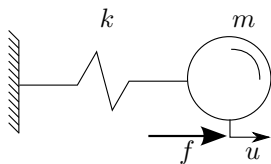
Egyszerű rezgő rendszerek

1.1. Bevezetés

Ez a fejezet a legegyszerűbb mechanikai rezgő rendszer, a tömeg-rugó rendszer segítségével vezeti be azokat a rezgéstani alapfoglamakat, melyek ismerete a továbbiakban, a hangszerelemek rezgéseinek tárgyalásához szükséges. Megismerkedünk a rendszer mozgásegyenletének felírási módjával, bevezetjük a saját-, szabad és gerjesztett rezgések fogalmát. Az egyszerű rendszer rezgéseinek vizsgálata során vezetjük be továbbá a zenei rezgésjelek jellemzésére használt mérnöki mértékegységeket.

1.2. A tömeg-rugó rendszer mozgásegyenlete

Tekintsük az 1.1. ábrán látható egyszerű mechanikai rendszert, ami egy koncentrált tömegből és egy ideális, merev falhoz kötött rugóból áll. A tömeg egyirányú (az ábrán vízszintes) mozgásra képes, elmozdulását u jelöli. A tömegre ható, szintén vízszintes irányú erőt f -fel jelöljük.



1.1. ábra. Tömeg-rugó rendszer

Newton II. törvénye szerint a tömegre ható erők eredője és a tömeg gyorsulása közti kapcsolat

$$\sum F = ma = m\ddot{u}, \quad (1.1)$$

ahol $\ddot{u}$ az elmozdulás idő szerinti második deriváltját jelöli. Jelen esetben a tömegre ható erők eredője két tagból állítható össze. Az egyik a külső f erő, a másik pedig a megnyújtott rugó által kifejtett $-ku$ erő:

$$f(t) - ku(t) = m\ddot{u}(t). \quad (1.2)$$

Ez a csillapítatlan tömeg-rugó rendszer mozgásegyenlete.

A rezgő rendszerek mozgásegyenlete rendszerint differenciálegyenlet. Jelen esetben másodrendű, lineáris differenciálegyenlettel van dolgunk. A másodrendű azt jelenti, hogy az $u(t)$ megoldásfüggvénynek legfeljebb második deriváltja szerepel az egyenletben. A linearitás arra utal, hogy a jobb oldal az $u(t)$ megoldásfüggvénynek és deriváltjainak lineáris függvénye.

1.3. Sajátrezgések

A rendszer sajátrezgései olyan rezgésalakok, melyek gerjesztés jelenléte nélkül is fennmaradhatnak a rendszerben. A sajátrezgések vizsgálata rezgő rendszerek esetében azért fontos, mert ha egy rendszert gerjesztünk, majd magára hagyjuk, a válasz mindig a sajátrezgések szuperpozíciójaként írható fel. Ez a jelenség hangszerek esetében kiemelt fontosságú, ugyanis a hangszeres játék sok esetben leírható úgy, hogy a hangszert gerjesztjük, majd magára hagyjuk – gondoljunk például egy megpendezett gitárhúrra vagy egy megütött dobmembránra.

A tömeg-rugó rendszer sajátrezgéseinek vizsgálatához tekintsük tehát a homogén mozgásegyenletet, amelyben az f gerjesztő erő zérus:

$$0 = ku(t) + m\ddot{u}(t). \quad (1.3)$$

átrendezve

$$\ddot{u}(t) = -\frac{k}{m}u(t) = -\omega_0^2 u(t), \quad (1.4)$$

ahol bevezettük az

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad (1.5)$$

s^{-1} dimenziójú mennyiséget.

Elemi differenciálszámítási ismeretek birtokában látható, hogy az (1.4) differenciálegyenlet megoldásai a $\sin \omega_0 t$ és $\cos \omega_0 t$ függvények, vagyis

$$\begin{aligned} u(t) &= A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \\ &= U \cos(\omega_0 t + \varphi), \end{aligned} \quad (1.6)$$

ahol A és B , illetve U és φ tetszőleges konstansok. Az U konstans a rezgés amplitúdóját adja meg, φ pedig a rezgés kezdőfázisát. Az (1.5)-ben bevezetett ω_0 mennyiség a rezgés körfrekvenciája, aminek mértékegysége rad/s . A rezgés körfrekvenciájából a frekvenciát az

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (1.7)$$

összefüggéssel származtatjuk, az f_0 frekvencia mértékegysége Hz . Az f_0 frekvencia reciproka a harmonikus rezgés T periódusideje, melynek mértékegysége s :

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (1.8)$$

Mivel az (1.6) megoldás sajátrezgés, az ω_0 körfrekveniciát sajátfrekvenciának hívjuk¹. Fontos, hogy a sajátfrekvencia és a sajátrezgés a rendszer tulajdonsága, kizárólag a rendszer anyagjellemzőitől és geometriai tulajdonságaitól függ, a gerjesztéstől független.

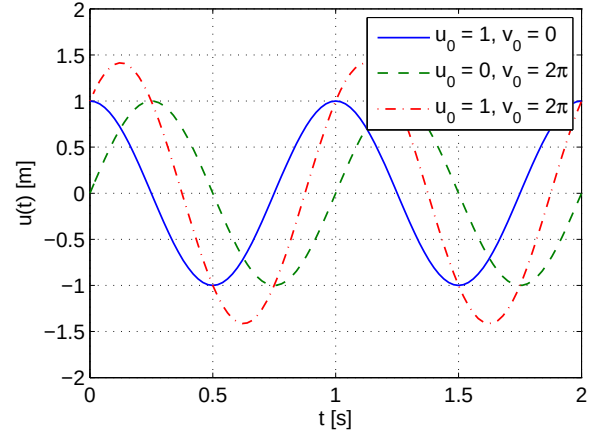
1.1. példa Harmonikus rezgés adott kezdeti elmozdulással és sebességgel

Adjuk meg az u_0 kezdeti elmozduláshoz és v_0 kezdősebességhez tartozó harmonikus szabadrezgés elmozdulásának időfüggését.

Az elmozdulásfüggvény $t = 0$ időpontban megegyezik a kezdeti u_0 elmozdulással:

$$u_0 = u(0) = A \cos(\omega_0 \cdot 0) + B \sin(\omega_0 \cdot 0) = A. \quad (1.9)$$

¹ általában nem jelöljük külön az ω_0 saját-körfrekvencia és f_0 sajátfrekvencia közti különbséget, mindkét fogalomra a sajátfrekvencia kifejezést használjuk.



1.2. ábra. Tömeg-rugó rendszer elmozdulása különböző kezdeti feltételek esetén

Az elmozdulásfüggvény idő szerinti deriváltja a $t = 0$ időpontban megegyezik a kezdeti sebességgel:

$$\begin{aligned} v_0 = \dot{u}(0) &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 \cdot 0) + B\omega_0 \cos(\omega_0 \cdot 0) \\ &= B\omega_0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

ahonnan az elmozdulásfüggvény

$$u(t) = u_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (1.11)$$

A kapott elmozdulásfüggvényt különböző u_0 kezdeti kitérés és v_0 kezdeti sebességértékekre az 1.2. ábra mutatja $\omega_0 = 2\pi \text{ rad/s}$ esetre.

1.3.1. A tömeg-rugó rendszer energiája

A rugó megfeszítéséhez munkabefektetés szükséges, ami a megfeszített rugóból visszanyerhető, vagyis a rugó energiát tárol. Az u kitérésre feszített rugóban tárolt potenciális energia kifejezhető

$$E_p = \frac{ku^2}{2} \quad (1.12)$$

alakban. Hasonló módon a v sebességgel mozgó tömeg kinetikus energiája

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad (1.13)$$

alakban írható fel. Az energia mértékegysége J .

Vizsgáljuk meg az U amplitúdóval rezgő, és φ kezdőfázissal indított tömeg-rugó rendszer energiáját. A kitérés és a sebesség időfüggése

$$u(t) = U \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (1.14)$$

$$v(t) = -\omega_0 U \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (1.15)$$

A potenciális energia kifejezése:

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} k u^2(t) = \frac{1}{2} k U^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} k U^2 \left[\frac{1 + \cos(2(\omega_0 t + \varphi))}{2} \right], \end{aligned} \quad (1.16)$$

a kinetikus energia kifejezése pedig

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m v^2(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 U^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} k U^2 \left[\frac{1 - \cos(2(\omega_0 t + \varphi))}{2} \right], \end{aligned} \quad (1.17)$$

ahol kihasználtuk az $m\omega_0^2 = k$ összefüggést.

Az eredmények szerint mind a potenciális, mind a kinetikus energia az $\frac{1}{4} k U^2$ érték körül harmonikusan ingadozik, az ω_0 körfrekvencia kétszeresével. A két energiátág összege minden időpillanatban

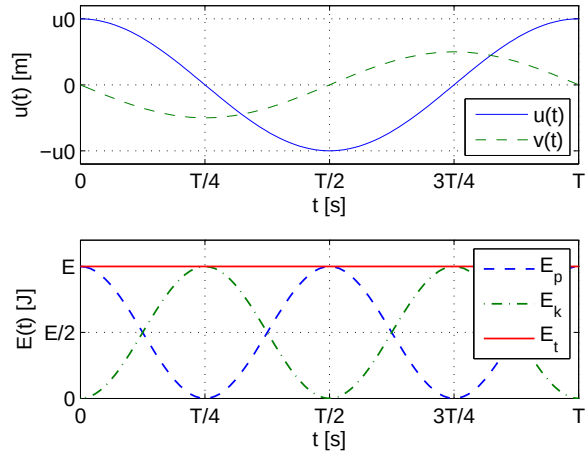
$$E_t = E_p + E_k = \frac{1}{2} k U^2, \quad (1.18)$$

vagyis a potenciális és kinetikus energiátágok folyamatosan, veszteségek nélkül alakulnak át egymásba, ahogy azt az 1.3. ábra is mutatja.

1.3.2. Dekád, oktáv, cent és decibel

A harmonikus rezgés f_0 frekvenciáját Hz-ben mérjük, ami a rezgés periódusidejének reciproka. Az emberi fül a különböző frekvenciájú rezgésekhez különböző hangmagasság-érzetet társít. A hallható frekvenciatartomány Hz-ben mérve három nagyságrendet ölel át, hozzávetőlegesen 20 Hz és 20 kHz közé esik.

Az emberi fül az öt érő rezgés (hang) frekvenciáját logaritmikusan érzékeli. Ez azt jelenti, hogy a 100 Hz-es és a 200 Hz-es rezgés közti hangmagasság-különbséget hozzávetőlegesen ugyanakkorának érezzük, mint az 1000 Hz-es és a 2000 Hz-es rezgések közötti hangmagasság-eltérést. Kézenfekvő tehát, ha két frekvencia közti hangmagasság-különbség jellemzésére olyan mértékegységet használunk, amely azt mutatja meg,



1.3. ábra. Csillapítatlan tömeg-rugó rendszer elmozdulása, sebessége és energiaviszonyai

hogy a két frekvencia Hz-ben kifejezett értéke között hány nagyságrend eltérés van.

Egy tízes nagyságrend-eltérést egy dekádnak nevezünk, vagyis a 300 Hz egy dekáddal nagyobb a 30 Hz-nél. Egy dekád hangmagasság-eltérés igen nagy különbség, a teljes hallható tartomány mindössze három dekádot ölel át, ezért ezt az egységet a hang- és rezgéstanban ritkán használjuk. Az oktav a kettes számrendszerbeli nagyságrendet jelöli, vagyis kétszeres frekvenciaszorozóhoz tartozik². Az f_1 és f_2 frekvenciák közti hangmagasság-különbség kifejezése oktávban a

$$\log_2 \frac{f_2}{f_1} \quad (1.19)$$

képlettel adható meg. Az oktáv még mindig nagyon nagy egység ahhoz, hogy az éppen megkülönböztethető hangmagasságú hangok közti különbséget oktavokban fejezzük ki. A zenei hangmagasság mérésére ezért a centet használjuk, ami az oktáv ezerkétszázad része³. Az f_1 és f_2 frekvenciák közti hangmagasság-eltérés centben kifejezve eszerint

$$1200 \log_2 \frac{f_2}{f_1} \quad (1.20)$$

² Az oktáv szó a nyolcas számból ered, mivel a hétfokú zenei skála nyolcadik hangja egy oktáv távolságra van az alaphangtól. A témát bővebben a ?? fejezetben tárgyaljuk.

³ Az ezerkétszázados osztó a tizenkétfokú zenei skálából származik

1.2. példa Oktáv

Hány oktávot fog át a hallható frekvenciatartomány?

A hallható frekvenciatartomány felső és alsó határa közti eltérés

$$\log_2 \frac{20\,000}{20} = 9,96 \text{ oktáv} \quad (1.21)$$

1.3. példa Cent

Mekkora annak a rezgésnek a frekvenciája, amely 10 centtel magasabb az 1000 Hz-nél?

A keresett f frekvenciára felírhatjuk, hogy

$$1200 \log_2 \frac{f}{1000 \text{ Hz}} = 10 \quad (1.22)$$

vagyis

$$f = 1000 \text{ Hz} \cdot 2^{10/1200} = 1005,8 \text{ Hz} \quad (1.23)$$

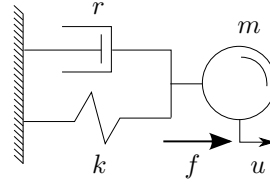
Míg a rezgés frekvenciája a magasságérzethez társítható, a rezgés amplitúdója a rezgés erősségét jellemzi. A rezgések erősségét – mind a fülünkkel, mind tapintás útján – szintén hozzávetőlegesen logaritmikusan érzékeljük, ezért két amplitúdó vagy energia érték közti eltérést is gyakran olyan logaritmikus egységben mérünk, amely a két érték közti nagyságrendek számát adja meg. A bel mértékegységet energiaszintek viszonyítására vezették be. Egy bel különbség egy tízes nagyságrend eltérésnek felel meg, vagyis az E_1 és E_2 energiaszintek belben kifejezett eltérése

$$\lg \frac{E_2}{E_1} \quad (1.24)$$

A bel egység a dekádhoz hasonlóan túl nagynak bizonyult, ezért a mérnöki alkalmazásokban a decibelt (dB) használjuk, ami a bel tizedrésze. Az E_1 és E_2 energiaszintek dB-ben kifejezett eltérése eszerint

$$10 \lg \frac{E_2}{E_1} \quad (1.25)$$

A bel és decibel egységeket nemcsak energiaszintek, hanem kitérés amplitúdók összevetésére is alkalmazhatjuk, de figyelniük kell arra, hogy ekkor



1.4. ábra. Csillapított tömeg-rugó rendszer

is az energiák arányát használó definícióból induljunk ki. Mivel az energia az elmozdulás négyzetével arányos, ezért

$$10 \lg \frac{E_2}{E_1} = 10 \lg \frac{U_2^2}{U_1^2} = 20 \lg \frac{U_2}{U_1}. \quad (1.26)$$

Láthatjuk, hogy a rezgésamplitúdók közti eltérés decibelben való kifejezéséhez az amplitúdók hányadosának logaritmusát nem tízzel, hanem hússzal kell szoroznunk. Hasonló a helyzet a sebességgel és gyorsulással, melyekre szintén igaz, hogy az energia a négyzetükkel arányos.

1.4. példa Decibel

Hányszoros amplitúdóarányoknak felel meg a 0 dB, 3 dB, 10 dB, 20 dB eltérés?

A 0 dB eltérés azt jelenti, hogy

$$20 \lg \frac{U_2}{U_1} = 0 \quad (1.27)$$

vagyis

$$\frac{U_2}{U_1} = 10^{0/20} = 1 \quad (1.28)$$

Hasonló számítással a 3 dB eltérés $\sqrt{2}$ -szeres, a 6 dB kétszeres, a 10 dB hozzávetőlegesen háromszoros, a 20 dB pedig tízszeres aránynak felel meg.

1.4. Csillapított sajátrezgések**1.4.1. A csillapított rendszer mozgásegyenlete és megoldása**

Egészítsük ki rendszerünket az 1.4. ábrán látható módon egy mechanikai csillapító elemmel, ami a rezgés közben fellépő veszteségeket modellezi. A jelen példában alkalmazott csillapító elem viszkózus csillapító, ami a v sebességgel arányos $f = rv$

erőhatásnak felel meg. Itt r a viszkózus csillapítás, aminek mértékegysége Ns/m. A csillapítóval kiegészített rendszer mozgásegyenlete az alábbi alakra bővül:

$$f(t) - ku(t) - r\dot{u}(t) = m\ddot{u}(t). \quad (1.29)$$

A sajátrezgések meghatározásához ismét a homogén egyenletet kell vizsgálnunk:

$$0 = ku(t) + r\dot{u}(t) + m\ddot{u}(t). \quad (1.30)$$

A megoldáshoz alkalmazzuk a komplex leírási módot, vagyis keressük a választ $u(t) = \text{Re}\{\hat{u}(t)\}$ alakban, ahol az $\hat{u}(t)$ komplex elmozdulás

$$\hat{u}(t) = \hat{U}e^{\gamma t} \quad (1.31)$$

alakú. A választott γ paraméter itt tetszőleges komplex szám lehet. Felhasználva, hogy az idő szerinti deriválás γ -val való szorzássá alakul, a mozgásegyenletet a következő formában írhatjuk fel:

$$0 = (k + \gamma r + \gamma^2 m) \hat{U}, \quad (1.32)$$

vagy másik szokásos alakban (a tömeggel végigosztva)

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{k}{m} + \gamma \frac{r}{m} + \gamma^2 \right) \hat{U}, \\ &= (\omega_0^2 + \gamma 2\xi\omega_0 + \gamma^2) \hat{U}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

ahol bevezettük a

$$\xi = \frac{r}{2m\omega_0} \quad (1.34)$$

dimenziótlan csillapítási tényezőt. Az (1.33) egyenlet teljesül, ha a zárójeles tag zérus. A γ terjedési együtthatóban másodfokú egyenletet megoldva:

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2} &= \frac{-2\xi\omega_0 \pm \sqrt{4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2}}{2} \\ &= -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0^*, \end{aligned} \quad (1.35)$$

ahol

$$\omega_0^* = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \quad (1.36)$$

a csillapított rendszer sajátfrekvenciája. A szabadrezgés általános alakja eszerint

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= \hat{A}e^{-\xi\omega_0 t + j\omega_0^* t} + \hat{B}e^{-\xi\omega_0 t - j\omega_0^* t} \\ &= e^{-\xi\omega_0 t} \left(\hat{A}e^{j\omega_0^* t} + \hat{B}e^{-j\omega_0^* t} \right), \\ &= e^{-t/\tau} \left(\hat{A}e^{j\omega_0^* t} + \hat{B}e^{-j\omega_0^* t} \right), \end{aligned} \quad (1.37)$$

ahol $\hat{A}$ és $\hat{B}$ tetszőleges komplex számok, illetve bevezettük a

$$\tau = \frac{1}{\omega_0\xi} \quad (1.38)$$

időállandót. Az időállandó a csillapítás lehetséges leírója. Azt mutatja meg, hogy a csillapított rezgés burkolója mennyi idő alatt csökken a kezdeti érték $1/e$ -szeresére.

A valós kitérés lehetséges ekvivalens felírási módjai

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-t/\tau} (A \cos \omega_0^* t + B \sin \omega_0^* t) \\ &= U e^{-t/\tau} \cos(\omega_0^* t + \varphi) \end{aligned} \quad (1.39)$$

A csillapítatlan esethez képest lényeges eltérések a következők:

- A csillapított rendszer kitérésfüggvénye egy $-1/\tau$ kezdeti meredekségű, exponenciálisan csökkenő burkolóval súlyozott rezgő mozgás.
- A csillapított rendszer az $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ sajátfrekvencia helyett az annál kisebb $\omega_0^* = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$ csillapított saját-körfrekvenciával oszcillál.

1.5. példa Csillapított szabadrezgés adott kezdeti feltételekkel

Keressük az u_0 kezdeti elmozdulással és v_0 kezdeti sebességgel gerjesztett csillapított rendszer szabadválasztát. A kezdeti elmozdulás alapján

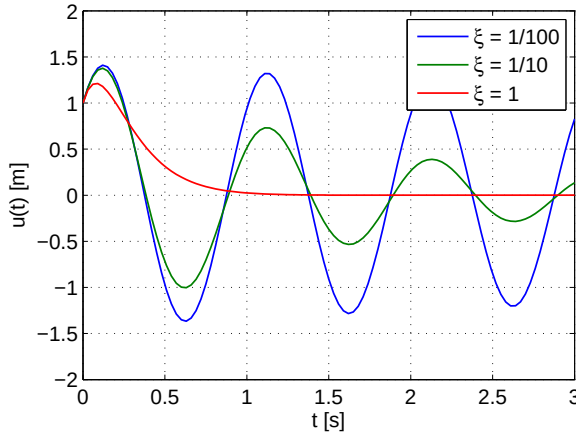
$$\begin{aligned} u_0 &= u(0) \\ &= e^{-0/\tau} (A \cos(\omega_0^* \cdot 0) + B \sin(\omega_0^* \cdot 0)) = A. \end{aligned} \quad (1.40)$$

A kezdeti sebesség alapján

$$\begin{aligned} v_0 &= \dot{u}(0) \\ &= \frac{-e^{-0/\tau}}{\tau} (A \cos(\omega_0^* \cdot 0) + B \sin(\omega_0^* \cdot 0)) + \\ &\quad + e^{-0/\tau} \omega_0^* (-A \sin(\omega_0^* \cdot 0) + B \cos(\omega_0^* \cdot 0)) \\ &= -\frac{A}{\tau} + \omega_0^* B. \end{aligned} \quad (1.41)$$

A megoldás szerint $A = u_0$ és $B = \frac{1}{\omega_0^*}(v_0 + u_0/\tau)$, vagyis

$$u(t) = e^{-t/\tau} \left(u_0 \cos(\omega_0^* t) + \frac{v_0 + u_0/\tau}{\omega_0^*} \sin(\omega_0^* t) \right). \quad (1.42)$$



1.5. ábra. Csillapított tömeg-rugó rendszer szabadrezgése adott kezdeti elmozdulás és sebesség, valamint különböző csillapítási tényezők esetén

A megoldást az 1.5. ábra szemlélteti $u_0 = 1$ m és $v_0 = 1$ m/s, $\omega_0 = 2\pi$ rad/s, valamint különböző csillapításértékek esetére. Figyelemre méltó a $\xi = 1$ kritikus csillapítás esete, mikor az ω_0^* csillapított sajátfrekvencia zérussá válik. A kritikus vagy azt meghaladó csillapításnál már nem beszélhetünk valódi rezgésről, hiszen az elmozdulásfüggvény nem oszcillál, hanem exponenciálisan tart a nulla kitéréshez.

1.4.2. Csillapított rendszer energiája

Vizsgáljuk meg a csillapító elemmel kiegészített rendszer energiáját. A teljes energia időegységre eső változása mozgás közben

$$\begin{aligned} \frac{dE_t}{dt} &= \frac{d(E_p + E_k)}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k u(t)^2 + \frac{1}{2} m \dot{u}(t)^2 \right) \\ &= k u(t) \dot{u}(t) + m \dot{u}(t) \ddot{u}(t) \\ &= \dot{u}(t) (k u(t) + m \ddot{u}(t)) \end{aligned} \quad (1.43)$$

(1.30) alapján $k u + m \ddot{u} = -r \dot{u}$, vagyis

$$\frac{dE_t}{dt} = -r \dot{u}^2(t) \quad (1.44)$$

Az energia csökkenési sebessége arányos tehát a tömeg sebességének négyzetével.

1.5. Gerjesztett rezgések

Mindaddig sajátrezgésekkel, vagyis a gerjesztés nélküli rendszer rezgéseivel foglalkoztunk. Tekintsük a továbbiakban azt az esetet, amikor a rendszer gerjesztése nem zérus, hanem egy F amplitúdójú és ω körfrekvenciájú harmonikus erő:

$$\begin{aligned} f(t) &= F \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re} \left\{ F e^{j(\omega t + \varphi)} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \hat{F} e^{j\omega t} \right\}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Mivel rendszerünk lineáris, az ω frekvenciájú harmonikus gerjesztésre adott válasz szintén ω frekvenciájú harmonikus kitérés lesz. Az (1.29) egyenlet komplex írásmódját alkalmazva

$$\hat{F} e^{j\omega t} = k \hat{U} e^{j\omega t} + r \frac{d\hat{U} e^{j\omega t}}{dt} + m \frac{d^2 \hat{U} e^{j\omega t}}{dt^2} \quad (1.46)$$

A deriválást elvégezve, majd az $e^{j\omega t}$ taggal leosztva:

$$\begin{aligned} \hat{F} &= (k + j\omega r - \omega^2 m) \hat{U} \\ &= m (\omega_0^2 + 2j\xi\omega\omega_0 - \omega^2) \hat{U}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

azaz

$$\hat{U} = \hat{F} \frac{1/m}{\omega_0^2 + 2j\xi\omega\omega_0 - \omega^2} \quad (1.48)$$

A gerjesztés és a válasz komplex amplitúdóinak $\hat{U}/\hat{F}$ hányadosát a rendszer komplex átvitelének nevezzük. Jelen esetben a rendszer átvitele

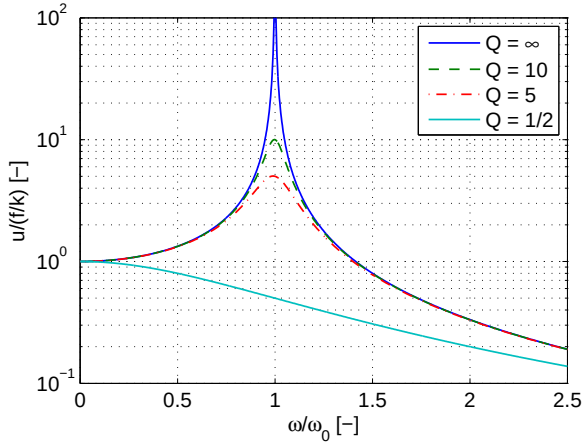
$$\frac{\hat{U}}{\hat{F}} = \frac{1/m}{\omega_0^2 + 2j\xi\omega\omega_0 - \omega^2} \quad (1.49)$$

Az átvitel vizsgálatát frekvencia-tartományokra bontva érdemes végezni. Kisfrekvenciás esetben ($\omega \ll \omega_0$) a nevező ω -t tartalmazó tagjai kiesnek, és az átviteli függvény határértéke

$$\frac{\hat{U}}{\hat{F}} = \frac{1/m}{\omega_0^2} = \frac{1}{k}, \quad (1.50)$$

vagyis lényegében a Hooke-törvényt kaptuk vissza. A kisfrekvenciás tartományt merevségtartománynak is szokták hívni, hiszen a három fizikai paraméter közül rugó k merevsége határozza meg az elmozdulást. Nagyfrekvenciás esetben ($\omega \gg \omega_0$) a nevező ω^2 -es tagja dominál, vagyis

$$\frac{\hat{U}}{\hat{F}} = \frac{-1}{m\omega^2}. \quad (1.51)$$



1.6. ábra. Csillapított tömeg-rugó rendszer erő-elmozdulás átviteli függvénye különböző csillapítások esetén

Ezt a tartományt tömegtartománynak nevezzük, hiszen a tömeg határozza meg az elmozdulás mértékét. A köztes tartományban tekintjük az $\omega \approx \omega_0$ esetet. Ekkor az átvitel kifejezése

$$\frac{\hat{U}}{\hat{F}} = \frac{1/m}{2j\xi\omega_0^2} = \frac{1}{j\omega_0 r}. \quad (1.52)$$

Érthető módon a középső tartományt csillapítás-tartománynak nevezzük. Amennyiben a csillapítás zérus, az átvitel az ω_0 sajátfrekvencián végtelen, vagyis tiszta rezonanciával állunk szemben. A zérustól különböző, kis csillapítás értékek esetében a rendszer átvitelében véges nagyságú kiemelést látunk. A kiemelés mértékének meghatározásához érdemes bevezetnünk a rendszer Q jósági tényező-jét, ami rezonáns átvitel statikus átvitelhez képesti növekményét írja le.

$$Q = \frac{|U(\omega_0)|}{|U(0)|} = \frac{k}{r\omega_0} = \frac{1}{2\xi} \quad (1.53)$$

A maximális átvitelhez tartozó frekvenciát meghatározhatjuk a $|\hat{U}(\omega)/\hat{F}(\omega)|$ maximalizálásával. A maximumot ott találjuk, ahol az (1.49) összefüggés nevezője minimális. Vagyis a feladat a

$$|\omega^2 + 2j\xi\omega\omega_0 - \omega_0^2| \quad (1.54)$$

kifejezés minimumhelyének megkeresése. Kihaználna, hogy az abszolútértéknek ugyanott van a mi-

nimuma, mint a négyzetének, ezért a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} |\omega_0^2 + 2j\xi\omega\omega_0 - \omega^2|^2 &= \\ \frac{\partial}{\partial \omega} ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2) &= \\ 4\omega(\omega^2 - \omega_0^2) + 8\xi^2\omega_0\omega &= 0 \end{aligned} \quad (1.55)$$

egyenlet megoldását keressük. Az $\omega = 0$ triviális megoldás mellett a valódi minimumot az

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (1.56)$$

körfrekvenciánál kapjuk. Ebből következik, hogy $\xi = 1/\sqrt{2}$ -nél nagyobb csillapítási tényező esetén az átvitelnek nincs kiemelése. Kis csillapítások esetén pedig az átvitel maximumát valamivel az ω_0^* csillapított sajátfrekvencia alatt találjuk.

Érdeemes megemlíteni, hogy kis csillapítások esetén a jósági tényezőt mérés alapján az átvitel csúcsértéke körüli tartomány kiértékelésével számíthatjuk ki. Ennek akkor van gyakorlati jelentősége, amikor egy többszabadságfokú rendszert mérünk, és az átvitelnek több csúcsa is van, melyekre különböző jósági tényezők jellemzők. A számítás menétét az 1.7. ábrán illusztráljuk. Az n -edik csúcshoz tartozó Q_n jósági tényező megkapható a

$$Q_n \approx \frac{\omega_n}{\Delta\omega_n} \quad (1.57)$$

képlettel, ahol a $\Delta\omega_n$ az n -edik csúcs „szélessége”, vagyis a maximális átvitelhez képest -3 dB-es átviteli értékhez tartozó körfrekvenciák különbsége.

Ez a közelítő összefüggés az alábbi módon igazolható. A -3 dB-es pontban az (1.49) nevezőjének valós és képzetes részének abszolút értéke megegyezik. Így a nevezőt kiértékelve az $\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega/2$ körfrekvenciákon a

$$2\xi\omega_0 \left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) = \Delta\omega \left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{4} \right) \quad (1.58a)$$

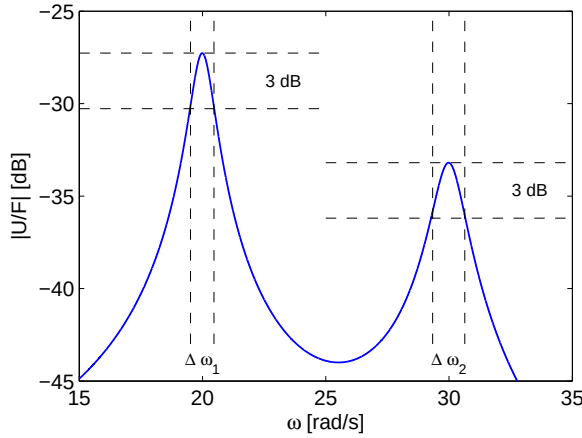
$$2\xi\omega_0 \left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) = \Delta\omega \left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{4} \right) \quad (1.58b)$$

egyenlőségek adódnak. A két egyenletet összeadva

$$4\xi\omega_0^2 = 2\Delta\omega\omega_0, \quad (1.59)$$

amiből következik, hogy

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{2\xi} = Q. \quad (1.60)$$



1.7. ábra. Jósági tényező (Q) meghatározása mérés az (1.57) összefüggés alapján

Az 1.6. ábra a tömeg-rugó rendszer amplitúdó-átvitelét mutatja különböző jósági tényezők esetére. Zérus csillapításnál ($Q = \infty$) a sajátfrekvencián végtelen az átvitel, a kritikus csillapítás esetében ($\xi = 1$, $Q = 1/2$) az átvitel értéke $1/2$, ami a statikus átvitelhez képest 6 dB csillapításnak felel meg.

1.6. példa Jósági tényező és kritikus csillapítás

Mekkora a kritikus csillapítással csillapított rendszer jósági tényezője?

A kritikus csillapítás feltétele szerint a csillapított sajátfrekvencia $\omega_0^* = \sqrt{1 - \xi^2} = 0$, azaz $1 = \xi = r/2m\omega_0$, ahonnan a viszkózus csillapítás értéke $r = 2m\omega_0$. A viszkózus csillapítást visszahelyettesítve a jósági tényező $Q = k/r\omega_0$ kifejezésébe

$$Q = \frac{k}{2m\omega_0^2} = \frac{1}{2} \quad (1.61)$$

ahol kihasználtuk az $\omega_0^2 = k/m$ összefüggést.

1.7. példa Csillapítási tényező

Egy mérésben egy csillapított tömeg-rugó rendszer teljes energiáját határoztuk meg. Azt tapasztaltuk, hogy a teljes energia 3 dB-lel csökken 15 s-onként. A rezgés periódusidejét pedig $T_0^* = 2$ s-nak mértük. Hány periódus alatt csökken az amplitúdó az egytizedére? Mekkora a rendszer jósági tényezője?

Vegyük észre, hogy az energia és az amplitúdó csökkenése dB/s-ban kifejezve azonos értékű,

a fenti példában ez pedig $3 \text{ dB}/15 \text{ s} = 0,2 \text{ dB/s}$. Az egytized amplitúdó 20 dB-es csökkenést jelent, amelyhez $20/0,2 = 100 \text{ s}$ szükséges, ami $n = 100 \text{ s}/2 \text{ s} = 50$ periódusnak felel meg.

A következő lépésben határozzuk meg először a rendszer τ időállandóját. Az (1.37) összefüggés szerint τ idő alatt az amplitúdó $1/e$ részére, vagyis $20 \log_{10} e \approx 8,69 \text{ dB}$ -el csökken. Ebből az időállandó $\tau = 8,69/0,2 \approx 43,43 \text{ s}$ -nak adódik. A jósági tényező ($Q = 1/2\xi$) meghatározásához a ξ csillapítási tényezőt kell kiszámítanunk. Ehhez a

$$\tau = \frac{1}{\xi\omega_0} \quad \text{és} \quad \omega_0^* = \frac{2\pi}{T_0^*} = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

összefüggéseket használjuk fel, ahol ω_0 -t kifejezve az első egyenletből és visszahelyettesítve a második egyenletbe a

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\omega_0^{*2}\tau^2 + 1}}$$

összefüggés adódik, melynek jobb oldalán csak az előbbieken már meghatározott értékek szerepelnek. Kiértékelve a formulát $\xi = 7,33 \cdot 10^{-3}$ adódik, melyből a jósági tényező $Q = 68,22$.

Megjegyezzük, hogy mivel a csillapítás jóval a kritikus érték alatt van ($\xi \ll 1$), a számítást egyszerűsíthetjük, ha a $\tau \approx 1/(\xi\omega_0^*)$ közelítést használjuk. Az így számolt és a fenti eredményből adódó jósági tényező mindössze a negyedik tizedesjegyben tér el egymástól.

2. fejezet

Húrok rezgései

2.1. Bevezetés

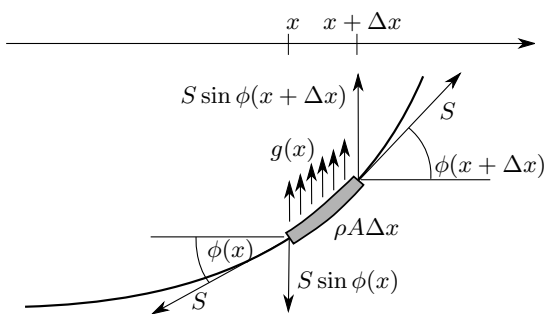
Ez a fejezet a kordofon hangszerek rezonátorával, a húrral foglalkozik. A húr rezgéstani szempontból a legegyszerűbb olyan rendszer, melyben hullámterjedés lép fel.

A 2.2. fejezet az ideális húr mozgásegyenletének levezetését adja meg. A 2.3. fejezet a végtelen hurokban történő hullámterjedési jelenségeket írja le, a 2.4. fejezet pedig a véges hosszú, mindkét végén befogott húr rezgéseit tárgyalja. Ebben a fejezetben bevezetjük a módusok fogalmát, és megismerkedünk a modális szuperpozíció technikájával, ami a rezgő rendszerek elemzésének rendkívül fontos és erőteljes eszköze. A véges hurokat tárgyaló fejezetben belül vizsgáljuk részletesen a pengetett és kalapáccsal ütött hurok rezgéseit. A 2.5. fejezet a hurok csillapításáért felelős jelenségekkel foglalkozik, végül a 2.6. fejezet a nemideális húrlezáráások tulajdonságait ismerteti.

2.2. Az ideális húr mozgásegyenlete

A hurok nagyon jó közelítéssel egydimenziós rendszerek, vagyis keresztirányú kiterjedésük lényegesen kisebb mind hosszirányú méretüknél, mind a rajtuk megjelenő rezgések hullámhosszánál. Az ideális hurokra igaz továbbá, hogy saját merevségük gyakorlatilag zérus, rezgésre csak külső hosszirányú erő jelenléte mellett, megfeszített állapotban képesek.

A hurokban hosszanti irányú feszítő erő hat, ez a feszítő erő téríti vissza a megpendített, megütött vagy vonással gerjesztett húr a nyugalmi állapot



2.1. ábra. A húr Δx hosszúságú darabja

felé. A húrban fellépő feszítő erőt jelölje S , ennek mértékegysége N. A feszítő erő mindig érintőirányban hat. Rezgéskeltésben akkor van szerepe, mikor az érintőirány a húr hossza mentén változik, vagyis a húr valamilyen gerjesztés hatására az egyenestől eltérő alakot vesz fel.

Tekintsük a kitérített húr x és $x + \Delta x$ pozíciók között elhelyezkedő, Δx hosszúságú darabját, ahogy a 2.1. ábra mutatja. A húrdarabra $g(x)$ keresztirányú külső gerjesztő erő hat. Az $g(x)$ mennyiség hosszegységre eső erőt jelöl, mértékegysége N/m. A teljes húrdarabra eső külső erő ezek szerint $g(x)\Delta x$.

A hosszirányú S feszítő erő x tengellyel bezárt hajlásszöge az elem bal oldalán $\phi(x)$, jobb oldalon $\phi(x + \Delta x)$. A húra ható feszítő erők keresztirányú komponense a bal oldalon $-S \sin(\phi(x))$, a jobb oldalon pedig $S \sin(\phi(x + \Delta x))$. A húrdarab hosszegységre eső tömege μ [kg/m]. Ezen mennyiségek ismeretében felírható a húrdarabra Newton második törvénye:

$$g(x)\Delta x + S [\sin \phi(x + \Delta x) - \sin \phi(x)] = \mu \Delta x a(x), \quad (2.1)$$

ahol $a(x)$ a húrdarab keresztirányú gyorsulását jelöli. Kis szögelfordulások esetén $\sin \phi \approx \phi$, ami szerint (a Δx hosszelemmel végigoszttva)

$$g(x) + S \frac{\phi(x + \Delta x) - \phi(x)}{\Delta x} = \mu a(x). \quad (2.2)$$

A $\Delta x \rightarrow 0$ határátmenetet elvégezve, a Newton-törvény alábbi differenciális alakjához jutunk:

$$g(x) + S \frac{d\phi(x)}{dx} = \mu a(x). \quad (2.3)$$

A húr $\phi(x)$ szögelfordulása kifejezhető a keresztirányú $u(x)$ kitérésfüggvény segítségével. Kis szögek esetén

$$\phi(x) \approx \tan \phi(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{du(x)}{dx}. \quad (2.4)$$

Behelyettesítve (2.4)-et a (2.3) Newton-törvénybe, valamint bevezetve a keresztirányú a gyorsulás helyett az u kitérés idő szerinti második deriváltját, az alábbi húregyenletet kapjuk:

$$g(x, t) + Su''(x, t) = \mu \ddot{u}(x, t). \quad (2.5)$$

A (2.5) egyenlet egy parciális differenciálegyenlet, mely az $u(x, t)$ elmozdulásfüggvény mind x , mind t szerinti parciális deriváltjait tartalmazza. A differenciálegyenlet mind az idő, mind a térkoordinátát tekintve másodrendű, vagyis legfeljebb második deriváltakat tartalmaz. Ez azt jelenti, hogy egyértelmű megoldásához két időbeli és két térbeli feltételre van szükségünk.

Az időbeli feltételeket általában kezdeti feltételek formájában adjuk meg, vagyis definiáljuk a megoldás $t = 0$ időpontbeli $u(x, 0) = u_0(x)$ kezdeti elmozdulását és $\dot{u}(x, 0) = v_0(x)$ kezdeti sebességét. A térbeli feltételeket rendszerint peremfeltételek formájában realizáljuk, vagyis definiáljuk a véges hosszú húr két végpontjában az elmozdulásfüggvény $u(0, t)$ és $u(L, t)$ értékeit.

2.3. Rezgésterjedés a végtelen ideális húrban

Először a végtelen kiterjedésű, gerjesztésmentes húrokban terjedő rezgéseket vizsgáljuk. Ez a téma messze elrugaszkodik a valóságos alkalmazásotól, de alkalmas arra, hogy bevezessük segítségével a

2.1. táblázat. Húrok és húrbevonó anyagok anyagjellemzői

anyag	sűrűség [kg/m ³]
nejlon	1 200
bél	1 300
selyem	1 300
alumínium	2 700
acél	7 700
réz	8 900
ezüst	11 000
arany	19 000
wolfram	19 000

húrokban terjedő rezgések sebességét, illetve megvizsgáljuk a hullámok visszaverődésének (reflektálódásának) alapvető tulajdonságait.

2.3.1. Haladó hullámok

A gerjesztés nélküli ($g(x) = 0$) húregyenlet alakja

$$Su''(x, t) = \mu \ddot{u}(x, t). \quad (2.6)$$

Bevezetve a

$$c = \sqrt{\frac{S}{\mu}} \quad (2.7)$$

mennyiséget, egyenletünket az alábbi alakra hozhatjuk:

$$u''(x, t) = \frac{1}{c^2} \ddot{u}(x, t). \quad (2.8)$$

Behelyettesítés útján könnyen látható, hogy a (2.8) egyenletet kielégíti az alábbi, d'Alembert-féle megoldás:

$$u(x, t) = u^+(ct - x) + u^-(ct + x), \quad (2.9)$$

ahol $u^+(x)$ és $u^-(x)$ tetszőleges rezgésalakokat (impulzusokat) jelölnek. Az $u^+(ct - x)$ a pozitív x tengely irányában c sebességgel haladó rezgésalakot ír le, $u^-(ct + x)$ pedig a negatív irányban c sebességgel haladó impulzus leírása. Eredményünk szerint a húrban a rezgések a (2.7)-ben definiált sebességgel terjednek. A terjedési sebesség négyzete a húr S feszítő erejének és a húr egységnyi hosszra eső μ tömegének hányadosa.

A hangszerhúrokhoz használt anyagok sűrűségértékeit a 2.1. táblázatban soroljuk fel, tipikus hegedű és gitárhúr paramétereiket a 2.2-2.3. tábláza-

2.2. táblázat. Hegedűhúrok mért jellemzői

jellemző	<i>E</i> -húr	<i>A</i> -húr	<i>D</i> -húr	<i>G</i> -húr
frekvencia [Hz]	660	440	294	196
átmérő [mm]	0,249 – 0,264	0,452 – 0,701	0,671 – 0,914	0,790 – 0,833
feszítő erő [N]	72,25 – 84,01	48,89 – 63,51	34,76 – 61,73	35,43 – 49,92
tömeg [g/m]	0,381 – 0,443	0,579 – 0,752	0,924 – 1,641	2,115 – 2,799

2.3. táblázat. Gitárhúrok mért jellemzői

jellemző	<i>E</i> -húr	<i>H</i> -húr	<i>G</i> -húr	<i>D</i> -húr	<i>A</i> -húr	<i>E</i> -húr
frekvencia [Hz]	330	247	196	147	110	82,4
átmérő [mm]	0,70	0,83	1,03	0,75	0,93	1,07
feszítő erő [N]	76,7	61,1	57,9	74,5	74,5	61,2
tömeg [g/m]	0,417	0,593	0,892	2,04	3,45	5,33

tokban. Tekintve, hogy a húrok keresztmetszeti mérete tipikusan mm nagyságrendű érték, az egységni hosszra eső tömeg tipikusan a pár gramm nagyságrendbe esik. A hangszerek megfeszített húrjaiban ható feszítő erő tipikusan 50–200 N, így a sebesség jellemzően 100–500 m/s körüli érték.

2.3.2. Rezgés visszaverődése megfogott hűrvégződésről

Vizsgáljuk meg, hogy mi történik a haladó rezgéshullámmal, ha merev hűrbefogásnak ütközik. Tegyük fel, hogy a húr bal oldali befogott végpontja $x = 0$ -ban helyezkedik el. Ekkor a bal oldali befogási kényszer alakja:

$$u(0, t) = u^+(ct) + u^-(ct) = 0, \quad (2.10)$$

vagyis minden t értékre teljesül az

$$u^+(ct) = -u^-(ct) \quad (2.11)$$

összefüggés. Ennek értelmében a hűrban pozitív és negatív irányban haladó rezgések egymás ellentettjei, más szóval a rezgésalak előjelt váltva verődik vissza a megfogott lezárásról. A jelenséget a 2.2(a). ábrarozat mutatja be. A legfelső ábrán egy pozitív kitérésű impulzus halad a negatív x tengely irányába, és a lezárás túloldaláról az impulzus (képzeletbeli) tükörképe halad vele szemben. Mikor a két impulzus összetalálkozik, természetesen az $x = 0$ pontban kioltják egymást, ezzel teljesül

a lezárás zérus kitérés feltétele. A harmadik pillanatképen megfigyelhető, hogy az eredeti impulzus képzeletben továbbhalad a negatív oldalra, és az eddig képzeletbeli ellenimpulzus felbukkan a pozitív oldalon. A negyedik ábrán már egyértelműen látszik, hogy az eredeti és ellenimpulzus helycseréje valójában a hullámforma ellentétes amplitúdójú visszaverődését jelenti.

2.3.3. Rezgés visszaverődése szabad hűrvégződésről

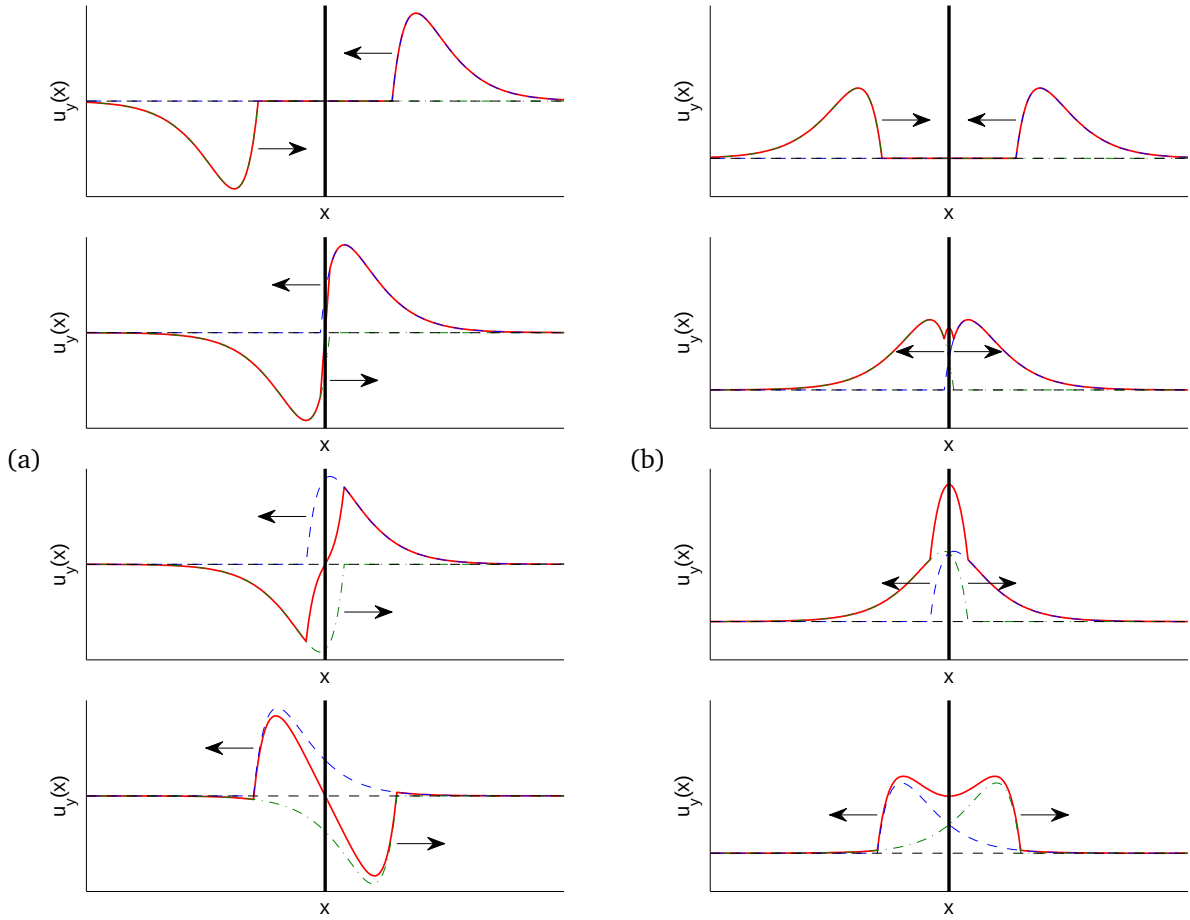
Szabad hűrvégződés alatt olyan lezárást értünk, amely amellet, hogy biztosítja a húr longitudinális S feszítő erejét, a hűrra keresztirányú erőt nem tud kifejteni. Ez az erőmentes lezárás egy függőleges rúdként képzelhető el, melyen a hűrban vagy lezáró gyűrűben végződő húr súrlódásmentesen csúszhat.

A húr által a lezárásra kifejtett keresztirányú erő a hűrban ható S feszítő erő keresztirányú $S \sin \phi$ komponensével egyezik meg. Mivel a $\sin \phi$ tag kis elmozdulások esetében megegyezik az u elmozdulás x szerinti első deriváltjával, a szabad lezárás szerint

$$u'(x = 0, t) = 0. \quad (2.12)$$

A feltételt behelyettesítve (2.9)-be, a következő összefüggést kapjuk:

$$u^{+'}(ct) = u^{-'}(ct), \quad (2.13)$$



2.2. ábra. Impulzus visszaverődése (a) befogott és (b) szabad húrlezárásról

ahol a vessző az x koordináta szerinti deriválást jelöli. A kifejezés egyszeri integrálása után

$$u^+(ct) = u^-(ct), \quad (2.14)$$

vagyis a rezgés a szabad húrlezárásról azonos előjellel verődik vissza, ahogy azt a 2.2(b) ábrásorozat mutatja.

2.3.4. A félvégtesen húr bemenő impedanciája

Bevezetjük a félvégtesen húr bemenő mechanikai impedanciájának fogalmát, ami a húr végére ható erő és a húrvég sebességének hányadosa. Tekintsük azt a félvégtesen húrt, melynek vége $x = 0$ -ban helyezkedik el, és melyet az $x = 0$ pozícióban F keresztirányú erővel gerjesztünk.

Mivel a húr végtelen hosszú, benne csak az erőgerjesztéstől c sebességgel távolodó rezgések léphetnek fel. A húr elmozdulása tehát egy haladó hullám lesz, amelynek leírása

$$u(x, t) = u^+(x - ct), \quad (2.15)$$

ahol u^+ a pozitív irányba haladó impulzus alakja. A kitéréshez tartozó gerjesztő erő az

$$F(0, t) = -S \sin \phi|_{x=0} = -Su'(0, t) = -Su^{+'}(-ct) \quad (2.16)$$

képlettel fejezhető ki. A gerjesztés helyén mérhető sebesség kifejezése

$$v(0, t) = \dot{u}(0, t) = -cu^{+'}(-ct). \quad (2.17)$$

Az erő és a sebesség hányadosa adja meg a félvégtelen húr r bemenő mechanikai impedanciáját, ami tehát

$$r = \frac{F(0, t)}{v(0, t)} = \frac{-Su^{+'}(-ct)}{-cu^{+'}(-ct)} = \frac{S}{c} = \sqrt{\mu S} = \mu c. \quad (2.18)$$

2.4. A véges ideális húr rezgései

Foglalkozunk a továbbiakban az $x = 0$ és $x = L$ pozícióban befogott, véges hosszú húrral.

2.4.1. A véges hosszú húr sajátrezgései

Először a véges hosszú húr sajátrezgéseit keressük meg. A sajátrezgések olyan rezgésfomák, melyek a gerjesztés jelenléte nélkül is végtelen ideig fennmaradhatnak a csillapítatlan húrbán. Ezek a rezgések tehát a homogén húregyenlet $u(x, t)$ megoldásai, melyek semmiféle kezdeti feltételnek nem kell hogy eleget tegyenek, de kielégítik az $u(0, t) = u(L, t) = 0$ peremfeltételeket.

A sajátrezgések megkereséséhez egy fontos matematikai technikát, a változók szeparálásának módszerét alkalmazzuk: Keressük az $u(x, t)$ függvényt

$$u(x, t) = U_x(x)U_t(t) \quad (2.19)$$

szorzat alakban. Helyettesítsük be (2.19)-et a (2.8) homogén hullámgörbe:

$$U_x''(x)U_t(t) = \frac{1}{c^2}U_x(x)\ddot{U}_t(t). \quad (2.20)$$

Osszuk el mindkét oldalt $U_x(x)U_t(t)$ -vel:

$$\frac{U_x''(x)}{U_x(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{U}_t(t)}{U_t(t)}. \quad (2.21)$$

Vegyük észre, hogy a (2.21) egyenlet bal oldala csak az x helykoordinátától, a jobb oldala pedig csak a t időtől függ, vagyis sikerült a változók szeparálása. Az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha mindkét tag konstans. Ezt a konstans nevezzük el $-k^2$ -nek. A bal oldali egyenlet alapján tehát

$$U_x''(x) = -k^2 U_x(x). \quad (2.22)$$

Ennek megoldása

$$U_x(x) = A \sin kx + B \cos kx, \quad (2.23)$$

ahol k a rad/m dimenziójú hullámszám. Az A és B paraméterek értékét az aktuális peremfeltételek határozzák meg.

Az $x = 0$ -beli befogási kényszer szerint $U_x(0) = 0$, ahonnan következik, hogy $B = 0$, vagyis $U_x(x) = A \sin kx$. Az $x = L$ -beli $U_x(L) = 0$ feltételből adódik, hogy

$$A \sin kL = 0, \quad (2.24)$$

vagyis $kL = n\pi$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$. Eredményeink szerint a bevezetett k hullámszám csak a

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

diszkrét értékeket veheti fel.

A szeparált egyenlet időfüggő jobb oldalához tartozó feltétel alakja

$$\ddot{U}_t(t) = -k_n^2 c^2 U_t(t). \quad (2.26)$$

Az egyenlet megoldása

$$U_t(t) = U \cos(k_n c t + \varphi) = U \cos(\omega_n t + \varphi), \quad (2.27)$$

ahol

$$\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.28)$$

a rezgés körfrekvenciája.

Eredményeink szerint az ideális húrnak végtelen sok sajátrezgése van, melyek mind térben, mind időben harmonikus függvények. Az n -edik sajátrezgés hely-időfüggvénye

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= U_n \sin k_n x \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_n) \\ &= U_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi_n\right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

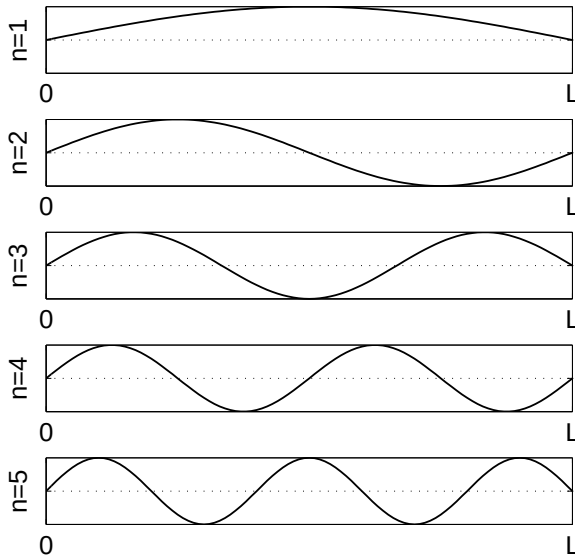
A kapott sajátrezgések állóhullámok, melyek egy térben és egy időben harmonikus tag szorzataként állnak elő.

Az állóhullámok térfüggését leíró tagokat a húr módusalakjainak nevezzük, és bevezetjük rájuk a ψ_n jelölést:

$$\psi_n = \sin k_n x = \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (2.30)$$

A ψ_n módusalakokat a 2.3. ábra mutatja az $n = 1 \dots 5$ értékekre.

A módusalakok az alábbi fontos tulajdonságokkal bírnak:



2.3. ábra. Az L hosszú, mindkét végén megfogott húr $\sin n\pi x/L$ alakú normál módusai

- A ψ_n módusalakok lineárisan függetlenek, vagyis egyik módusalak sem állítható elő a többi szuperpozíciójaként. Másként fogalmazva, a zérus függvény csak úgy keverhető ki a módusokból, ha minden módusalak együtthatója nulla.

$$\sum_n \alpha_n \psi_n(x) = 0 \rightarrow \alpha_n = 0, n = 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

- A módusok teljes függvényrendszert alkotnak, vagyis a húrban kialakulni képes tetszőleges $u(x)$ rezgésalak összerakható a $\psi_n(x)$ módusalakok szuperpozíciójaként:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n(x), \quad (2.32)$$

ahol α_n az n -edik módus súlya, az úgynevezett részesedési tényező vagy modális koordináta. Időfüggő $u(x, t)$ rezgésalakok esetében a részesedési tényezők időfüggőek, ekkor a szuperpozíció alakja

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \psi_n(x). \quad (2.33)$$

A ψ_n módusalakok függetlensége miatt a szuperpozíció egyértelmű, vagyis adott $u(x)$ függ-

vényhez az α_n koordináták csak egyféleképpen választhatók ki.

- A módusalakok ortogonális rendszert alkotnak. Ez alatt azt értjük, hogy a ψ_n és ψ_m módusalakok skalárszorzata nulla, ha $n \neq m$, és pozitív, ha $n = m$. A skalárszorzatot a módusalakok esetében a

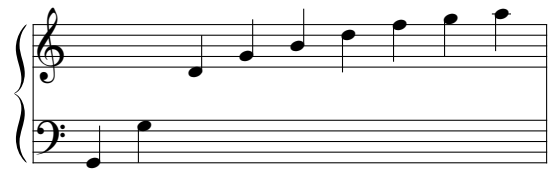
$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \int_0^L \psi_n(x) \psi_m(x) dx \quad (2.34)$$

integrállal definiáljuk, amire valóban teljesül, hogy

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{L}{2} & n = m \end{cases} \quad (2.35)$$

- Minden $\psi_n(x)$ módusalakhoz tartozik egy ω_n sajátfrekvencia. A kettő kapcsolata az, hogy a magára hagyott csillapítatlan rendszerben a $\psi_n(x)$ módusalak ω_n frekvenciájú harmonikus rezgést végez, vagyis $\alpha_n(t) = U_n \cos(\omega_n t + \varphi)$ alakú súlyfüggvény tartozik hozzá, ahogy a fentebbi számítások is mutatják. Kihangsúlyozzuk, hogy ez a tulajdonság csak a szabadrezgések esetére áll fenn. Alkalmas $g(x, t)$ gerjesztés megválasztásával tetszőleges módusalakra lényegében tetszőleges időfüggés rákényszeríthető.

Az ideális, mindkét végén megfogott húr sajátfrekvenciái az alaphfrekvencia egész számú többszörösei, más szóval harmonikusai. Az alaphang első nyolc felharmonikusához tartozó hangmagasságok:



2.1. példa Hegedűhúrok paraméterei I.

Mekkora a feszítő erő egy $L = 325$ mm hosszú és $d = 0,25$ mm átmérőjű acél E hegedűhúrban? (Az E hang frekvenciája 660 Hz.)

Az E húr alapharmonikusa $f_1 = 660$ Hz-en rezeg, vagyis

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{L} = 2\pi f_1,$$

ahonnan $c = 2f_1 L$. A feszítő erő kifejezése (2.7) és (2.28) alapján

$$S = \mu c^2 = \rho \left(\frac{d}{2} \right)^2 \pi \times (2f_1 L)^2 = \rho \pi (df_1 L)^2.$$

Az $f_1 = 660$ Hz az E hang frekvenciája, valamint $\rho = 7700$ kg/m³ az acél sűrűsége. A helyettesítést elvégezve $S = 70$ N, vagyis az E -húr terhelése hozzávetőlegesen „7 kg”.

2.2. példa Hegedűhúrok paraméterei II.

Mozart szerint az ideális hegedűn a négy húr feszítő ereje azonos. Mekkora legyen ezen elv szerint az acélból készült A , D és G hűrok átmérője?

A 2.1. példa megoldása szerint az S feszítő erő a $\rho(dfL)^2$ szorzattal arányos, vagyis azonos feszítő erő eléréséhez (azonos anyag és húrhosszúság mellett) a df szorzatot állandó értéken kell tartani. A hegedű hűrjai kvintenként vannak hangolva, vagyis szomszédos hűrok frekvenciaaránya 2 : 3. Eszerint az A húr átmérője $d_A = 3/2 d_E = 0,375$ mm, a D húr $d_D = (3/2)^2 d_E = 0,56$ mm, a G húr pedig $d_G = (3/2)^3 d_E = 0,84$ mm.

2.3. példa Hegedűhúrok paraméterei III.

Hogyan változtassuk a hűrok átmérőjét, ha azonos feszítő erő mellett áttérünk acélról bélhűrokra?

A 2.1. példa megoldása szerint az S feszítő erő a $\rho(dfL)^2$ szorzattal arányos, vagyis azonos feszítő erő eléréséhez (azonos húrhosszúság és frekvencia mellett) a ρd^2 szorzatot állandó értéken kell tartani. Ezek szerint $\rho_{bél} d_{bél}^2 = \rho_{acél} d_{acél}^2$, illetve

$$\frac{d_{bél}}{d_{acél}} = \sqrt{\frac{\rho_{acél}}{\rho_{bél}}} = \sqrt{\frac{7700}{1300}} = 2,43$$

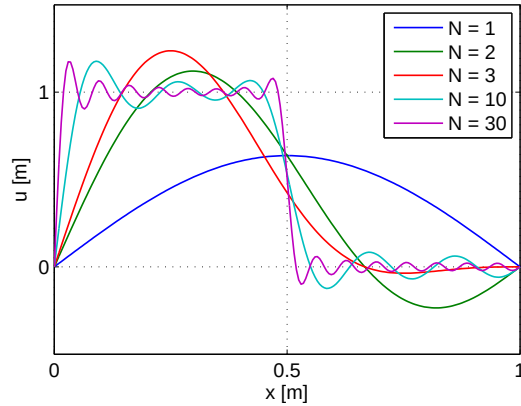
vagyis az átmérőket 2,4-szeres értékre kell növelni.

2.4. példa Hegedűhúrok paraméterei IV.

Egy acél hegedűhúr hossza 30 cm, átmérője 0,5 mm, alaphangja 500 Hz. Az acél sűrűsége 7800 kg/m³. Legfeljebb hány centtel hangolhatjuk feljebb a hűrt, ha a katalógus szerint megengedett maximális feszítő erő „15 kg”?

A 2.1. példa megoldása szerint a feszítő erő

$$S = \rho \pi (dL f)^2 = 137,8 \text{ N}.$$



2.4. ábra. A 2.5. feladat $u(x)$ függvényének közelítése véges N elemszámú modális szuperpozícióval

A feszítő erő a frekvencia négyzetével arányos, tehát $f'/f = \sqrt{S'/S}$, ahonnan a centben kifejezett hangmagasság-változás

$$\begin{aligned} 1200 \cdot \log_2 \frac{f'}{f} &= 600 \log_2 \frac{S'}{S} \\ &= 600 \log_2 \frac{150}{138} = 72 \text{ cent.} \end{aligned} \quad (2.36)$$

2.5. példa Modális koordináták meghatározása

Határozzuk meg az L hosszú, mindkét végén befogott húron értelmezett

$$u(x) = U_0 [\varepsilon(x) - \varepsilon(x - L/2)]$$

függvény modális koordinátáit!

Írjuk fel az $u(x)$ függvényt modális szuperpozícióval:

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \psi_m(x).$$

Szorozzuk skalárisan mindkét oldalt ψ_n -nel:

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, u \rangle &= \left\langle \psi_n, \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \psi_m \right\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \langle \psi_n, \psi_m \rangle \\ &= \alpha_n \langle \psi_n, \psi_n \rangle, \end{aligned} \quad (2.37)$$

ahonnan

$$\alpha_n = \frac{\langle \psi_n, u \rangle}{\langle \psi_n, \psi_n \rangle}. \quad (2.38)$$

A skaláris szorzatok kifejtésével

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \psi_n(x) u(x) dx = \frac{2U_0}{L} \int_0^{L/2} \sin k_n x dx \\ &= -\frac{2U_0}{k_n L} [\cos k_n x]_0^{L/2} = \frac{2U_0}{\pi} \frac{1 - \cos n\pi/2}{n} \\ &= \frac{2U_0}{\pi} \left[\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{0}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{6}, \frac{1}{7}, \frac{0}{8}, \dots \right] \quad (2.39)\end{aligned}$$

A véges N taggal elvégzett modális szuperpozíció eredményét a 2.4. ábra mutatja.

2.6. példa Gitárbundozás

Az ökölszabály szerint a gitárokat úgy bundozzuk, hogy a következő bundot mindig a fennmaradó szabad húrhossz $1/18$ -ad részénél helyezzük el. Mekkora a 12. bundon lefogott oktáv eltérése a tiszta oktávtól?

A 12. bundnál a fennmaradó húrhossz $L' = L \cdot (17/18)^{12} = 0,5036L$, ami a húr felénél kicsit hosszabb. Mivel a sajátfrekvencia a húr hosszának reciprokával arányos, az „oktáv” frekvenciaaránya $f'/f = L/L' = 1,9856$, ami

$$1200 \log_2 \frac{1,9856}{2} = -12,55 \text{ cent} \quad (2.40)$$

eltérést mutat a tiszta oktávhoz képest.

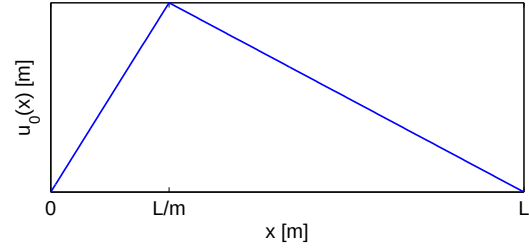
2.4.2. A módusok energiája

Akárcsak egy rezgésben levő tömeg-rugó rendszer, a rezgő húr is energiát tárol potenciális és kinetikus energia formájában. Tekintsük a két végén megfoglott, szabadon rezgő húr n -edik módusát, melynek hely-időfüggése

$$u_n(x, t) = U_n \sin k_n x \cos \omega_n t. \quad (2.41)$$

A húr egy dx hosszú darabjának kinetikus energiája az $E_k = mv^2/2$ képlet alapján:

$$dE_{kn}(x) = \frac{1}{2} \mu U_n^2 \omega_n^2 \sin^2 k_n x \sin^2(\omega_n t) dx, \quad (2.42)$$



2.5. ábra. A pengetett húr kezdeti $u_0(x)$ elmozdulása.

ami alapján a húr teljes kinetikus energiája

$$\begin{aligned}E_{kn} &= \int_{x=0}^L dE_n(x) \\ &= \frac{1}{2} \mu U_n^2 \omega_n^2 \sin^2(\omega_n t) \int_{x=0}^L \sin^2 k_n x dx \\ &= \frac{1}{2} \mu U_n^2 \omega_n^2 \sin^2(\omega_n t) \int_{x=0}^L \frac{1 - \cos 2k_n x}{2} dx \\ &= \frac{1}{4} \mu L U_n^2 \omega_n^2 \sin^2(\omega_n t). \quad (2.43)\end{aligned}$$

Akárcsak a tömeg-rugó rendszerénél, a teljes energia itt is az időben harmonikusan változó kinetikus energia maximuma, vagyis

$$E_n = \frac{1}{4} m U_n^2 \omega_n^2, \quad (2.44)$$

ahol m a húr teljes tömege.

Ha a húr rezgésalakja több módusalak szuperpozíciója, akkor a teljes rezgési energia az energiata-gok összegeként írható fel, vagyis

$$E = \sum_n E_n = \frac{m}{4} \sum_n (U_n \omega_n)^2. \quad (2.45)$$

2.4.3. Pengetett hűrok rezgése

A két oldalon befoglott hűrok sajátrezgéseinek felírása után a megpengetett hűrok rezgéseivel foglalkozunk. Matematikai szempontból a pengetett rezgésalak egy szabadrezgés, ami adott elmozdulás kezdeti feltételből indul. A pengetés során a játékos a hűrt egy kezdeti $u_0(x)$ elmozdulásra gerjeszti, majd magára hagyja.

Tegyük föl, hogy a játékos az L hosszúságú hűrt az $x_0 = L/m$ pozícióban pengeti, ahol $m > 1$ tetszőleges valós érték. Ha feltételezzük, hogy a játékos ujja vagy pengetője elhanyagolható méretű

a húr hosszához viszonyítva, akkor a húr kezdeti elmozdulását egy, a 2.5. ábrán látható háromszög-függvénnyel közelíthetjük:

$$u_0(x) = \begin{cases} U_0 \frac{x}{x_0} & \text{ha } x \leq x_0 \\ U_0 \frac{L}{L-x_0} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \text{ha } x_0 < x < L \end{cases} \quad (2.46)$$

Az egyszerűség kedvéért feltételezzük továbbá, hogy a játékos a húrt álló pozícióból engedi el, vagyis a kezdeti sebességfüggvény minden x pozícióban zérus:

$$v_0(x) = \dot{u}(x, 0) = 0. \quad (2.47)$$

A húr válaszáának meghatározása

A pengetett húr rezgésének megadásához a modális szuperpozíció elvét használjuk, vagyis az $u(x, t)$ szabadrezgést a módusok szuperpozíciójaként,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \psi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin k_n x \end{aligned} \quad (2.48)$$

alakban írjuk fel. A felírásban kihasználtuk, hogy a pengetett húr szabadrezgést végez, ezért a $\psi_n(x)$ módusalakhoz ω_n sajátfrekvenciájú harmonikus időfüggés tartozik. A megoldás során az U_n módusamplitúdók és φ_n fázisszögek meghatározása a célunk.

Induljunk ki először a sebesség kezdeti feltételéből, miszerint $\dot{u}(x, 0) = 0$:

$$\dot{u}(x, 0) = - \sum_{n=1}^{\infty} U_n \omega_n \sin(\omega_n 0 + \varphi_n) \psi_n(x) = 0, \quad (2.49)$$

ahonnan a $\psi_n(x)$ módusalakok függetlensége miatt a $\varphi_n = 0$ kezdőfázis adódik.

A kezdeti elmozdulás peremfeltétel felírásával folytatjuk a megoldást:

$$\begin{aligned} u_0(x) = u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(\omega_n 0) \psi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n \psi_n(x), \end{aligned} \quad (2.50)$$

ahol már felhasználtuk a $\varphi_n = 0$ eredményt. Az eredmény szerint az U_n együtthatók az $u_0(x)$ kezdeti feltétel modális koordinátái.

Az U_n értékek meghatározása előtt alakítsuk át a (2.48) kifejezést, kihasználva immár a $\varphi_n = 0$ eredményt és a

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{\sin(a-b) + \sin(a+b)}{2} \quad (2.51)$$

trigonometrikus azonosságot:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} U_n (\sin(k_n x - \omega_n t) + \sin(k_n x + \omega_n t)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} U_n (\sin(k_n(x - ct)) + \sin(k_n(x + ct))) \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} U_n \psi_n(x - ct)}_{u_0(x-ct)} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} U_n \psi_n(x + ct)}_{u_0(x+ct)}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Az utolsó sort összehasonlítva (2.50)-nel észrevehetjük, hogy a szummák az $u_0(x)$ kezdeti feltétel eltoltjait írják le:

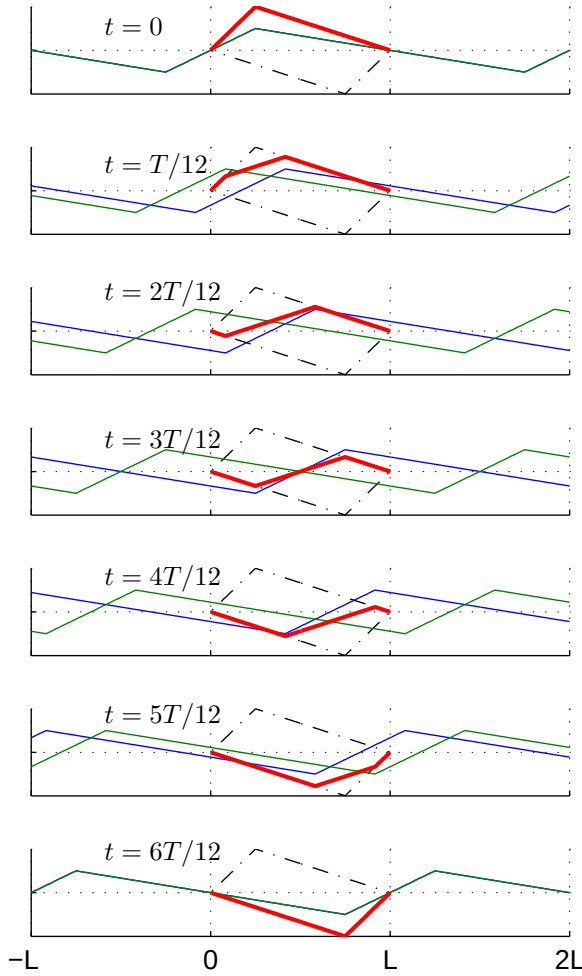
$$u(x, t) = \frac{u_0(x - ct) + u_0(x + ct)}{2}. \quad (2.53)$$

Azt látjuk, hogy a véges hosszúságú húr rezgése a végtelen húrhoz hasonlóan egy c sebességgel jobbra illetve balra haladó rezgésalak szuperpozíciójaként alakul ki, ahol a terjedő rezgésalakok az $u_0(x)/2$ kezdeti elmozdulással egyeznek meg. Figyelnünk kell azonban arra, hogy a (2.53)-ban az $u_0(x)$ függvényt negatív illetve L -nél nagyobb argumentumokkal is ki kell értékelnünk. Mivel $u_0(x)$ -et (2.50)-ben $2L$ -periodikus szinuszos módusok szuperpozíciójaként állítottuk elő, az eredményben $u_0(x)$ -et páratlan, $2L$ -periodikus függvényként kell kiterjesztenünk.

A pengetett $u(x, t)$ rezgésalak pillanatfelvételeit a 2.6. ábrán követhetjük a pengetés időpontjától egy periódus feléig. Figyeljük meg, hogy a húr töréspontja kettéválk, c sebességgel halad a lezárások irányába, majd azokról visszaverődik. A húr rezgésalakja a kezdeti elmozdulás egyenesei által kifeszített paralelogrammán belüli pályát ír le.

A modális koordináták meghatározása

Bár a húr $u(x, t)$ rezgésalakját meghatároztuk az U_n együtthatók ismerete nélkül, mégis érdemes megvizsgálnunk, hogy a húr módusai milyen



2.6. ábra. A pengetett húr $u(x, t)$ alakjának pillanatfelvételei. A kék görbe a pozitív irányban haladó $u_0(x - ct)/2$, a zöld görbe a negatív irányban haladó $u_0(x + ct)/2$ rezgésalakokat mutatja, a piros görbe a kettő összege.

arányban vesznek részt a megoldásban. A (2.50) egyenlet szerint az U_n értékek a kezdeti $u_0(x)$ kitérésfüggvény modális koordinátái, melyek értékét a 2.5. példában megismert módon az alábbi integrál felírásával kaphatjuk meg:

$$U_n = \frac{\langle \psi_n, u_0 \rangle}{\langle \psi_n, \psi_n \rangle} = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin k_n x dx. \quad (2.54)$$

Az integrálás parciális integrálás segítségével elvégezhető, a megoldás

$$U_n = \frac{2L^2}{\pi^2 x_0 (L - x_0)} \frac{1}{n^2} \sin k_n x_0. \quad (2.55)$$

Az eredmény szerint a pengetett húr felharmonikusainak amplitúdóarányait az $1/n^2$ tag határozza meg, vagyis a felharmonikus amplitúdók az n módusszámmal négyzetesen csökkennek. Példaként a negyedik felharmonikus már 24 dB-lel, a tizedik felharmonikus pedig 40 dB-lel gyengébben rezeg az alapharmonikusnál.

A $\sin k_n x_0$ tag a négyzetesen csökkenő burkolót egy harmonikus taggal súlyozza, melynek periódusát a pengetés x_0 -val meghatározott pozíciója befolyásolja.

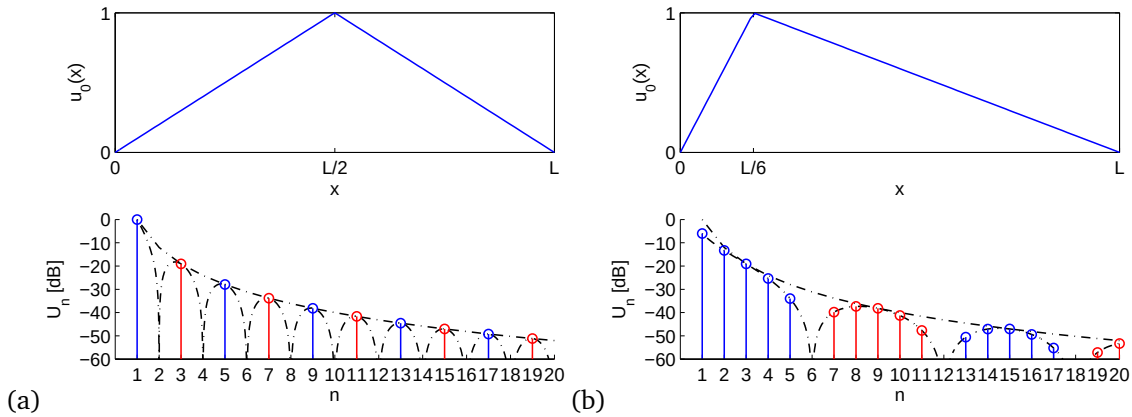
Ha a húr pont a felezőpontban pengetjük, vagyis $x_0 = L/2$, akkor a harmonikus tag $\sin(n\pi/2)$, aminek értéke páros felharmonikusok esetén zérus, a páratlan felharmonikusokra pedig felváltva $+1$ illetve -1 . Tehát a húrban csak az első, harmadik, ötödik stb. felharmonikusok jelennek meg váltakozó előjellel, négyzetesen csökkenő amplitúdóval, ahogy a 2.7(a). ábra mutatja.

Ha a húr a hossz hatodánál ($x_0 = L/6$) pengetjük, akkor a hatodik, tizenkettedik, tizennyolcadik stb. felharmonikusok esnek ki a kezdeti feltételből, és természetesen a válaszból is, ahogy az a 2.7(b). ábrán látható.

Látjuk tehát, hogy a pengetés pozíciója alapvetően befolyásolja a húr rezgésének frekvenciatartalmát, és így természetesen a rezgő húr hangjának színezetét is. Minél közelebb pengetjük a húr a lezáráshoz, annál dúsabb lesz a spektrum nagyfrekvenciás része, ami a megszólaló hang élesedését eredményezi.

A hangszertestre kifejtett erő

A 2.6. ábra alapján határozzuk meg a húr bal oldali végpontja által a befogásra kifejtett erő időfüggését. Ez azért fontos, mert ez az erő gerjeszti a



2.7. ábra. Pengetett húr kezdeti $u_0(x)$ kitérésfüggvénye és annak felharmonikustartalma különböző pengetési pozíciók esetére. A spektrumok esetében a kék vonalak a pozitív, a piros vonalak a negatív értékeket jelölik, a fekete szaggatott vonal az $1/n^2$ -es burkolót mutatja.

hangszertestet, melynek gerjesztett rezgései sugározzák le a hangszer hangját (akusztikus hangszer esetén). Az F erő a húr kitéréséből az

$$F(0, t) = S \sin \phi(0, t) \approx S u'(0, t) \quad (2.56)$$

képlet alapján határozható meg, vagyis a húr kitérésének x szerinti deriváltjával arányos. Az egyszerűség kedvéért jelöljük a húr kezdeti háromszög alakjának $x = 0$ -beli meredekségét a -val, az $x = L$ pozícióbeli meredekséget pedig $-b$ -vel. A két érték pontos meghatározása

$$a = \frac{U_0}{x_0}, \quad b = \frac{U_0}{L - x_0}. \quad (2.57)$$

A $t = 0$ és $t = T/2m$ időpontok között a balra húzódó töréspont még nem éri el az $x = 0$ pozíciót, tehát a húr kezdeti meredeksége a . A $t = T/2m$ pillanatban (mindössze egyetlen pillanatig) a húr kezdeti meredeksége $(a - b)/2$, majd előjelet vált, és egészen a $t = T \cdot (1 - 1/2m)$ időpontig a $-b$ értéken marad. A $t = T \cdot (1 - 1/2m)$ időpillanatban értéke ismét $(a - b)/2$ lesz, majd a periódus végéig a konstans maximális a értéket veszi fel. Az eredményként kapott négyszögjel leírása tehát

$$F(0, t) = \begin{cases} S \frac{m}{L} & -\frac{T}{2m} < t < \frac{T}{2m} \\ S \frac{m(m-2)}{(m-1)L} & t = \pm \frac{T}{2m} \\ S \frac{-m}{(m-1)L} & \frac{T}{2m} < t < T(1 - \frac{1}{2m}) \end{cases} \quad (2.58)$$

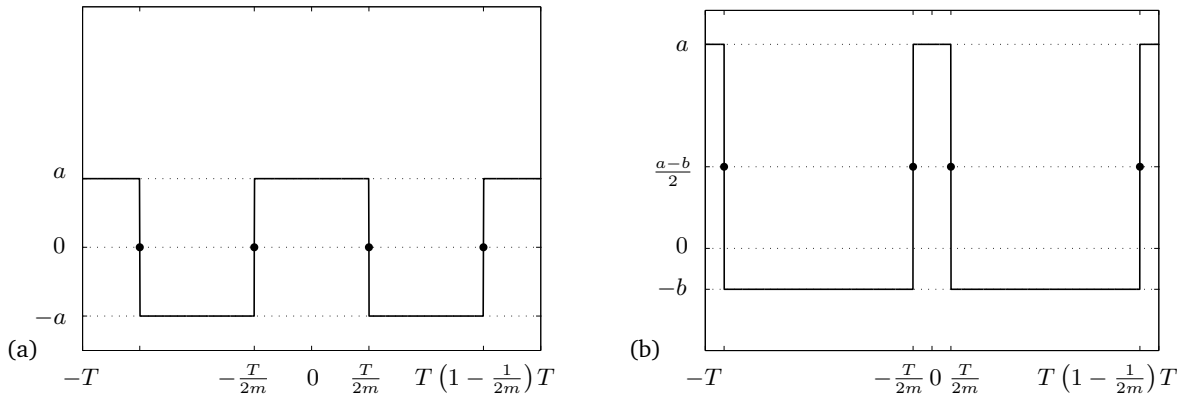
A négyszögjelet a 2.8. ábra mutatja az $m = 2$ és $m = 6$ esetekre. Az $m = 2$ esetben $a = b$, így

a négyszögjel szimmetrikus. Az $m = 6$ esetben a szimmetria megbomlik, és rövid idejű nagy pozitív erőimpulzusokat hosszú idejű gyengébb negatív irányú erőhatások váltanak fel. Figyeljük meg, hogy a négyszögjel teljes periódusa alatti előjeles terület zérus.

A húr egyes pontjainak elmozdulása

Elektromos hangszerek esetében nem a hangszertestre kifejtett erő, hanem sokkal inkább a húr egyes pontjainak elmozdulása bír jelentősebb akusztikai tartalommal. Az elektromos gitár mágneses hangszedője egy tekercselt állandómágnes, melyet közvetlenül a gitár húrja alá helyeznek. A húr mozgása a tekercsen átfolyó mágneses fluxus kicsiny változását eredményezi, ami a tekercsben feszültséget indukál. Az indukált feszültség lesz az elektromos gitár kimenő feszültségjele.

Ha a hangszedőt a gitárhúr egy módusának csomópontja alá helyezzük, akkor az a felharmonikus nem lesz hallható a vett jelben. A többi felharmonikus is annak függvényében csillapítja a hangszedő, hogy mekkora a hozzájuk tartozó módusalak amplitúdója a hangszedő pozíciójában. A hangszedő pozíciójának hatása tehát teljesen analóg a gerjesztés pozíciójának hatásával. Minél közelebb helyezzük el a hangszedőt a húrlábhoz, annál dúsabb lesz a vett hangjel felharmonikustartalma, és annál gyengébben szólalnak meg az alapharmonikushoz közeli sajátfrekvenciák. Egy modern elektromos gi-



2.8. ábra. A pengetett húr vége által a megfogásra kifejtett erő időfüggése különböző pengetési pozíciók esetére – (a) $m = 2$ és (b) $m = 6$

tár 4-5, különböző pozícióban elhelyezett hangszedőt tartalmaz, melyek között a játékos kapcsolóval választhat, illetve azok jeleit tetszés szerint keverheti.

2.7. példa Hangszedő pozíciója

Egy L hosszú elektromosgitár-húrt az x_0 pozícióban pengetünk, és a hangszedő az x_1 pozícióban veszi a húr rezgését. Melyik felharmonikus lesz a legerősebb a vett jelben?

A gerjesztés pozíciója a húr modális koordinátáit befolyásolja az

$$U_n \propto \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{m}\right) = \frac{1}{n^2} \sin k_n x_0$$

képlet szerint. A vételi pozíció hatása a módusalakok x_1 -beli értékével való súlyozás, vagyis a vett jel felharmonikustartalmát az

$$U_n \propto \frac{1}{n^2} \sin k_n x_0 \sin k_n x_1 \quad (2.59)$$

képlet határozza meg.

2.4.4. Ütéssel gerjesztett hurok rezgései

A továbbiakban zenei alkalmazásként megvizsgáljuk az impulzusszerű erővel megütött húr rezgéseit. Ez az alkalmazás nyilvánvalóan a zongora vagy a cimbalom gerjesztési modelljéhez fontos.

A húr gerjesztése egy erőimpulzus lesz, ami az $x = x_0$ pozícióban, koncentráltan hat. Az erőim-

pulzus matematikai leírásához az inhomogén hullámegyenletben definiált $g(x)$ gerjesztő tagot adjuk meg:

$$g(x, t) = F(t)\delta(x - x_0), \quad (2.60)$$

ahol az erő $F(t)$ időfüggése egy Δt szélességű négyszögimpulzus:

$$F(t) = F_0 [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \Delta t)]. \quad (2.61)$$

Impulzusszerű terhelés mint kezdeti sebesség feltétel

A továbbiakban megismerjük, hogy miként írható át a nyugvó húrra ható impulzusszerű erőgerjesztés ekvivalens kezdeti sebesség feltételre. Ez az átírás azért előnyös, mert a kezdetiérték probléma megoldása könnyen elvégezhető a modális szuperpozíció módszerével, míg a gerjesztett válasz meghatározása általában Laplace-transzformáció alkalmazását igényli.

Ha az erőimpulzus elég gyorsan véget ér, akkor az impulzus eltűnéséig az impulzus által gerjesztett rezgések nem érik el a húrlezárasokat, vagyis „az erőimpulzus a húrt végtelennek látja”. A két félvégtelen húr bemenő impedanciája $2\mu c$ (lásd a 2.3.4. fejezetet), aminek értelmében a gerjesztési pont sebessége

$$v(x_0, t) = \frac{F(t)}{2\mu c} = \frac{F_0}{2\mu c} [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \Delta t)]. \quad (2.62)$$

A Δt idő eltelte alatt a húr rezgésállapota c sebességgel terjed mindkét lezárás irányába, így $t = \Delta t$ -ben a húr sebességeloszlása egy x_0 körüli,

$2c\Delta t$ szélességű négyszögfüggvény lesz:

$$v(x, \Delta t) = \frac{F_0}{2\mu c} [\varepsilon(x_0 + c\Delta t) - \varepsilon(x_0 - c\Delta t)], \quad (2.63)$$

ami alatti terület $F_0\Delta t/\mu$. Helyettesítsük ezt a sebességeloszlást egy ekvivalens impulzussal:

$$v(x, \Delta t) = \frac{F_0}{\mu} \Delta t \delta(x - x_0). \quad (2.64)$$

Ez a sebességimpulzus lesz az impulzusszerű erővel ekvivalens kezdeti sebesség feltételünk.

Eredményünket összevetve (2.60)-nal, elmondhatjuk, hogy a $t = 0$ -ban megjelenő, és Δt ideig fennmaradó $g(x)$ terheléssel ekvivalens sebesség kezdeti feltétel általában

$$v(x, 0) = \frac{g(x)}{\mu} \Delta t. \quad (2.65)$$

A válasz spektrális jellemzése

Oldjuk meg tehát az alábbi kezdeti érték feladatot:

$$\begin{aligned} c^2 u''(x, t) &= \ddot{u}(x, t) \\ u(x, 0) &= 0 \\ \dot{u}(x, 0) &= \frac{F_0}{\mu} \Delta t \delta(x - x_0) \end{aligned} \quad (2.66)$$

A választ keressük modális szuperpozícióval. Mivel szabadrezgéseket keresünk, a modális koordináták ω_n frekvenciájú harmonikus függvények lesznek:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} U_m \sin(\omega_m t + \varphi_m) \psi_n(x). \quad (2.67)$$

Az $u(x, 0) = 0$ kezdeti felételből a módusok függetlensége miatt következik, hogy $\varphi_m = 0$. A sebességfeltétel az elmozdulás idő szerinti deriválásával

$$\dot{u}(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} U_m \omega_m \psi_n(x) \quad (2.68)$$

Az U_n együtthatókat az egyenlet ψ_n módusokkal való skaláris szorzásával kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{\langle \psi_n, \dot{u}(x, 0) \rangle}{\omega_n \|\psi_n\|^2} \\ &= \frac{2F_0\Delta t}{L\mu\omega_n} \int_0^L \psi_n(x) \delta(x - x_0) dx \\ &= \frac{2F_0\Delta t}{\pi\mu c} \frac{\psi_n(x_0)}{n} = \frac{2F_0\Delta t}{\pi\mu c} \frac{\sin k_n x_0}{n}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Az eredményből kiolvashatjuk, hogy az erőimpulzussal ütött húrok felharmonikusainak amplitúdói $1/n$ szerint csökkennek, szemben a pengetett húrok esetében fennálló $1/n^2$ -es csökkenéssel. Ez azt jelenti, hogy az ütött húroknak erősebb a nagyfrekvenciás tartalmuk, így élesebben szólnak a pengetett húroknál. A $\sin k_n x_0$ tagból kiolvasható, hogy a gerjesztés pozíciójának hatása ütés esetén is a spektrumvonalak szűrésében nyilvánul meg, pontosan ugyanúgy, mint a pengetett esetben.

A válasz jellemzése az időtartományban

A válasz időtartománybeli jellemzéséhez tegyük fel, hogy az $F(t)$ erőimpulzus Δt szélességét minden határon túl csökkentjük úgy, hogy az impulzus alatti $Q = F_0\Delta t$ területet állandó értéken tartjuk. Ekkor egy

$$F(t) = Q\delta(t) \quad (2.70)$$

ideális erőimpulzust kapunk. A gerjesztés megjelenése utáni kis időintervallumban a gerjesztési pont sebessége

$$v(x_0, t) = \frac{F(t)}{r} = \frac{Q}{2\mu c} \delta(t). \quad (2.71)$$

A sebesség alapján a gerjesztési pont elmozdulása pedig

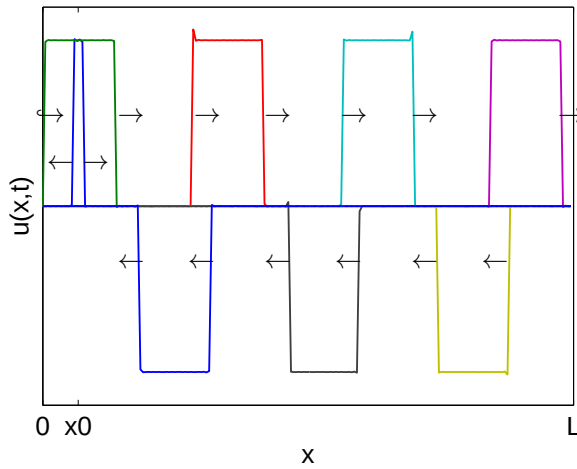
$$u(x_0, t) = \int_0^t v(\tau) d\tau = \frac{Q}{2\mu c} \int_0^t \delta(\tau) d\tau = \frac{Q}{2\mu c} \varepsilon(t). \quad (2.72)$$

Az x_0 pozícióban megjelenő egységugrás elmozdulás nyilván mind a pozitív, mind a negatív x tengely irányába c sebességgel fog terjedni, vagyis kezdetben a húr elmozdulása

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{Q}{2\mu c} \varepsilon(t - \frac{x-x_0}{c}) & x > x_0 \\ \frac{Q}{2\mu c} \varepsilon(t + \frac{x-x_0}{c}) & x < x_0 \end{cases} \quad (2.73)$$

ami egy szélesedő négyszögimpulzust jelöl.

A húrlezárásokról szóló 2.3.2. fejezetben tárgyaltak szerint a befogott húr végződés hatása a húr végződésre középpontosan tükrözött, vagyis ellentétes előjelű ellenimpulzusok szuperpozíciójával vehető figyelembe. Ezért, amint a szélesedő négyszögimpulzus egyik vége eléri a lezárást, az ellenimpulzus kioltja azt, és a négyszögimpulzus ütköző éle mintegy reflektálódik a lezárásról. Ettől a pillanattól egy állandó $2x_0$ szélességű négyszögimpulzus halad a



2.9. ábra. Impulzuszerű erővel gerjesztett húr rezgésalakja egy perióduson keresztül, rögzített időpontokban

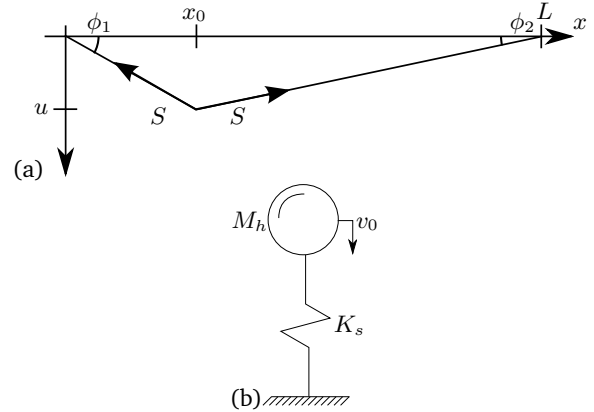
húrban, majd ide-oda verődik a lezárásokról, minden reflexiónál előjelet váltva. A rezgésalak a 2.9. ábrán követhető végig egy perióduson keresztül.

A kalapáccsal ütött húr lezárásán megjelenő erőfüggvény könnyen meghatározható, hiszen az erő az elmozdulás hely szerinti deriváltjával arányos. Valahányszor egy négyszögimpulzus széle eléri a lezárást, ott egy Dirac-delta erőimpulzus jelenik meg. Az egymást követő felfutó és lefutó élek reflexiói ellentétes irányú Dirac-delta erőimpulzusokban nyilvánulnak meg. Míg tehát a pengetett hűrok állandó erővel felváltva húzzák majd nyomják a befogási pontot, addig az ütött hűrok ellentétes irányú, de azonos nagyságú erőimpulzusokkal „kopognak” a hangszertesten.

2.4.5. Kalapács–húr kölcsönhatásmodellek

Eddig csak azzal foglalkoztunk, hogy mi történik a húrral, ha rövid, impulzuszerű erőgerjesztés hat rá. A kalapáccsal ütött hűrok esete ennél lényegesen bonyolultabb: itt a húrt egy zuhanó kalapács mozdtja ki nyugalmi helyzetéből, a kitért húr pedig visszahat a kalapácsra és lassítja azt. A kölcsönhatás időtartama alatt a kalapács és a húr együtt mozog. Mindeközben rezgésimpulzusok indulnak a kalapáccstól a húrlezárásig és verődnek vissza. A lezárásokról visszaverődő rezgésim-

2. FEJEZET. HÚROK REZGÉSEI



2.10. ábra. (a) Koncentrált erő hatására kialakuló statikus húrdeformáció, és (b) az érintkezési pontban érvényes egyszabadságfokú kölcsönhatásmodell

pulzusok a kalapácsról ismét visszaverődnek, ezáltal a kölcsönhatás ideje alatt meglehetősen bonyolult rezgésekép alakul ki a húron.

A továbbiakban lényeges egyszerűsítések mellett vizsgálunk kalapács–húr kölcsönhatásmodelleket, és említés szintjén a valóságot jobban leíró modelleket is bemutatunk.

Nehéz kalapács könnyű húron

A kalapács–húr kölcsönhatásmodellek egyik egyszerű eseteként vizsgáljuk azt a határesetet, mikor a kalapács M_h tömege lényegesen nagyobb az L hosszú húr tömegénél:

$$M_h \gg \mu L. \quad (2.74)$$

Ebben az esetben a húr tömege elhanyagolható, és csak a benne ható S feszítő erő visszatérítő hatását kell figyelembe vennünk.

A húr tömegének elhanyagolása úgy is felfogható, hogy a húron terjedő rezgések $c = \sqrt{S/\mu}$ sebességét végtelennek tekintjük. Ha a húron terjedő rezgések sebessége végtelen, akkor tetszőleges gerjesztés hatására azonnal kialakul a húr állandósult deformációja, vagyis a húr rezgésalakja minden időpillanatban a koncentrált kontakterő hatására kialakuló statikus deformációval közelíthető.

Tekintsük a 2.10(a) ábrát. Az x_0 pozícióban u elmozdulásra kényszerített húr háromszög alakban deformálódik. A deformációt okozó F_{int} erő a húron jelen levő S feszítő erő keresztirányú kompo-

nensével van egyensúlyban, vagyis

$$F_{\text{int}} = S (\sin \phi_1 + \sin \phi_2), \quad (2.75)$$

ahol ϕ_1 és ϕ_2 a húr két egyenes szakaszának elfordulási szögei. Kis elfordulásokra a szinuszok a tangensekkel közelíthetők, vagyis

$$F_{\text{int}} = S (\tan \phi_1 + \tan \phi_2) = S \left(\frac{u}{x_0} + \frac{u}{L - x_0} \right), \quad (2.76)$$

ahonnan látszik, hogy a húr

$$K_s = \frac{F_{\text{int}}}{u} = \frac{S}{x_0 \times (L - x_0)} \quad (2.77)$$

merevségű rugóval modellezhető, ahol $\times$ a replusz műveletet jelöli.

Az egyszerűsített modell a 2.10(b) ábrán látható. Az M_h tömegű kalapács a $t = 0$ időpontban v_0 sebességgel esik a K_s merevségű húrra. Innentől egy egyszerű tömeg-rugó rendszerrel van dolgunk, melyet $u_0 = 0$ kezdő pozícióból v_0 kezdő sebességgel hozunk rezgésbe. A tömeg elmozdulásának időfüggvénye egy szinuszgörbe fél periódusát járja be, majd a tömeg $-v_0$ sebességgel elhagyja a húrt. A kontaktus T időtartama a tömeg-rugó rendszer sajátrezgésének fél periódusideje, vagyis

$$T = \frac{\pi}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K_s}{M_h}} \quad (2.78)$$

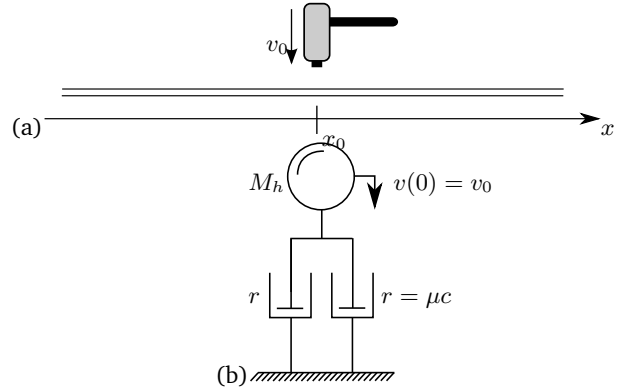
Könnyen meghatározható a húr kontaktpontjának maximális elmozdulása is. A v_0 maximális sebességű, ω_0 körfrekvenciájú harmonikus rezgés kitérésének maximuma v_0/ω_0 .

A kontakterő időfüggése pedig egy fél szinusz impulzus

$$F_{\text{int}}(t) = \begin{cases} \frac{K_s v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) & 0 < t < \frac{\pi}{\omega_0} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (2.79)$$

Könnyű kalapács nehéz húron

Második szélsőséges esetként vizsgáljuk azt, mikor a húr nehéz, vagyis a benne haladó rezgések sebessége nagyon kicsi. Ebben az esetben a rezgések nagyon sokára reflektálódnak a húrlezárásokról, vagyis a húr határesetben végtelenül hosszú-nak tekinthető. A félvégtelen húr konstans $r = \mu c$ bemenő impedanciával modellezhető, vagyis



2.11. ábra. Végtelen húrra ható kalapácsgerjesztés és a vele ekvivalens egyszabadságfokú rendszer

is a végtelen húr kölcsönhatás szempontjából releváns modellje egy $2r = 2\mu c$ mechanikai impedanciára v_0 kezdősebességgel ejtett M_h tömeg, ahogy az a 2.11(b) ábrán is látható.

A vizsgált kezdetiérték-probléma:

$$-2rv(t) = M_h \dot{v}(t) \quad (2.80)$$

$$v(0) = v_0, \quad (2.81)$$

aminek megoldása

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}, \quad t > 0, \quad (2.82)$$

ahol az időállandó

$$\tau = \frac{M_h}{2r}. \quad (2.83)$$

A húr érintkezési pontjának kitérése

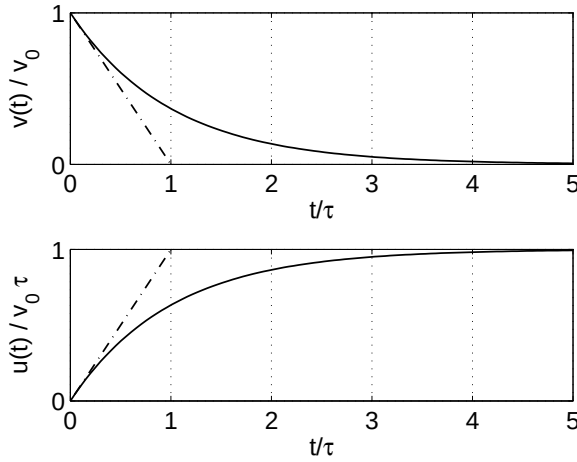
$$u(t) = u(x_0, t) = \int_{\hat{t}=0}^t v(\hat{t}) d\hat{t} \quad (2.84)$$

$$= v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}). \quad (2.85)$$

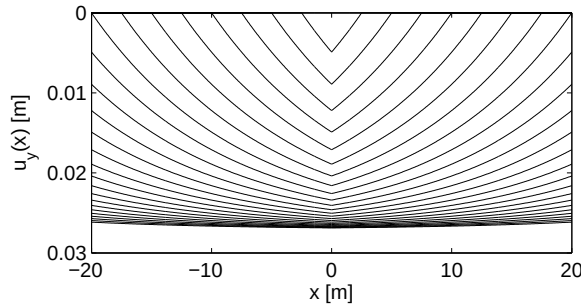
A $v(t)$ és $u(t)$ függvényeket a 2.12. ábra mutatja. A közelítőleg végtelen hosszú húrból az érintkezési pont $u(t)$ elmozdulásalakja c sebességgel halad végig a húron, vagyis a húr tetszőleges pontja elmozdulásának időfüggvénye

$$u(x, t) = u(t - |x - x_0|/c). \quad (2.86)$$

A kialakuló elmozdulás pillanatfelvételeit a 2.13. ábra mutatja az $x_0 = 0$ gerjesztési



2.12. ábra. Végtelen húrra eső kalapács sebességnek (fent) és elmozdulásának (lent) időfüggvénye



2.13. ábra. Végtelen húrra eső koncentrált tömeg által ébresztett elmozdulás rezgésalak pillanatfelvételei

pozíció esetére. Látható, hogy a pontszerű kalapács által a húrra kifejtett térben koncentrált erő töréspontos rezgésalakot eredményez. A valódi kalapácsok véges kiterjedésűek, így a húrokban törés természetesen nem alakul ki. Az ábrán mutatott rezgésalakok valódi véges húrokban addig a pontig érvényesek, amíg a húrvegről reflektált rezgésalakok vissza nem érnek a megfigyelési pontba.



2.14. ábra. Különböző hangmagasság-tartományokban használt zongorakalapácsok (www.heckscher.co.uk)

2.4.6. A zongorahúr gerjesztésének modellezése

A fent tárgyalt, analitikusan kezelhető kölcsönhatásmodellek természetesen igen egyszerűek, és a valós kölcsönhatás leírásának csak néhány aspektusát képesek bemutatni. Az alábbiakban a zongorakalapácsok mechanikai kialakítását és modellezési lehetőségeit ismertetjük.

A zongorakalapács egy keményfa magból és az azt körülvevő több rétegű filc bevonatból áll (lásd a 2.14. ábrát). Zongoránál alulról, pianínónál oldalról üti meg a húrokat. A kalapácsok M_h tömege a basszushúroknál 11 g körüli érték, a magas hangok tartományáig 3 g-ig csökken. A tömeg csökkentésével a kölcsönhatás idejét csökkenteni lehet (lásd a (2.78) összefüggést). Ez azért fontos, mert ideális esetben a kontaktidő a szabadon rezgő húr fél periódusidejével egyezik meg.

A kalapács bevonata korábban pergamenből készült, de a 19. század óta többrétegű filc bevonatot alkalmaznak. A filc vastagsága (vagyis keménysége) is változik a különböző magasságú húrok között, mert pusztán a kalapács tömeg változtatásával az ideális kontaktidőtartam nem valósítható meg. Az igényes kialakítású hangszereken a kalapácsok filcbevonatát kalapácsként külön „hangolják”, vagyis merevségét utólag igazítják a kívánt hangmagassághoz.

A kalapácsfilcet is figyelembe vevő egyszerűsített kölcsönhatásmodell esetén a kalapácsmag modellje az előbbiekhöz hasonlóan koncentrált tömegpont, a modell kritikus pontja a filc karakterisztikájának leírása.

A legegyszerűbb modellek lineáris filckarakter-

risztikát alkalmaznak, melyben a filcre ható F_f erő arányos a filc u_f összenyomódásával:

$$F_f = K_f u_f, \quad (2.87)$$

ahol K_f a filc merevsége.

A valós filcmérések azt igazolják, hogy a filckarakterisztika nemlineáris, vagyis a nyomóerő a filc-összenyomódás p -edik hatványával arányos:

$$F_f = K_f u_f^p, \quad (2.88)$$

ahol a p kitevő értéke tipikusan 2 és 5 között mozog. Az egynél nagyobb kitevő arra utal, hogy összenyomásra a filc keményedik.¹ Ebben az esetben az arányossági tényező természetesen N/m^p dimenziójú. A valódi filmek további fontos tulajdonsága a hiszterézises viselkedés. Ez alatt azt kell érteni, hogy ha a filcet $F_{\max}$ erőig összenyomjuk, majd a nyomóerőt megszüntetjük, akkor a filc nem nyeri vissza kezdeti vastagságát. A hiszterézist úgy is felfoghatjuk, hogy a filc aktuális összenyomódását nemcsak a nyomóerő, hanem a filc előélete is befolyásolja. Tipikus hiszterézismodellek ezt a tulajdonságot egy τ_0 időállandóig visszaemlékező modellel valószínűsítik meg, melyben az aktuális összenyomódás mellett figyelembe vesszük az elmúlt τ_0 idő alatt mért összenyomódás átlagát is:

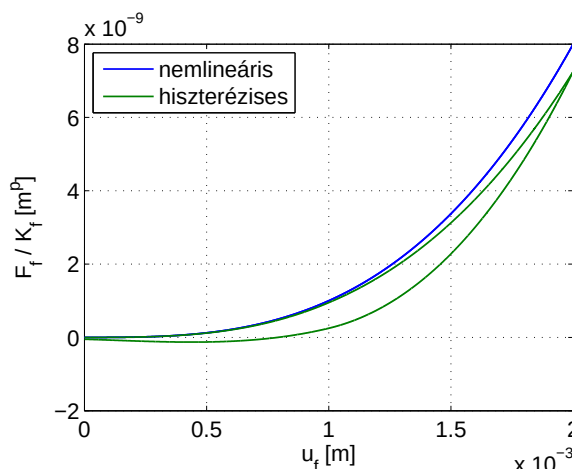
$$F_f(t) = K_f \left[u_f^p(t) - \frac{\epsilon}{\tau_0} \int_{t-\tau_0}^t u_f^p(\hat{t}) d\hat{t} \right] \quad (2.89)$$

A 2.15. ábra egy nemlineáris és egy hiszterézises filckarakterisztikát ábrázol. A nemlinearitást a $p = 3$ érték jellemzi, míg a hiszterézis paraméterei $\tau_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ s és $\epsilon = 0.2$. A hiszteréziskarakterisztika érdekessége, hogy az elengedési szakaszban a nyomóerő negatívvá válik, vagyis a filcet összenyomás után ki kell húzni a kezdeti filcvastagság visszaállításához.

2.5. Csillapított rezgések húrokban

Mindeddig csillapítatlan húrokkal foglalkoztunk, melyekben a pengetéssel életre keltett rezgések az idők végezetéig fennmarad. A valódi húrok természetesen csillapítottak.

¹ Adott u_f összenyomódás esetén a filc lokális merevségét a $dF_f/du_f = pK_f u_f^{p-1}$, összenyomódásra monoton növekvő derivált adja meg.



2.15. ábra. Nemlineáris és hiszterézises filckarakterisztikák $p = 3$, $\tau_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ s és $\epsilon = 0.2$ esetre. A hiszterézises karakterisztikán a felső görberész az összenyomódási, az alsó az elengedési szakasz.

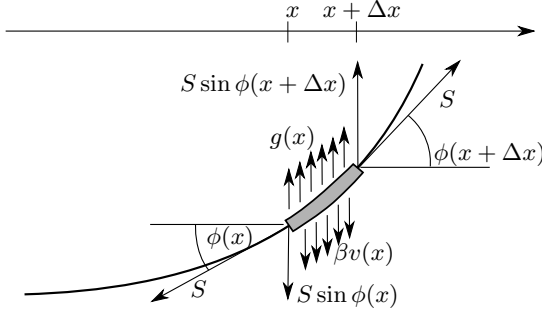
2.5.1. A csillapítás forrásai

Viszkózus csillapítás

A legjelentősebb csillapítási forma a levegővel való kölcsönhatás. Mikor a húr egy darabkája halad, a húrdarabka előtti légrészben nyomásnövekedés, a húrdarabka mögött pedig nyomáscsökkenés jön létre. A levegő áramolni kezd a nagyobb nyomású térrészből a kisebb nyomású felé, és áramlás közben sűrűlódik a húr anyagával. A sűrűlódás következtében a húr mozgási energiája részben hővé alakul. A viszkózus sűrűlódásnak egyszerű fizikai leírása a húr sebességével arányos visszatérítő erő. A Δx hosszú húrra ható visszatérítő erő $\Delta F = -\beta v \Delta x$, ahol β a viszkózus csillapítási állandó. Kis frekvencián a β állandó frekvenciafüggetlennek tekinthető.

2.5.2. A csillapított húr mozgásegyenlete

Tekintsük ismét a húr Δx hosszú darabját, melyre a viszkózus csillapításból származó, sebességgel arányos erő hat, ahogy a 2.16. ábra mutatja. A húr-

2.16. ábra. A húr Δx hosszúságú darabja

darabra felírható Newton-törvény alakja

$$g(x)\Delta x - \beta v(x)\Delta x + S[\sin \phi(x + \Delta x) - \sin \phi(x)] = \mu \Delta x a(x). \quad (2.90)$$

A Δx hosszelemmel végigosztva és a határátmenetet elvégezve az alábbi csillapított húregyenletet kapjuk:

$$g(x, t) - \beta \ddot{u}(x, t) + Su''(x, t) = \mu \ddot{u}(x, t). \quad (2.91)$$

A csillapítatlan (2.5) húregyenlethez képest egyetlen változás a sebességfüggő tag megjelenése.

2.5.3. Véges hosszú csillapított húr szabadrezgése

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy milyen szabadrezgést végez egy magárahagyott csillapított húr. Ehhez a homogén csillapított húregyenletet vizsgáljuk:

$$\mu \ddot{u}(x, t) + \beta \dot{u}(x, t) - Su''(x, t) = 0. \quad (2.92)$$

A szabadrezgéseket a modális szuperpozíció elvével keressük meg, vagyis az $u(x, t)$ megoldást a 2.3. ábrán mutatott módusalakok szuperpozíciójaként írjuk fel:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \psi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \sin k_n x \quad (2.93)$$

Helyettesítsük be (2.93)-at (2.92)-be, eredményként az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\mu \ddot{\alpha}_n(t) + \beta \dot{\alpha}_n(t) + Sk_n^2 \alpha_n(t)] \psi_n(x) = 0 \quad (2.94)$$

A $\psi_n(x)$ módusalakok lineáris függetlensége miatt az összeg csak úgy lehet nulla, ha a zárójelen belüli tag minden n értékre külön-külön zérus. Ezt a feltételt felírva – és (μ -vel végigosztva) –

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_n(t) + \frac{\beta}{\mu} \dot{\alpha}_n(t) + \frac{S}{\mu} k_n^2 \alpha_n(t) &= \\ \ddot{\alpha}_n(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{\alpha}_n(t) + \omega_n^2 \alpha_n(t) &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.95)$$

ahol bevezettük a

$$\xi_n = \frac{\beta}{2\mu\omega_n} \quad (2.96)$$

csillapítási tényezőket, valamint kihasználtuk a sajátfrekvenciák és hullámszámok közti $\omega_n = k_n c$ összefüggést.

A (2.95) egyenlettel már találkoztunk a csillapított tömeg-rugó rendszer esetében is, az összefüggés a csillapított tömeg-rugó rendszer szabadrezgését adja meg. Az egyenlet megoldása a korábbi eredmények felhasználásával

$$\alpha_n(t) = e^{-t/\tau_n} (A_n \cos \omega_n^* t + B_n \sin \omega_n^* t), \quad (2.97)$$

ahol $\omega_n^* = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$ az n -edik módus csillapított sajátfrekvenciája, $\tau_n = 1/\xi_n \omega_n$ pedig az n -edik módus időállandója. Az eredmény szerint a csillapított húr szabadrezgése során a módusok exponenciálisan csillapodó harmonikus időfüggéssel rezegnek. Az exponenciális tag időállandója a húr paramétereiből közvetlenül is kifejezhető

$$\tau_n = \frac{1}{\xi_n \omega_n} = \frac{2\mu}{\beta} \quad (2.98)$$

alakban. Látszik, hogy az időállandó nem függ a módusszámtól, vagyis viszkózus csillapítás esetén minden módus azonos időállandóval csillapodik. A továbbiakban el is tekintünk az időállandó indexelésétől.

2.8. példa Viszkózus csillapítás és időállandó kapcsolata

Adjunk becslést egy 2 g/m tömegű gitárhúr viszkózus csillapítására, ha tudjuk, hogy a húr rezgésintje öt másodperc alatt csökken negyven decibelt.

A megadott információk alapján meghatározhatjuk a húr τ időállandóját, tudjuk ugyanis, hogy az exponenciális csillapodást leíró $e^{-t/\tau}$ tag $t_0 = 5$ s

alatt 40 dB-t csillapodik, ami 100-szoros amplitúdócsillapodásnak felel meg:

$$e^{-t_0/\tau} = \frac{1}{100},$$

ahonnan

$$\tau = \frac{t_0}{\ln 100} = 1,08 \text{ s}.$$

A (2.98) egyenletből kifejezhetjük a β viszkozus csillapítást:

$$\beta = \frac{2\mu}{\tau} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}}{1,08 \text{ s}} \approx 3,7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}.$$

2.9. példa Viszkózus csillapítás hatása a sajátfrekvenciákra

Vizsgáljuk meg, hogy hallható hangmagasságcsökkenést eredményez-e a viszkozus csillapítás a 2.8. példa gitárhúrja esetében, ha a csillapítatlan húr alapharmonikusának sajátfrekvenciája 100 Hz.

Mivel a hallható hangmagasság-eltérésekre vagyunk kíváncsiak, a viszkozus csillapítás hatását centben fogjuk kifejezni. A csillapított és csillapítatlan sajátfrekvenciák eltérése centben

$$1200 \log_2 \frac{\omega_n^*}{\omega_n} = 1200 \log_2 \frac{\omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}}{\omega_n} = 600 \log_2 (1 - \xi_n^2).$$

Vizsgáljuk meg a ξ_n értékek nagyságrendjét!

$$\xi_n = \frac{1}{\tau \omega_n} = \frac{1}{n \cdot 2\pi \cdot 1,08 \cdot 100} = \frac{1,47 \cdot 10^{-3}}{n}$$

Látjuk tehát, hogy a ξ_n értékek az ezrelékes nagyságrendtől indulnak, és a módusszámmal fordítottan arányosan csökkennek. A kis ξ_n értékekből kiindulva a $600 \log_2 (1 - \xi_n^2)$ mennyiség számításához nyugodtan használhatjuk a $\log_2 (1 + x)$ függvény elsőfokú Taylor-polinomját

$$\log_2 (1 + x) \approx 0 + \frac{x}{\ln 2},$$

ahonnan

$$600 \log_2 (1 - \xi_n^2) \approx -600 \frac{\xi_n^2}{\ln 2} = \frac{-1,88 \cdot 10^{-3}}{n^2} \text{ cent}$$

Az eredmény még az $n = 1$ esetben is elképesztően kicsi, ezredcentes, hallhatatlan hangmagasságváltozást mutat, és a módusszám növekedésével drasztikusan csökken tovább. Elmondhatjuk tehát, hogy hangszerhúrok tipikus rezgései esetében a viszkozus csillapítás hangmagasság-csökkentő hatása teljességgel elhanyagolható.

2.5.4. Pengetett csillapított húr

Alkalmazzuk a (2.97) megoldást ismét az $u_0(x)$ háromszögfüggvény alakban előfeszített és zérus kezdősebességről magárahagyott húr szabadrezgéseinek vizsgálatához!

A kezdeti elmozdulásfeltétel szerint

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(0) \psi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x, \quad (2.99)$$

vagyis az A_n együtthatók – a csillapítatlan esettel megegyező módon – az $u_0(x)$ háromszögfüggvény (2.55)-ben már bevezetett modális koordinátái.

Folytassuk a megoldást a kezdeti zérus sebességfeltétel felírásával:

$$0 = \dot{u}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\alpha}_n(0) \psi_n(x). \quad (2.100)$$

A (2.97) idő szerinti deriváltjából $\dot{\alpha}_n(0)$ -t kifejezve:

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-A_n}{\tau} + B_n \omega_n^* \right) \psi_n(x), \quad (2.101)$$

vagyis – a módusalakok lineáris függetlenségét ismét kihasználva –

$$B_n = \frac{A_n}{\omega_n^* \tau} = A_n \frac{\xi_n}{\sqrt{1 - \xi_n^2}}. \quad (2.102)$$

A teljes megoldásfüggvény ezek szerint

$$u(x, t) = e^{-t/\tau} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \times \left(\cos \omega_n^* t + \frac{\xi_n}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \sin \omega_n^* t \right) \sin k_n x. \quad (2.103)$$

A 2.9. példa eredményei alapján az eredményként kapott kifejezést jelentősen egyszerűsíthetjük. Kihasználhatjuk ugyanis, hogy $\omega_n^* \approx \omega_n$, illetve $\xi_n \approx 0$, ami alapján az egyszerűbb

$$u(x, t) \approx e^{-t/\tau} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \omega_n t \sin k_n x \quad (2.104)$$

kifejezést használhatjuk. A (2.99) kifejezés és a (2.51) trigonometrikus azonosság alapján eredményünk ismét felírható

$$u(x, t) \approx e^{-t/\tau} \frac{u_0(x - ct) + u_0(x + ct)}{2} \quad (2.105)$$

alakban is, vagyis a csillapítatlan esethez képest egyetlen lényeges eltérés az exponenciálisan csökkenő szorzó a válaszfüggvényben.

2.5.5. Ütéssel gerjesztett csillapított húr rezgései

A továbbiakban ismét megvizsgáljuk az impulzuszerű erővel megütött húr rezgéseit, de most az általános leírásmód kedvéért a csillapított húr esetét vizsgáljuk, melynek mozgásegyenlete

$$\mu \ddot{u}(x, t) + \beta \dot{u}(x, t) + S u''(x, t) = g(x, t). \quad (2.106)$$

A $g(x, t)$ erőgerjesztés legyen mind térben, mind időben koncentrált impulzus, mely a $t = 0$ időpontban és az $x = x_0$ pozícióban hat. Az impulzus matematikai alakja

$$g(x, t) = Q \delta(x - x_0) \delta(t), \quad (2.107)$$

ahol Q az impulzus erőssége, $\delta(x)$ pedig a Dirac-delta függvényt jelöli. Ez a függvény $x = 0$ -ban végtelen értéket vesz fel, mindenhol máshol zérus, és teljesül rá a kiválasztási tulajdonság, miszerint

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) g(x) dx = g(x_0). \quad (2.108)$$

A kiválasztási tulajdonságból következik, hogy a $\delta(x)$ függvény dimenziója $1/m$, illetve $\delta(t)$ dimenziója $1/s$. Mivel a húrra ható $g(x, t)$ erőgerjesztést N/m dimenzióban kell megadnunk, az Q gerjesztő mennyiség dimenziója Ns . A Q mennyiség egy igen rövid, konstans erejű erőimpulzus alatti terület nagyságaként képzelhető el.

A megoldáshoz ismét a (2.93)-ban bevezetett modális szuperpozíciót alkalmazzuk:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \psi_n(x). \quad (2.109)$$

A szuperpozíciót a húregyenletbe helyettesítve és μ -vel osztva

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{\alpha}_n(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{\alpha}_n(t) + \omega_n^2 \alpha_n(t)] \psi_n(x) = \frac{g(x, t)}{\mu}. \quad (2.110)$$

A továbbiakban Laplace-transzformációval átterünk az időtartományból a komplex frekvenciatartományba. Kihasználjuk, hogy a Laplace-transzformáció az idő szerinti deriválást s -sel való szorzásba viszi át (most nem foglalkozunk a kezdeti értékekkel, mivel azok zérusok), az alábbi Laplace-transzformált egyenlethez jutunk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (s^2 + 2\xi_n \omega_n s + \omega_n^2) A_n(s) \psi_n(x) = \frac{G(x, s)}{\mu}, \quad (2.111)$$

ahol

$$G(x, s) = Q \delta(x - x_0) \quad (2.112)$$

a $g(x, t)$ függvény Laplace-transzformáltja, $A_n(s)$ pedig az $\alpha_n(t)$ függvény Laplace-transzformáltja.

Olyan kifejezéshez jutottunk, melynek bal oldala egy időfüggetlen modális szuperpozíció. A módusalakok ortogonalitása miatt felírhatjuk, hogy

$$(s^2 + 2\xi_n \omega_n s + \omega_n^2) A_n(s) = \frac{\langle \psi_n, G \rangle}{\mu \langle \psi_n, \psi_n \rangle} = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{Q}{\mu} \delta(x - x_0) \sin k_n x dx. \quad (2.113)$$

Az integrálás könnyen elvégezhető, kihasználva a Dirac-delta kiválasztási tulajdonságát:

$$(s^2 + 2\xi_n \omega_n s + \omega_n^2) A_n(s) = \frac{2Q}{\mu L} \sin k_n x_0, \quad (2.114)$$

ahonnan a megoldásunk a komplex frekvenciatartományban

$$A_n(s) = \frac{2Q}{\mu L} \frac{\sin k_n x_0}{s^2 + 2\xi_n \omega_n s + \omega_n^2}. \quad (2.115)$$

Az $\alpha_n(t)$ időfüggő tagokat $A_n(s)$ inverz Laplace-transzformációjával²kapjuk meg.

$$\alpha_n(t) = \frac{2Q}{\mu L} \sin k_n x_0 e^{-t/\tau} \frac{\sin \omega_n^* t}{\omega_n^*} \quad (2.121)$$

A húr rezgését leíró teljes kifejezés végül

$$u(x, t) = \frac{2Q}{\mu L} e^{-t/\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x_0 \frac{\sin \omega_n^* t}{\omega_n^*} \sin k_n x, \quad (2.122)$$

de a csillapítás frekvenciacsökkentő hatását elhanyagolva, és az $\omega_n^* = \omega_n = n\pi c/L$ kifejezést bevezetve használhatjuk az alábbi egyszerűbb formulát:

$$u(x, t) = \frac{2Q}{\pi \mu c} e^{-t/\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin k_n x_0 \sin \omega_n t \sin k_n x. \quad (2.123)$$

A megoldás első konstans tagja az erőimpulzus erősségének és a húr μc impedanciájának hányadosa. A második, időfüggő tag az elmozdulás exponenciális csillapodását írja le. A végtelen sorban ismét találkozunk a $\sin k_n x_0$ taggal, ami a felharmonikusok közül „szelektál” a gerjesztés pozíciójának függvényében, a pengetett húr esetével teljesen megegyező módon. Jelen esetben a felharmonikusok amplitúdója $1/n$ szerint csökken.

²Feladatunk az

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \right\} \quad (2.116)$$

inverz Laplace-transzformáció meghatározása. A számítást a részlettörtekre bontás módszerével végezzük. A nevező gyökei komplex konjugált párt alkotnak:

$$s_0 = -\xi\omega + j\omega_d, \quad s_0^* = -\xi\omega - j\omega_d. \quad (2.117)$$

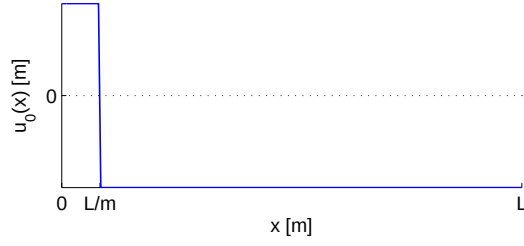
A részlettörtekre bontás folyamata:

$$\frac{1}{(s - s_0)(s - s_0^*)} = \frac{1}{2j\omega_d} \left(\frac{1}{s - s_0} - \frac{1}{s - s_0^*} \right). \quad (2.118)$$

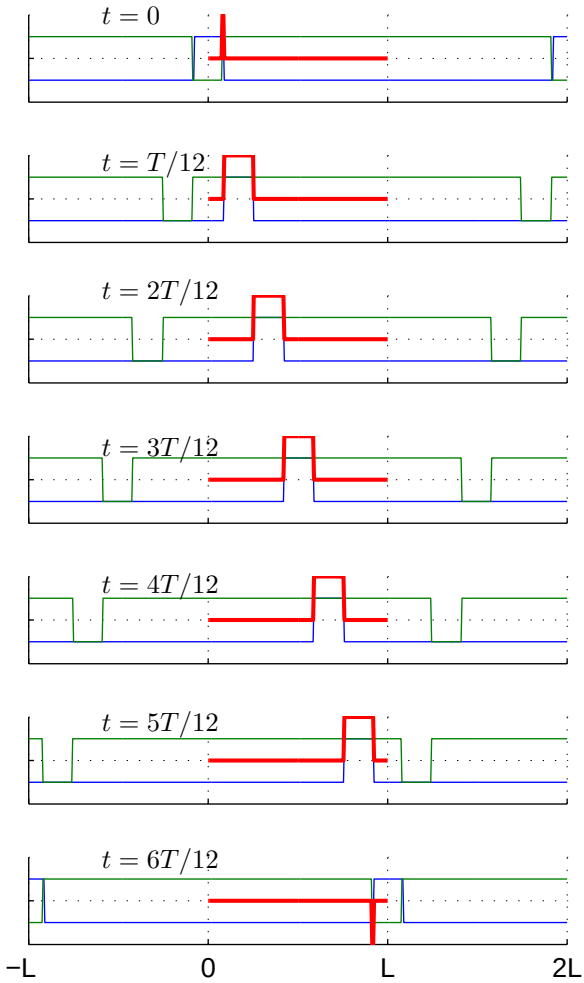
Tekintve, hogy

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - s_0} \right\} = e^{s_0 t} \varepsilon(t), \quad (2.119)$$

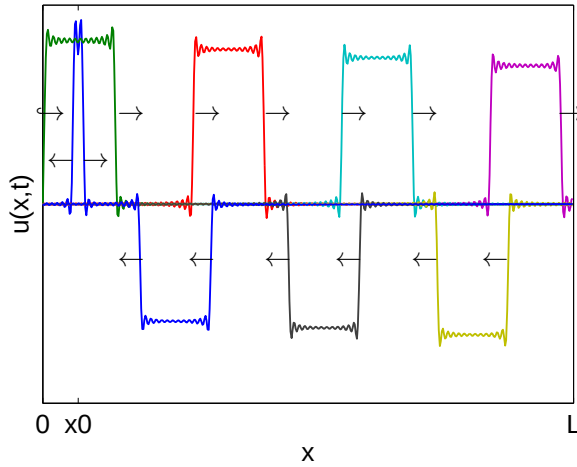
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2j\omega_d} \left(\frac{1}{s - s_0} - \frac{1}{s - s_0^*} \right) \right\} \\ = \frac{1}{2j\omega_d} (e^{s_0 t} - e^{s_0^* t}) \varepsilon(t) \\ = e^{-\xi\omega t} \left(\frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{2j\omega_d} \right) \varepsilon(t) \\ = e^{-\xi\omega t} \frac{\sin \omega_d t}{\omega_d} \varepsilon(t). \end{aligned} \quad (2.120)$$



2.17. ábra. A megütött húr kezdeti $u_0(x)$ elmozdulását leíró négyszögfüggvény.



2.18. ábra. A megütött húr $u(x, t)$ alakjának pillanatfelvételei. A kék görbe a pozitív irányban haladó $u_0(x - ct)/2$, a zöld görbe a negatív irányban haladó $-u_0(x + ct)/2$ rezgésalakokat mutatja, a piros görbe a kettő összege.



2.19. ábra. Impulzusszerű erővel gerjesztett húr rezgésalakja egy perióduson keresztül, rögzített időpontokban

A rezgés időfüggvényének felírásához érdemes ismét trigonometrikus átalakítást végeznünk. Felhasználva a

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} \quad (2.124)$$

azonosságot

$$u(x, t) = \frac{Q}{2\mu c} e^{-t/\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin k_n x_0 \times \frac{\cos k_n(x-ct) - \cos k_n(x+ct)}{2}. \quad (2.125)$$

A szummában szereplő $\frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{m}\right)$ tag nevezetes, ez ugyanis a 2.17. ábrán látható négyszögjel csupa koszinuszos tagot tartalmazó Fourier-sora. Ennek alapján felírhatjuk, hogy a megütött húr elmozdulása

$$u(x, t) = e^{-t/\tau} \frac{u_0(x-ct) - u_0(x+ct)}{2}, \quad (2.126)$$

ahol u_0 az $Q/2\mu c$ amplitúdójú, periodikus, páros négyszögjel, ami az L/m pozícióban vált előjelet.

A szuperponált jelelakot a 2.18-2.19. ábrák mutatják. Felismerhetjük, hogy ugyanazt a megoldást kaptuk, mint a csillapításmentes esetben, az egyetlen lényeges eltérés a csillapított időfüggés.

2.6. Nemideális húrlezárások

Eddig mindig olyan tökéletes lezárási esetekkel foglalkoztunk, mikor a húr végét vagy szabadon hagyjuk, vagy teljesen mereven lefogjuk. Vizsgáljuk meg, mi történik azzal a húrral, melynek végét koncentrált tömeggel vagy rugóval zárjuk le.

Induljunk ki abból, hogy a húr bal oldali ($x = 0$) lezárása tökéletesen merev, vagyis $u(0, t) = 0$. Ekkor a húr harmonikus rezgését leíró egyenlet

$$u(x, t) = U \sin(kx) \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.127)$$

2.6.1. Lezárás koncentrált rugóval

Tekintsük először azt az esetet, mikor a húr lezárása K merevségű koncentrált rugó. Ekkor a lezárás egyenlete

$$\frac{F(L, t)}{u(L, t)} = \frac{-Su'(L, t)}{u(L, t)} = \frac{-Sk \cos(kL)}{\sin(kL)} = K. \quad (2.128)$$

Vezessük be a $K_0 = S/L$ mennyiséget, ekkor egyenletünk a

$$-\frac{K_0}{K} kL = \tan(kL) \quad (2.129)$$

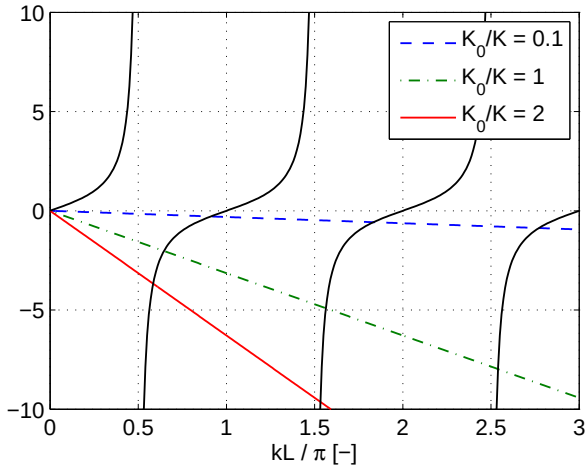
alakra egyszerűsödik. A grafikus megoldást a 2.20. ábra mutatja. Amennyiben a lezáró merevség végtelen, ismét visszakapjuk a $kL = n\pi$ metszéspontokat, vagyis az ideális húr sajátfrekvenciáit. Ha a merevség értékét csökkentjük, de nagy véges értéken tartjuk, akkor a metszéspontok lefelé tolódnak, vagyis a véges merevséggel lezárt húr sajátfrekvenciái kicsit alacsonyabbak az ideális esethez tartozó értékeknél. A lefelé tolódás mértéke kezdetben igen gyors, és az n módusszám növekedésével egyre jelentősebb. Ha a merevség lényegesen kisebb a K_0 értéknél, a szabadon hagyott húrlezárás esetét kapjuk vissza.

Ha a K_0/K érték elegendően kicsi, avagy a rugalmas lezárás elegendően kemény, akkor a grafikus megoldás helyett használhatjuk a $\tan x$ függvény elsőfokú Taylor-sorát:

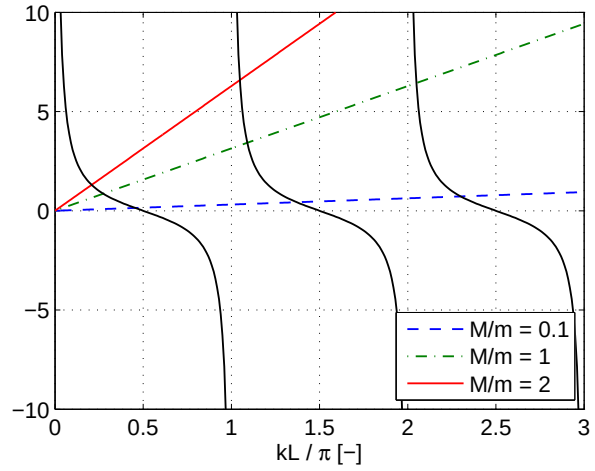
$$\tan x \approx x - n\pi, \quad (2.130)$$

ami szerint (2.129) átírható az alábbi alakra:

$$-\frac{K_0}{K} kL = kL - n\pi. \quad (2.131)$$



2.20. ábra. A (2.129) egyenlet grafikus megoldása



2.21. ábra. A (2.136) egyenlet grafikus megoldása

Átrendezve:

$$kL \left(1 + \frac{K_0}{K} \right) = n\pi. \quad (2.132)$$

Látjuk, hogy a nemideális rugalmas húrlezárás a húr hosszának növekedéseként is felfogható, ahol a növekmény $\Delta L = LK_0/K$.

2.6.2. Lezárás koncentrált tömeggel

Legyen második esetben a lezárás koncentrált tömeg, vagyis a lezárás egyenlete:

$$\frac{F(L, t)}{a(L, t)} = M, \quad (2.133)$$

ahol $a(x, t)$ a húr gyorsulásának hely- és időfüggése. Az erő és a gyorsulás kifejezésével

$$\frac{F(L, t)}{a(L, t)} = \frac{-Su'(L, t)}{\ddot{u}(L, t)} = \frac{-Sk \cos(kL)}{-\omega^2 \sin(kL)} = M, \quad (2.134)$$

ahonnan

$$\cot(kL) = \frac{\omega^2 M}{kS}. \quad (2.135)$$

Kihasználva, hogy $\omega^2 = (kc)^2 = k^2 S/\mu$,

$$\cot(kL) = \frac{M}{m} kL, \quad (2.136)$$

ahol $m = \mu L$ a húr tömege. A transzcendens egyenletet grafikusan tudjuk megoldani, ahogy azt

a 2.21. ábra mutatja. Az ábrán a megoldás különböző tömegarányokra látható. Amennyiben a lezáró tömeg végtelen, visszakapjuk az ideális merev lezárás esetét. Ekkor a metszéspontok a $kL = n\pi$ értékeken vannak, amik a mindkét végén lezárt húr sajátfrekvenciáit definiálják. Ha a lezárás tömege elenyésző a húréhoz képest, akkor a szabad lezáráshoz tartozó $kL = (2n+1)\pi$ metszéspontokat kapjuk vissza.

Ha az M/m hányados elegendően kicsi, avagy a lezáró tömeg elegendően kis érték, akkor a grafikus megoldás helyett használhatjuk a $\cot x$ függvény elsőfokú Taylor-sorát:

$$\cot x \approx \frac{(2n+1)\pi}{2} - x, \quad (2.137)$$

ami szerint (2.136) átírható az alábbi alakra:

$$\frac{(2n+1)\pi}{2} - kL = \frac{M}{m} kL, \quad (2.138)$$

ami átrendezve

$$kL \left(1 + \frac{M}{m} \right) = \frac{(2n+1)\pi}{2}. \quad (2.139)$$

Látjuk, hogy a nemideális húrlezárás a húr hosszának növekedéseként fogható fel, ahol a növekmény hozzávetőlegesen $\Delta L = LM/m$.

Ha a húr lezáró tömeget nagyon nagyoknak feltételezzük a húr tömegéhez képest ($M \gg m$), akkor a 2.21. ábrán a meredek $\frac{M}{m} kL$ egyenes és a $\cot kL$

függvény metszéspontjait keressük. Ekkor a $\cot x$ függvényt az $n\pi$ környékén közelíthetjük Taylor-sorral:

$$\cot x \approx \frac{1}{x - n\pi} \quad \text{ha} \quad |x - n\pi| \ll 1. \quad (2.140)$$

A transzcendens egyenlet közelítése pedig

$$\frac{M}{m} kL = \frac{1}{kL - n\pi}, \quad (2.141)$$

amiből átrendezéssel

$$kL \left(1 - \frac{m}{M(kL)^2} \right) = n\pi. \quad (2.142)$$

Ebből látható, hogy a nagy tömeggel lezárt L hosszúságú húr ekvivalens egy $L - \Delta L$ hosszúságú (rövidebb) ideális, mereven lezárt húrral, viszont ΔL -re nem adódik az előzőekhez hasonló egyszerű kifejezés. Mivel a nagy tömeggel lezárt húr egy rövidebb, ideális húrral ekvivalens, a sajátfrekvenciák ebben az esetben az ideálisához képest kissé nőnek.

2.10. példa Nemideális lezárás hatása a húr alapfrekvenciájára

Egy $L = 40$ cm hosszú gitárhúrban $S = 70$ N feszítő erő hat. A húr bal oldala mereven be van fogva, jobb oldalát egy fa húrláb tartja a 2.22. ábrán vázolt módon. A húrláb keresztmetszetének területe $A = 25$ mm², magassága $h = 4$ cm. A fa sűrűsége $\rho = 1300$ kg/m³, Young-modulusa pedig $E = 100$ MPa. A húrláb kis frekvencián jól közelíthető koncentrált elemes rendszerrel, melynek rugómerevsége $K = EA/h$, tömege pedig a húrláb tömegének fele. Hogyan hat a nemideális lezárás a húr sajátfrekvenciáira?

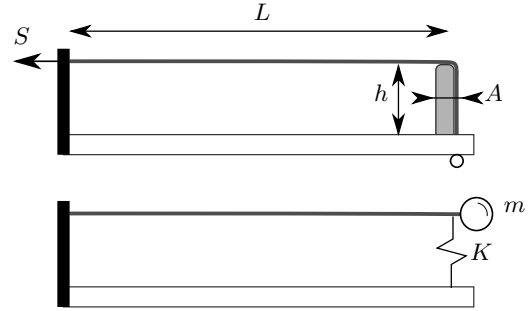
A húrláb K merevsége, m tömege és f_0 sajátfrekvenciája

$$K = EA/h = 62500 \text{ N/m},$$

$$m = \frac{\rho Ah}{2} = 0,65 \cdot 10^{-3} \text{ kg},$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} = 1,56 \text{ kHz}.$$

Az f_0 sajátfrekvencia lényegesen magasabb, mint a gitárhúrok alapfrekvencia-tartománya, tehát a húr a lezárás merevségtartományában rezeg, és a lezárást koncentrált rugóként látja. A nemideális



2.22. ábra. Nemideális húrlezárás és annak koncentrált paraméteres modellje

(vagyis nem végtelen merevségű) rugalmas lezárás a húr sajátfrekvenciáinak csökkenését eredményezi. A sajátfrekvencia csökkenésének mértékét a K_0/K tényező határozza meg, ahol $K_0 = S/L = 70 \text{ N}/0,4 \text{ m} = 175 \text{ N/m}$ a húr ekvivalens merevsége. Mivel $K_0/K \ll 1$, alkalmazható a hosszkorrekció közelítése, vagyis a kialakuló k hullámszámot meghatározó egyenlet

$$kL \left(1 + \frac{K_0}{K} \right) = n\pi.$$

A képletből kiolvasható, hogy a nemideálisan lezárt húr látszólagos hossza $L' = L(1 + K_0/K)$. A relatív hosszváltozás tehát a K_0/K értékkel egyezik meg, ami jelen esetben

$$\frac{K_0}{K} = \frac{175 \text{ N/m}}{62500 \text{ N/m}} = 2,8 \cdot 10^{-3}.$$

Ez

$$1200 \cdot \log_2 (1 + 2,8 \cdot 10^{-3}) = 4,87$$

közel ötcentes hangmagasság-csökkenésnek felel meg.

3. fejezet

Hangsorok és hangolás

A húrok rezgéseiről szóló fejezetben láttuk, hogy az L hosszúságú, mindkét végén befogott húr saját-frekvenciái az $f_1 = c/2L$ alapharmonikus frekvencia egész számú többszöröse, vagyis $f_n = nc/2L$, ahol c a rezgés terjedési sebessége a húrban. Mivel egy megpendített húr rezgésalakjában az alaphrekvencia mellett az első néhány felharmonikus még jól hallható, logikusnak tűnik, hogy az egymáshoz közeli n rendszámú felharmonikusokat az alapharmonikussal együtt szólva természetesnek, kellemes hangzásúnak érezzük. A húrok és harmonikusok ezen tulajdonságát már felismerte Püthagorasz is, aki a természetesnek hangzó, konsonáns hangközök rendszerét a felharmonikus arányok alapján írta le.

Az első ($n = 1$) és második ($n = 2$) harmonikus frekvenciaaránya $2/1$, ez az arány a legegyszerűbb, „legtisztább” hangköz, a tiszta oktáv (T8). Ha az alapharmonikus frekvenciája f_1 , akkor a $2f_1$ frekvencia annál egy oktávval magasabban, a $4f_1$ frekvencia két oktávval magasabban, a $2^m f_1$ frekvencia pedig m oktávval magasabban szól. A zeneelméletben a hallható hangtartományt oktávokra bontva kezeljük, és használt hangsorainkat általában oktávonként ismételjük. A hallható tartomány oktávjainak megnevezéseit a 3.1. táblázat tartalmazza. A zongora legmélyebb hangja a szubkontra a (A , „A0”), legmagasabb hangja az ötvonalas c (c'''' , C8).

Az $n = 3$ értékhez tartozó, háromszoros frekvenciájú harmadik felharmonikus nyilván az alaphang fölötti első és második oktáv között helyezkedik el. Az alaphang oktávtartományába való letranszponáláshoz frekvenciáját kettővel osztjuk, így az alaphanghoz képest $3/2$ frekvenciaarányú, az alaphangnál egy tiszta kvinttel (T5) magasabban megszólaló hanghoz jutunk. Ez a hang az alaphangnál

$1200 \cdot \log_2(3/2) \approx 702$ centtel magasabb. A kvint bevezetésével a $2/1$ arányhoz tartozó oktávot két hangközre bontottuk: egy $3/2$ arányú kvintre és a fennmaradó $2/(3/2) = 4/3$ frekvenciaarányú tiszta kvartra (T4, ≈ 498 cent).

3.1. A diatonikus hangsor

Az ókori görögök a tiszta kvartot további két osztópont beiktatásával három hangközre bontották, és az így kialakuló, négy hangból álló hangsort tetrachordnak nevezték el. A tetrachord első és negyedik hangja tehát tiszta kvart távolságra van. A tetrachord osztópontjainak egyik fajta kialakítási módja a diatonikus tetrachord, amelyben a tiszta kvart két nagyszekundra (N2) és egy kisszekundra (K2) bontható. Az egyetlen kisszekund helyzete szerint három tetrachordot különböztetünk meg:

dór. : $T4 = N2 + N2 + K2$

fríg. : $T4 = N2 + K2 + N2$

líd. : $T4 = K2 + N2 + N2$

A teljes oktáv hangterjedelmet felölelő diatonikus hangsor két tetrachordból áll, melyeket egy nagyszekund választ el egymástól. Egy dór hangsor hangközei például:

	N2	N2	K2		N2		N2	N2	K2
ami	a	ma	használatos				kottajelölést		
és	ábécés	hangokat	alkalmazva				a		

2

c d e f g a h c'

megnevezés	zenei jelölés	MIDI-szabvány	f_A [Hz]
szubkontra	$C, , -H, ,$	C0-B0	27,5
kontra	$C, -H,$	C1-B1	55
nagy	$C - H$	C2-B2	110
kis	$c - h$	C3-B3	220
egyvonalas	$c' - h'$	C4-B4	440
kétvonalas	$c'' - h''$	C5-B5	880
háromvonalas	$c''' - h'''$	C6-B6	1760
négyvonalas	$c'''' - h''''$	C7-B7	3520
ötvonalas	$c''''' - h'''''$	C8-B8	7040

3.1. táblázat. A hallható tartomány oktávokra osztása. A táblázat az oktávok megnevezése, zenei jelölése és a MIDI szabvány szerinti számozása mellett az egyes oktávok a hangjának frekvenciáját is tartalmazza.

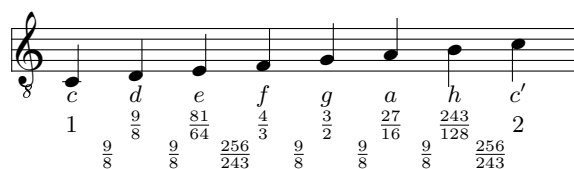
diatonikus hangsornak felel meg. Egyszerű megfogalmazással a diatonikus hangsor a zongora fehér billentyűinek hangjaiból áll.

3.1.1. A diatonikus hangsor püthagoraszsi hangolása

A püthagoraszsi hangolás a diatonikus hangsor egyes hangjainak frekvenciáját egymástól tiszta kvint távolságra levő hangok alapoktávba transzponálásával határozta meg. Tekintsük például a következő, F hangról induló kvintláncot:

$$\begin{array}{ccccccc}
 F & c & g & d' & a' & e'' & h'' \\
 \frac{2}{3} & 1 & \frac{3}{2} & \left(\frac{3}{2}\right)^2 & \left(\frac{3}{2}\right)^3 & \left(\frac{3}{2}\right)^4 & \left(\frac{3}{2}\right)^5
 \end{array}$$

Hangsorunkban a C hang frekvenciáját választottuk egységnyinek, és a szomszédos hangok frekvenciaaránya $3/2$. Ha minden hangot a kis oktávba transzponálunk (kettő megfelelő hatványával való osztással vagy szorzással), a következő diatonikus skálához jutunk:



Az ábécés hangok alatti sorban a hangok c alaphanghoz viszonyított frekvenciaarányait látjuk. Az e hang frekvenciáját például úgy kaptuk meg, hogy a két oktávval magasabb tartományban levő e'' hang frekvenciáját $2^2 = 4$ -gyel osztottuk, vagyis $(3/2)^4/4 = 81/64$. A második számsorban a

szomszédos hangok közti nagy- és kissetundoknak megfelelő frekvenciaarányok vannak feltüntetve. Megállapíthatjuk, hogy a püthagoraszsi skálán a nagyszekund frekvenciaaránya $9/8$ (≈ 204 cent), a kissetund frekvenciaaránya pedig – példaként az $E - F$ hangközt választva – $(4/3)/(81/64) = 256/243$ (≈ 90 cent).

A püthagoraszsi hangsor kielégítőnek bizonyult a középkori, korai polifonikus zenében, amikor a polifóniát lényegében oktáv és kvint hangközök alkalmazására alapozták. E hangközök közül ugyanis mindkettő tökéletesen tiszta e hangsorban.

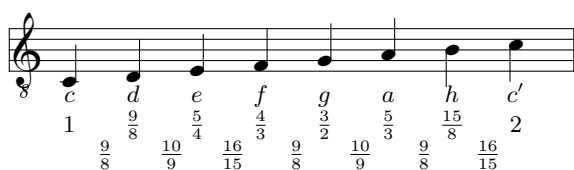
3.1.2. A diatonikus skála tiszta hangolása

A püthagoraszsi skála $81/64$ frekvenciaarányhoz tartozó $c - e$, $f - a$ és $g - h$ nagyterc hangközei kellemetlen hangzásúak, bővebbek a tiszta nagytercnél. Ez a görög és korai középkori zenében nem okozott problémát, mert ekkor még nagytercet (a tiszta nagytercet is) disszonánsnak tartották, és nem használták a polifonikus zenében. A korai reneszánszban egyre összetettebbé váló polifonikus zene viszont elkerülhetelenné tette az eddig elhanyagolt ötödik felharmonikushoz tartozó tiszta nagyterc bevezetését. Az ötödik ($n = 5$) felharmonikus alapoktávba való transzponálásával egy új, $5/4$ frekvenciaarányhoz tartozó tiszta nagyterc $N3$, (≈ 386 cent) vezethető be, és lehetőség nyílik egy kvinteken és nagyterceken alapuló új diatonikus skála konstruálására.

A tiszta diatonikus hangsor egy lehetséges megvalósítási módját mutatja az alábbi táblázat.

$$\begin{array}{cccc} A \frac{5}{6} & e \frac{5}{4} & h \frac{15}{8} & \\ F \frac{2}{3} & c \ 1 & g \frac{3}{2} & d' \frac{9}{4} \end{array}$$

A táblázat alsó sora a püthagoraszzi kvintalapú skála F -től d' -ig terjedő szakaszát jelöli, vagyis a vízszintes lépésköz ismét $3/2$ frekvenciaarányának felel meg. A függőleges (felfelé irányuló) lépésközök ebben a táblázatban az $5/4$ -es tiszta nagyterchez tartoznak. Példaként az A hang frekvenciáját az F -ből a $2/3 \cdot 5/4 = 5/6$ művelettel kapjuk meg. A hangokat az alapoktávba transzponálva a következő diatonikus skálához jutunk:



Első ránézésre a tiszta diatonikus skála egyszerűbb frekvenciaarányokat tartalmaz, mint a püthagoraszzi, az e , a és h hangok alaphanghoz viszonyított frekvenciaarányai egyszerűsödtek. A szomszédos hangközöket vizsgálva láthatjuk, hogy a skála három különböző szekundlépést tartalmaz:

- Az $e - f$ és $h - c'$ kisszekund lépésköz frekvenciaaránya $16/15$ (≈ 112 cent);
- A $c - d$, $f - g$ és $a - h$ nagyszekundok frekvenciaaránya $9/8$ (≈ 204 cent);
- A $d - e$ és $g - a$ nagyszekundok aránya pedig $10/9$ (≈ 182 cent).

A kétféle nagyszekundot megkülönböztetendő bevezetjük a $10/9$ -es „kis nagyszekund” és $9/8$ -os „nagy nagyszekund” elnevezéseket. A két nagyszekund frekvenciaaránya $81/80$ (≈ 22 cent), ezt az eltérést szintonikus kommának nevezzük.

A szintonikus komma másik, ekvivalens definíciója a püthagoraszzi nagyterc és a tiszta hangolású nagyterc közti eltérés. A püthagoraszzi skálán a nagyterc távolságot négy tiszta kvint lépéssel, majd két oktáv visszalépéssel definiáltuk, a tiszta skálán pedig egyszerűen az $5/4$ aránnyal. Könnyen látható, hogy a két definíció eltér, hiszen

$$4T5 - 2T8 > N3 \quad (3.1)$$

illetve frekvenciaarányokkal kifejezve

$$\frac{(3/2)^4}{2^2} > \frac{5}{4} \quad (3.2)$$

Az eltérés mértéke pontosan a $81/80$ aránynak megfelelő szintonikus komma.

A most bemutatott tiszta diatonikus skála előnye, hogy tisztán játszható rajta minden, csupa fehér billentyűn játszható dúr hármas, vagyis a

$$\begin{array}{l} c - e - g \\ F - A - c \\ G - H - d \end{array}$$

hármashangzatok. Ezek a hármasok egy $5/4$ -es tiszta nagytercből és egy $6/5$ -ös tiszta kistercből (K3) állnak. A dúrakkordok tisztasága fontos tulajdonság, hiszen ezek a hangzatok képezik a dúr hangnemű harmóniasorokban gyakori $I - IV - V - I$ kadencia akkordjait:



A diatonikus skálán szintén tisztán játszhatók az $A - c - e$ és $e - g - h$ moll hármasok, de a $d - f - a$ moll hármas már nem, mert a $d - f$ távolság egy szintonikus kommával szűkebb a tiszta kistercnél, illetve a $d - a$ távolság szintén ennyivel szűkebb a tiszta kvintnél.

Megjegyezzük, hogy a d hang szintonikus kommával való leszállításával szerkeszthető olyan tiszta hangsor, melyen minden moll hármas tisztán játszható. Könnyen látható azonban, hogy ezen a skálán viszont sérül a $G - H - d$ dúr akkord tisztasága.

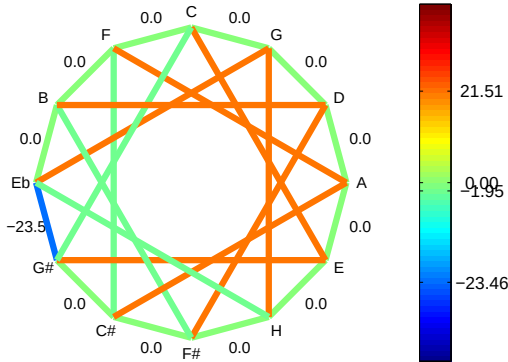
Látjuk tehát, hogy a tiszta hangolás pusztán elnevezés, valójában ténylegesen tiszta hangolású hétfokú rendszer nem létezik.

3.1. példa Hétfokú skála tiszta hangolása

Egy hathúros E-A-d-g-h-e' hangolású akusztikus gitárt úgy hangolunk fel, hogy szomszédos húrjai tiszta kvart illetve nagyterc hangközöket adjanak ki. Mekkora az E és e' húrok alaphangjai közti frekvenciaarány? Mekkora a tiszta két oktávtól való eltérés centben?

A két e -húr közti frekvenciaarány

$$4/3 \cdot 4/3 \cdot 4/3 \cdot 5/4 \cdot 4/3 = \frac{320}{81}$$



3.1. ábra. A tizenkétfokú skála püthagoraszai hangolása a kvintkörön. Az egyes hangokat összekötő vonalak színezése a tiszta hangközökhöz képest mért eltérést jelöli.

Ennek a tiszta két oktávtól való eltérése centben

$$1200 \cdot \log_2 \frac{320/81}{4} = 1200 \cdot \log_2 \frac{80}{81} = -21 \text{ cent} \quad (3.3)$$

ami a szintonikus komma.

3.2. Tizenkétfokú hangsorok

Amint láttuk, már a hétfokú skála tiszta hangolása is lehetetlen. A zongora fehér billentyűihez rendelt frekvenciaértékek rögzítésekor bizonyos hangközök tisztaságát előnyben kell részesítenünk másik hangközökkel szemben. A helyzet tovább bonyolódik a tizenkétfokú hangsor bevezetésekor, amely a fehér billentyűk tetszőleges szomszédos, nagyszekund távolságra levő hangjai közti félhang osztásokat is tartalmazza.

3.2.1. A tizenkétfokú skála püthagoraszai hangolása

A tizenkétfokú skála püthagoraszai hangolása a diatonikus skálánál bemutatott módon, a tiszta kvintekből álló teljes kvintkör felírásával történik. A 3.1. ábrán látható kvintkör tartalmazza mind a tizenkét félhangot úgy, hogy a szomszédos hangok egymástól kvint távolságra vannak. A kvintkörön az óramutató járásával megegyező lépésköz $3/2$ frekvenciaszorozónak felel meg.

A kvintkörön – csakúgy, mint a zongora billentyűzetén – az *Es*z és *Dis*z hangok között pontosan hét oktáv az eltérés, vagyis tizenkét kvint megegyezik hét oktávval. Valójában tiszta $3/2$ -es kvintekkel és oktávokkal számolva azonban $(3/2)^{12} > 2^7$, az eltérés mértéke pedig

$$\frac{(3/2)^{12}}{2^7} = \frac{531\,441}{524\,288} \approx 23,46 \text{ cent} \quad (3.4)$$

Ezt a hangközt a püthagoraszai skála enharmonikus kommajának, vagy egyszerűbben püthagoraszai kommajának nevezzük, a *Dis*z és *Es*z hangok pedig enharmonikus párt alkotnak.

Ha a zongora hangjait a teljes kvintkör alapján definiáljuk, választanunk kell az enharmonikus párok, esetünkben az *Es*z és a *Dis*z hangok közül. Amennyiben az *Es*z mellett döntünk, vagyis az *Es*z – *B* kvintet definiáljuk tisztán, akkor a *Gis*z – *Es*z kvintünk nem lesz tiszta, hanem annál egy püthagoraszai kommával szűkebben szól. Így az *Es*z hangra épülő püthagoraszai hangolás esetében kerülni kell az olyan harmóniakat, amik az *As*z – *Es*z kvint hangközt tartalmazzák.

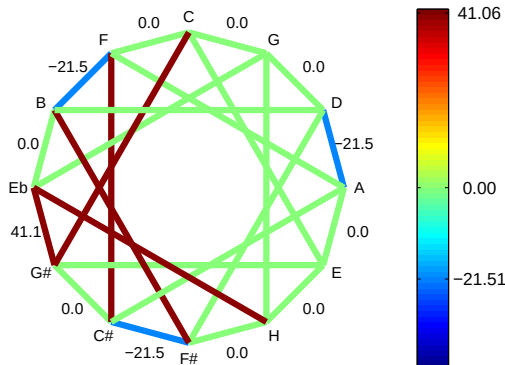
Láttuk, hogy a püthagoraszai skála nagyterc hangközei a 21,51 centnyi szintonikus kommával bővebbek az $5/4$ -es tiszta nagytercnél. A tizenkétfokú püthagoraszai skálán négy olyan új nagyterc hangköz is van, ami három tiszta kvintre és a tiszta kvintnél 23,46 centtel szűkebb *Gis*z – *Es*z hangközre épül. Az említett hangközök a *H* – *Es*z, *Fis*z – *B*, *Cis*z – *F* és *Gis*z – *C* nagytercek (illetve szűkített kvartok). Ezen hangközökben a szintonikus és püthagoraszai kommak majdnem kiegyenlítik egymást, így mindössze 1,95 centtel, vagyis egy schismával szűkebbek a tiszta nagytercnél.

A schisma ekvivalens definícióját úgy kapjuk, ha a 3.1. ábrán pl. az *Es*z hangtól indulva nyolc tiszta kvintet lépünk fel, majd a kvintkört egy nagyterccel (*H* – *Es*z) zárjuk be. A kvintkör zárásához a nagytercet a tiszta nagytercnél egy schismával szűkebbnek kell vennünk, így:

$$8T5 + 1N3 = 5T8 + \text{schisma}. \quad (3.5)$$

3.2.2. A tizenkétfokú skála tiszta hangolása

A tizenkétfokú skála tiszta hangolása a hétfokú skálához hasonlóan, tiszta kvinteken és tiszta nagy-



3.2. ábra. A tizenkétfokú skála tiszta hangolása a kvintkörön

terceken alapszik, ahogy a 3.2. ábra és az alábbi táblázat mutatja:

<i>cisz</i>	<i>gisz</i>	<i>(disz')</i>	
<i>A</i>	<i>e</i>	<i>h</i>	<i>Fisz'</i>
<i>F</i>	<i>c</i>	<i>g</i>	<i>d'</i>
		<i>esz</i>	<i>b</i>

A táblázatban ismét tiszta kvint ugrásnak felel meg egy vízszintes lépés, és tiszta nagytercnek felel meg egy függőleges irányú ugrás. Az *esz* – *disz'* sarokhangokat vizsgálva könnyen látható, hogy az enharmonikus párok a tiszta hangolás esetén sem azonos magasságúak, hiszen három tiszta nagy terc nem tesz ki egy tiszta oktávot. A különbségük

$$\frac{(5/4)^3}{2} = \frac{125}{128} \approx -41,1 \text{ cent} \quad (3.6)$$

ami a tiszta hangolású tizenkétfokú skála enharmonikus kómmája. A kvintkör bezárásához tehát a *Gisz* – *Esz* (szűkített szext) hangköznek 41,1 centtel bővebbnek kell lennie a tiszta kvintnél.

Érdekességgént jegyezzük meg, hogy püthagoraszai skálán a szűkített szext a tiszta kvintnél szűkebb hangköz, tiszta hangolásnál pedig annál bővebbnek adódik. Másként fogalmazva: Püthagoraszai skálán az *Esz* alacsonyabb a *Disz*-nél, tiszta skálán magasabb.

A skála többi kvinthangközét vizsgálva megfigyelhetjük, hogy a *D* – *A* kvint mellett szintonikus kómmával szűkebbnek adódik a *B* – *F* és a *Fisz* – *Cisz* kvint, hiszen ezek három tiszta kvintre és egy tiszta nagytercre épülnek.

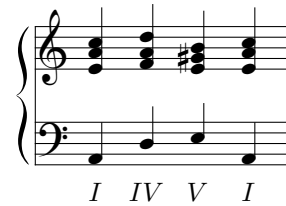
A tiszta skálán tökéletesen tisztán szólal meg hat dúr és hat moll akkord. A dúr akkordok azok a hármasok, melyek a táblázatban L-alakban helyezkednek el. Az *F*-dúr hangjainak elhelyezkedése például

$$\begin{matrix} A \\ F \\ c \end{matrix}$$

Hasonlóképpen a moll hármasok azok, melyek fordított L-alakban lelhetők fel a táblázatban. A *H*-moll akkord hangjainak elhelyezkedése például

$$\begin{matrix} h & fisz' \\ & d' \end{matrix}$$

Rövid vizsgálódás után belátható, hogy a tiszta kvintekre és tiszta nagytercekre épülő tizenkétfokú skála gyakorlatilag csak nagyon szűk körben használható. Legjobb példaként az alábbi egyszerű és igen gyakori *I* – *IV* – *V* – *I* moll kadenciát említhetjük, amely a tiszta skálán egyetlen hangnemben sem játszható le tisztán.



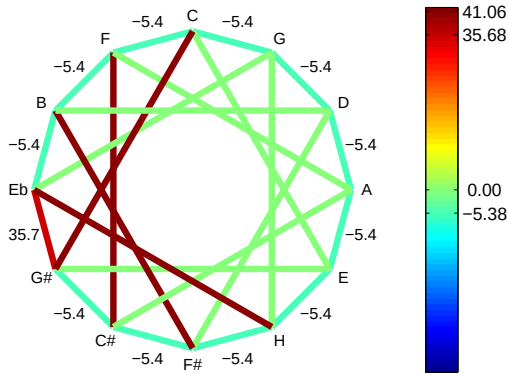
3.3. A hangsorok kiegyenlítése

A hangsorok kiegyenlítése vagy temperálása alatt olyan módosításokat értünk, melyek a kómmák szétosztására irányulnak.

3.3.1. A negyedkómmás középhangú temperálás

A reneszánsz idejéből származó és százötven évig szinte egyeduralkodó temperált skála a negyedkómmás középhangú kiegyenlített hangolás (quarter comma meantone temperament), mely a kvint enyhe szűkítésével egyenlíti ki a szintonikus kómmát. Amint azt a (3.1-3.2) kifejezésekben láttuk, a szintonikus komma oka az, hogy négy tiszta kvint bővebb két tiszta oktávnál és egy nagytercnél:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 > 2^2 \cdot \frac{5}{4} \quad (3.7)$$



3.3. ábra. A negyedkommás középhangú temperált skála a kvintkörön

ahol az eltérés mértéke $\approx 21,5$ cent. A kiegyenlítéshez új, szűkebb tiszta kvint definíciót vezettek be, amelyre a fenti egyenlőtlenség egyenlőséggé alakul. Ha a kvint frekvenciaarányát x -szel jelöljük, akkor

$$x^4 = 2^2 \cdot \frac{5}{4} \quad (3.8)$$

ahonnan

$$x = \sqrt[4]{5} \quad (3.9)$$

a kvint új frekvenciaaránya, ami $\approx 5,4$ centtel szűkebb a $3/2$ -es tiszta kvintnél. Ez az eltérés a szintonikus komma negyede, innen a negyedkommás kiegyenlített hangolás elnevezés. Az $\approx 5,4$ centtel szűkített új kvintek szabad füllel megkülönböztethetők a tiszta kvinttől. Ez természetes, sőt szükséges, hiszen a középhangú temperált skálára fül után hangolták a hangszeret.

A negyedkommás temperált skála szerint hangolt hangszeret általában az *Esz* hangra épülő

$$Esz, B, F \text{ c } g \text{ d' } a' \text{ e'' } h'' \text{ fisz''' cisz'''' gisz''''}$$

kvintkör szerint hangolták be, ahogy a 3.3. ábra mutatja. Ez a kvintkör tizenegy $\sqrt[4]{5}$ -ös kvintlépést tartalmaz. A tizenkettedik kvint nagyságát a kvintkör zárásával a *Gisz* – *Esz* távolság jelöli ki (ez valójában egy szűkített kisset), ami gyakorlatilag a tizenegy temperált kvint hét oktávra való kiegészítése. A szükséges utolsó lépés frekvenciaaránya $2^7 / \sqrt[4]{5}^{11} \approx 1,53$. Ez a tizenkettedik kvint ≈ 36 centtel bővebb a $3/2$ -es tiszta kvintnél. Az eltérés annyira hamis hangközt eredményez, hogy a

temperált skála utolsó kvintjét farkaskvintnek nevezték el. A farkaskvint hamissága természetesen maga után vonja mindazon nagytercek hamisságát is, melyek a farkaskvintet tartalmazó kvintnégyesre épülnek. Ezek a *H* – *Esz*, a *Fisz* – *B*, a *Cisz* – *F* és a *Gisz* – *C* nagytercek (melyek valójában szűkített kvart hangközök).

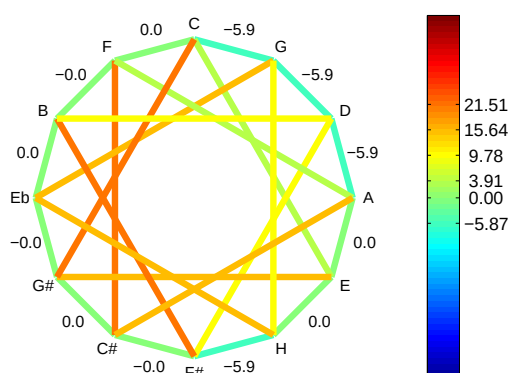
A negyedkommás temperált hangolás a tiszta kvinttől való parányi, nem zavaró eltérés árán kiegyenlítette a szintonikus kommat, és a beavatkozás útján alkalmassá vált a két bé és két kereszt közti előjegyzéssel írt darabok szinte teljesen tiszta megszólaltatására. Bonyolultabb, vagyis több módosított hangot tartalmazó hangnemekben írt darabok játszására azonban a farkaskvint és a farkastercek miatt nem volt alkalmas. Minél több módosító jel van az előjegyzésben, annál hamisabban szól a darab a negyedkommás temperált hangolásban. A hangolási módszer előnye viszont, hogy a gyakorlati hangolása viszonylag egyszerű volt, hiszen négy temperált kvint pontos beállítása után csak tiszta nagyterceket kellett kimérni. Az ezeröttszáz éves elejétől egészen a XVII. század végéig szinte kizárólagosan használták. Példaként Purcell és Vivaldi negyedkommás kiegyenlített skálára írták csembalókísérettel játszott műveiket.

3.3.2. Jóltemperált skálák

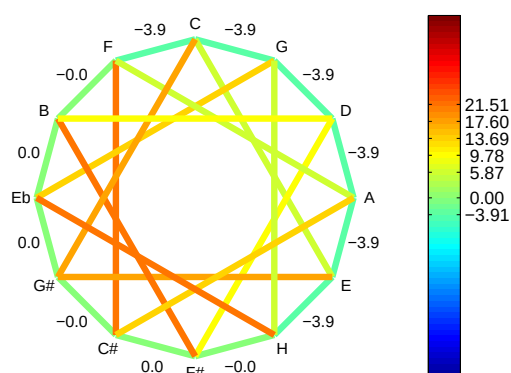
A jóltemperált (well-tempered) skála elnevezést azon temperált skálacsálákra alkalmazzuk, ahol a módosított hangközöket nem szisztematikusan, hanem önkényes rendszer szerint választjuk ki. A jóltemperált skálák alkalmazásának célja általában a teljes körű kromatikus transzponálás volt. Ennek érdekében nyilvánvaló cél a kvintkör bezárásánál keletkező farkaskvintek és farkastercek kiegyenlítése.

A leghíresebb jóltemperált skála Andreas Werckmeister nevéhez fűződik, és Werckmeister-III névre hallgat. A Werckmeister skála a püthagoraszai kommat négyfelé osztja, és a kvintkör négy önkényesen kiválasztott kvintje, a *C* – *G*, a *G* – *D*, a *D* – *A* és a *H* – *Fisz* kvintek közt osztja szét. Eredményként a 3.4. ábrán látható kvintkört kapjuk.

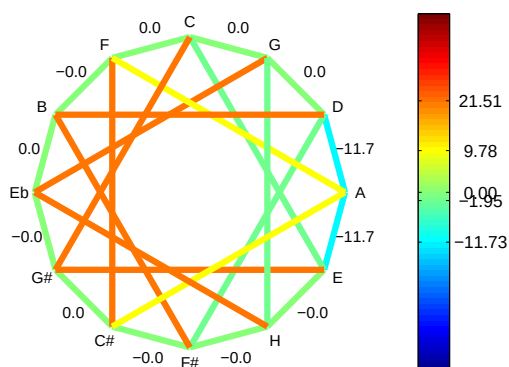
A Werckmeister temperálás előnye, hogy a kevés módosított hangot tartalmazó hangnemekben viszonylag tiszta, tíz centen belüli eltérésű nagyterceket eredményez. A sok módosító hangot tartalmazó hangnemekben a Werckmeister-temperálás gya-



3.4. ábra. A Werckmeister-III jóltemperált skála a kvintkörön



3.6. ábra. A Vallotti-féle jóltemperált skála a kvintkörön



3.5. ábra. A Kirnberger-féle jóltemperált skála a kvintkörön

korlatilag a püthagoraszai skálát adja vissza tiszta kvintekkel és bő nagytercekkel.

A skála lényeges tulajdonsága, hogy minden hangnem játszható, és minden hangnem eltérő. J. S. Bach a Werckmeister-III skálára komponálta A jóltemperált zongora című művét, mely tizenkét különböző dúr és tizenkét különböző moll hangnemben játszott zongoradarabot tartalmaz. Tipikusan erre a skálára komponált Handel is.

Az ezerhétszázas évek második felében számos alternatív jóltemperált skála volt használatban. Megemlítjük közülük a Bach tanítványa, Johan Kirnberger német orgonista és zeneelméletész nevéhez fűződő temperálást, mely a püthagoraszai komma felezésén alapul. A hangolás kvintkörét a 3.5. ábra mutatja.

A felezés két, fejenként 11,7 centtel szűkített

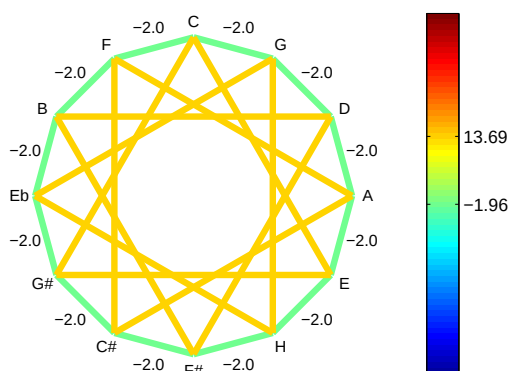
kvintet eredményez, melyeket a $D - A$ és $A - E$ hangok között osztunk szét. Ennek eredményeként a $C - E$, $G - H$ és $D - F$ sz nagytercek egy schismával térnek csak el a tiszta nagyterctől, az $F - A$ és az $A - C$ sz nagytercek 9,78 centtel bővebbek a kelleténél, a többi nagyterc pedig a püthagoraszai 81/64 arányúnak felel meg.

Bemutatjuk ezen kívül a Francesco Vallotti olasz orgonista nevéhez fűződő temperálást, mely a 3.6. ábrán látható. Ennek lényege, hogy a püthagoraszai kommat hat egyenlő részre osztjuk, és a hat töredéket a diatonikus hangsort felölelő kvintláncon, vagyis az F és H hangok közti kvinteken osztjuk szét. Az eredményül kapott hangsorban a különböző nagytercek igen széles választékával, ötféle nagyterccel találkozunk: A kvintkör bal oldalán fellelhető három püthagoraszai nagyterc, a kvintkört jobb oldalán pedig három, 5,87 centtel bő nagyterc. A két szélsőség között folyamatos az átmenet, ami a különböző hangnemek színes skáláját biztosítja.

A Kirnberger és Vallotti-féle temperált skálák a 18. század második felében és a korai 19. században voltak használatosak. Ezeken a skálákon komponált például Haydn, Mozart, Beethoven és Schubert.

3.3.3. Az egyenletesen temperált hangsor

A szintonikus és enharmonikus komma együttes kiegyenlítésére szolgáló teljesen kiegyenlített hangsor elvét már a 16. században is ismerték, gyakorla-



3.7. ábra. Az egyenletesen temperált skála a kvintkörön

ti elterjedésére azonban csak a 19. század végefelé került sor, mikor lehetővé vált a pontos frekvencia-mérés. A hangsor az oktávot tizenkét azonos kishangközre bontja, melyek frekvenciaaránya $\sqrt[12]{2} = 100$ cent. Itt az egyenlőség teljesen pontos, a cent ugyanis definíció szerint a temperált kishangköz századrésze. Természetesen az egyenletes temperálás a püthagorasz komma tizenkét részre való osztását jelenti, ahogy azt a 3.7. ábra mutatja.

A kiegyenlített skálán az oktávon kívül tiszta hangköz nincsen. A hét félhangból álló temperált kvint ≈ 2 centtel (vagyis észrevehetetlen mértékben) szűkebb a tiszta kvintnél, a négy félhangból álló nagyterc pedig a már jócskán hallható ≈ 14 centtel bővebb a tisztánál. A legkiemelkedőbb eltérés a tiszta kisterc és a temperált kisterc közti majdnem 16 centes „hiba”.

A teljesen kiegyenlített hangolásnál minden hangnem egyenértékű: a különböző hangnemekben lejátszott zenemű harmóniai azonos mértékben térnek el a tiszta hangközöktől.

3.2. példa Tizenkétfokú skála püthagorasz hangolása

Adja meg Esz-alapú püthagorasz hangolású tizenkétfokú skálán a D-dúr (D-Fisz-A) hármashangzat hangközeinek frekvenciaarányait, illetve adja meg a hangközök egyenletesen temperált hangközkhöz mért eltéréseit centben!

Esz-alapú püthagorasz kvintkörön a D-A kvint tiszta 2 : 3 arányhoz tartozik, a D-Fisz nagyterc pedig négy egymásra épülő tiszta kvintből rakható össze. Ezek alapján a D-Fisz frekvenciaarány

$(3/2)^4/2^2 = 81/64$ (a híres püthagorasz nagyterc), a Fisz-A kisterc frekvenciaaránya pedig a kvintből visszaszámolva $(3/2)/(81/64) = 32/27$.

A püthagorasz nagyterc temperált, azaz négyszáz centes nagyterctől való eltérése

$$1200 \log_2(81/64) - 400 = 7,82 \text{ cent} \quad (3.10)$$

A püthagorasz kisterc temperált, azaz háromszáz centes kisterctől való eltérése

$$1200 \log_2(32/27) - 300 = -5,87 \text{ cent} \quad (3.11)$$

4. fejezet

Rudak rezgései

4.1. Bevezetés

A rudakat a húrokhoz hasonlóan egydimenziós rendszerként vizsgáljuk, vagyis feltételezzük, hogy keresztirányú méreteik lényegesen kisebbek a rájuk megjelenő rezgések hullámhosszánál.

A rudak fontos tulajdonsága a húrokkal ellentétben az, hogy saját merevséggel rendelkeznek, így külső feszítő erő jelenléte nélkül is rezgésbe hozhatók.

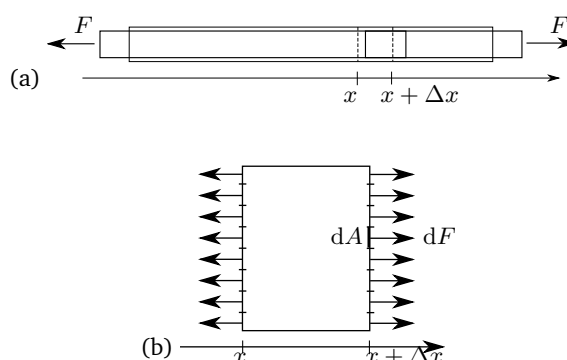
4.2. Rudak longitudinális rezgései

Először rudak longitudinális, vagyis hosszirányú rezgéseit vizsgáljuk. A rezgések leírásakor a következő feltételezésekkel élünk:

- A rúd anyagi és geometriai paraméterei csak hosszirányban változnak.
- Minden rezgést leíró mennyiség (elmozdulás, erő) csak hosszirányban változik.
- Minden rezgést leíró mennyiség (elmozdulás, erő) hosszirányú.

4.2.1. A mozgásegyenlet levezetése

A rúd hosszirányú rezgéseit leíró mozgásegyenlet kiindulópontjai – a tömeg-rugó rendszerhez hasonlóan – ismét Newton második törvénye és a Hooke-törvény.



4.1. ábra. (a) Hosszú vékony rúd deformációja húzóerő hatására. (b) A rúd kicsi darabjára ható belső erők.

A Newton-törvény differenciális alakja

Tekintsük a 4.1. ábrán látható rudat, melyre F hosszirányú húzóerővel hatunk. A húzóerő hatására a rúd hosszirányban megnyúlik. Vizsgáljuk a rúd egy kis szakaszát, mely nyugalmi helyzetben az x és $x + \Delta x$ pozíciók között helyezkedik el. Erre a szakaszra közvetlen külső erő nem hat, mégis deformációt szenved. A deformáció oka az, hogy a külső gerjesztés hatására a rúdban húzó feszültség ébred, ami a rúd minden belső pontjára hatással van.

A belső feszültségek fizikai jellemzéséhez képzeljük el, hogy a rudat darabokra metsszük a kiválasztott szegmens határoló síkjai mentén, majd a kis rúddarabra erővel hatunk annak érdekében, hogy ugyanazt a deformációt szenvedje, mint amikor a rúd részét képezte. Jelölje dF a rúdszegmens felületének dA felületdarabkájára ható erőt. Ennek

kifejezése definíció szerint

$$dF = \sigma dA \quad (4.1)$$

ahol a σ skaláris mennyiség a rúdban ébredő mechanikai feszültség (stress). A (4.1) definíció szerint ennek mértékegysége N/m^2 . A dA felületelem irányított, vagyis pozitív, ha a felület kifelé mutató normálisa a pozitív irányba néz, és negatív az ellenkező esetben. A definíció szerint egyértelmű, hogy adott előjelű σ feszültség a rúdelem két oldalán ellentétes irányú erőkhöz vezet, hiszen a normálisok ellentétes irányúak. A szokásos konvenció szerint pozitív mennyiségként jelöljük a húzó (tensile), negatív mennyiségként jelöljük a nyomó (compressive) feszültséget.

Tételezzük fel, hogy a feszültség a rúd keresztmetszete mentén állandó, vagyis nem függ az y és z koordinátáktól. Ekkor a rúdszegmens határolófelületére ható teljes erő kifejezése

$$F = \int_A \sigma dA = \sigma n A \quad (4.2)$$

ahol $n = \pm 1$ a felületi normális irányát jelöli.

Írjuk fel a rúd x és $x + \Delta x$ közti darabjára Newton második törvényét:

$$\sum F = ma \quad (4.3)$$

Az erőket fejezzük ki a rúdszegmens bal és jobb oldali lapján fellépő feszültségek, a tömeget a ρ sűrűség, a gyorsulást pedig az u elmozdulás segítségével:

$$\sigma(x + \Delta x) \cdot (+A) + \sigma(x) \cdot (-A) = \Delta x A \rho(x) \ddot{u}(x) \quad (4.4)$$

ahol a bal oldalon szereplő $+A$ és $-A$ felületek az eltérő normális irányokra utalnak. A Δx hossz-elemmel és az A felülettel végigosztva, majd határátmenetet képezve, a Newton-törvény egydimenziós differenciális alakját kapjuk:

$$\sigma'(x, t) = \rho(x) \ddot{u}(x, t) \quad (4.5)$$

ahol a vessző az x koordináta szerinti deriválást jelöli.

A Hooke-törvény differenciális alakja

Hooke törvénye azt mondja ki, hogy a rúddarabban ható σ direkt feszültség arányos a rúddarab relatív

alakváltozásával. A Δx hosszúságú szegmens relatív megnyúlása a szegmens két oldalán mérhető u elmozdulások segítségével az

$$\varepsilon(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u'(x) \quad (4.6)$$

összefüggéssel definiálható. Hooke törvényének egydimenziós alakja pedig

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{E} \sigma(x) \quad (4.7)$$

ahol σ az x irányú feszültség, E pedig a N/m^2 dimenziójú Young-modulus.

A rúd hullámegyenlete

Helyettesítsük be a differenciális Hooke-törvényt leíró (4.7) egyenletből a σ feszültség kifejezését a Newton-törvény differenciális alakját megadó (4.5) egyenletbe. Így, a $\rho(x)$ sűrűség helyfüggését egyelőre elhagyva:

$$EA u''(x, t) = \rho A \ddot{u}(x, t), \quad (4.8)$$

illetve a

$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.9)$$

mennyiséget bevezetve az

$$c_L^2 u''(x, t) = \ddot{u}(x, t) \quad (4.10)$$

hullámegyenletet kapjuk.

Peremfeltételek

Mivel a hullámegyenletünk térben másodrendű, két térbeli feltételre van szükségünk az egyértelmű megoldáshoz. A két feltételt véges L hosszúságú rudak esetén rendszerint a két rúdvégén megjelenő elmozdulások vagy erők megadásával realizáljuk. A rúd két oldalán megjelenő erők kifejezése a rúd elmozdulása segítségével:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= -\sigma(0, t)A = -EA u'(0, t) \\ F_2(t) &= \sigma(L, t)A = EA u'(L, t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.2.2. A longitudinális mozgásegyenlet megoldása

Látjuk, hogy a (4.10) hulláme egyenlet formailag teljesen megegyezik a húrok keresztirányú rezgéseit leíró (2.8) hulláme egyenlettel. Az analógiát kihasználva, megállapíthatjuk az alábbiakat:

- A végtelen rúd longitudinális szabadrezgéseit mindig felírhatók

$$u(x, t) = u^+(c_L t - x) + u^-(c_L t + x) \quad (4.12)$$

alakban, vagyis a pozitív és a negatív tengely irányában c_L sebességgel haladó impulzusok szuperpozíciójaként, ahol c_L -t a (4.9) összefüggéssel definiáltuk.

- A rúdban haladó rezgésimpulzusok a me rev lezárásról -1 -szeres, a szabadon hagyott lezárásról $+1$ -szeres amplitúdóval verődnek vissza.
- A két végén megfogott végtelen rúd longitudinális szabadrezgéseit

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \psi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \sin k_n x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos\left(\frac{n c_L \pi}{L} t + \phi_n\right) \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

alakú szuperpozícióval írhatók fel, ahol az egyes tagok az alapharmonikus $f_1 = c_L/2L$ frekvenciájának többszörösein megjelenő állóhullámok.

A húre gyenlet megoldásához képest újdonság, hogy a rudak esetében van értelme vizsgálnunk a szabadon hagyott végű rudak szabadrezgéseit is. Két új esetet különböztethetünk meg:

1. A rúd mindkét vége erőmentes.
2. A rúd egyik vége be van fogva, a másik erőmentes.

A két végén szabadon hagyott rúd módusai

Vizsgáljuk először az első esetet. A rúd bal és jobb végpontján a σ feszültségből származó F_1 és F_2 erők (4.11) szerint az elmozdulás deriváltjával arányosak, a zérus erő tehát zérus elmozdulás deriváltat eredményez mindkét oldalon. Ha a húr elmozdulásának helyfüggését általánosan

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (4.14)$$

alakban keressük, akkor a bal oldali $\psi'(0) = 0$ feltétel az $A = 0$ értékhez vezet, a jobb oldali $\psi'(L) = 0$ feltételt kiírva pedig a

$$-B \sin(kL) = 0 \quad (4.15)$$

kitételhez jutunk, ahonnan $kL = n\pi$ és $n \in \mathbb{Z}^+$. Összefoglalva: A két végén szabadon hagyott rúd módusainak alakja

$$\psi_n(x) = \cos k_n x = \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (4.16)$$

a sajátfrekvenciák pedig

$$\omega_n = \frac{n\pi c_L}{L} \quad (4.17)$$

ahogy azt a 4.2(a). ábra mutatja.

Az egyik végén befogott, másik végén szabadon hagyott rúd módusai

Amennyiben a húr bal oldalát szabadon hagyjuk, de jobb oldalát befogjuk, vagyis $F_1 = 0$ és $u(L) = 0$, akkor a

$$\psi(L) = B \cos(kL) = 0 \quad (4.18)$$

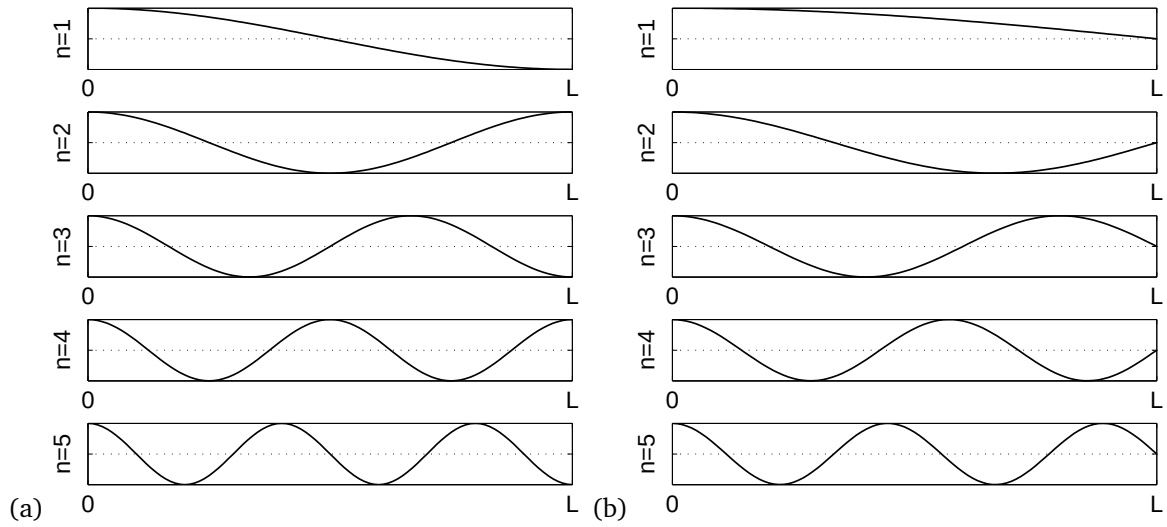
feltételhez jutunk, aminek megoldása $kL = (2n - 1)\pi/2$, $n \in \mathbb{Z}^+$, vagyis a rúd módusainak helyfüggése

$$\psi_n(x) = \cos k_n x = \cos\left(\frac{(2n - 1)\pi}{2L} x\right) \quad (4.19)$$

a sajátfrekvenciák pedig

$$\omega_n = \frac{\pi c_L (2n - 1)}{2L} \quad (4.20)$$

ahogy azt a 4.2(b). ábra mutatja.



4.2. ábra. (a) A mindkét végén szabadon hagyott rúd $\psi_n(x)$ longitudinális módusai. (b) A bal oldalán szabadon hagyott, jobb oldalán megfogott rúd $\psi_n(x)$ longitudinális módusai.

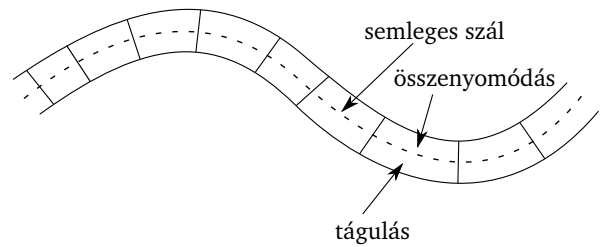
4.3. Rúd hajlító rezgése

Hajlító rezgések rudakban akkor jönnek létre, ha egy hosszához képest kis keresztmetszetű rúdra keresztirányú erővel hatunk. A gerjesztés eredményeként a rúd meghajlik, ahogy azt a 4.3. ábra mutatja. A deformációról az alábbiakat tételezzük fel:

- A deformáció során a rúd keresztmetszete változatlan alakú marad.
- A rúd középvonala, az úgynevezett semleges szál hosszváltozása zérus.

A fentiek értelmében a semleges szál alatti és fölötti hosszirányú alakváltozás ellentétes irányú: Ha a rúd lefelé hajlik, akkor a semleges szál fölötti része megnyúlik, a semleges szál alatti rész pedig összehúzódik. Mivel a keresztmetszet merev marad, az alakváltozás mértéke a semleges száltól mért y távolság lineáris függvénye. Minél messzebb vagyunk a semleges száltól, annál intenzívebb a deformáció.

A hajlítás során a húrban nemcsak σ direkt feszültségek ébrednek, hanem τ nyíró feszültségkomponensek is megjelennek. A nyíró feszültség szintén skaláris, N/m^2 dimenziójú mennyiség, a direkt feszültséggel analóg módon definiáljuk: Ha a rúd x pozíciójában $\tau(x)$ feszültség uralkodik, akkor az x pozícióban felvett dA irányított felületdarabra $dF_y(x) = \tau(x)dA$ nagyságú keresztirányú nyíró



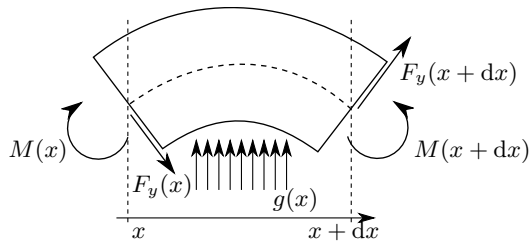
4.3. ábra. Rúd hajlító rezgése. A deformáció során a rúd keresztmetszete nem deformálódik, csak elmozdul.

erő hat.

4.3.1. A mozgásegyenlet levezetése

A rudak hajlító rezgéseit leíró mozgásegyenlet levezetéséhez Newton második törvényét, a nyomatékok és erők közti kapcsolatot és a Hooke-törvényt használjuk fel.

Tekintsük a rúd egy kiválasztott szegmensét, mely az x és $x + dx$ pozíciók között helyezkedik el. A szegmens deformálódását a $g(x)$ hosszegységre ható külső erő mellett a rúdban uralkodó direkt σ és keresztirányú nyíró τ feszültségek okozzák. A nyíró feszültségek a rúddarab felületein F_y nyíró erőket eredményeznek. A σ direkt feszültségek nem eredményeznek a keresztmetszetre ható hosszirányú erőket, mert a semleges szál alatt és

4.4. ábra. A rúd dx hosszú szegmensére ható külső erők, belső erők és nyomatékok

fölött fellépő húzó és nyomó feszültségek kiejtik egymást. A σ direkt feszültségek eredménye a rúd keresztmetszetére ható M forgató nyomatékok jelenléte.

Jelölje $g(x)$ a rúd egységnyi hosszú szakaszára ható keresztirányú nyíró erőt. Ennek ismeretében a rúd dx hosszú darabjára ható teljes külső erő $g(x)dx$. A rúdban fellépő τ nyíró feszültségből származó erőket a rúd bal és jobb oldalán jelölje rendre $F_y(x)$ és $F_y(x+dx)$. Feszültségből származó erőkről lévén szó, ezek irányai a felületi normálisoknak megfelelően ellentétesek. A rúdelem tömege $\rho dx A$. Ezen mennyiségek ismeretében Newton második törvényének alakja

$$g(x)dx + F_y(x+dx) - F_y(x) = \rho A dx a(x), \quad (4.21)$$

ahol a a rúdelem keresztirányú gyorsulása. A dx taggal osztva, majd a $dx \rightarrow 0$ határátmenetet elvégezve:

$$g(x) + F'_y(x) = \rho A a(x). \quad (4.22)$$

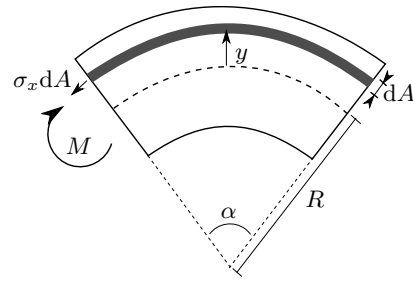
A rúdelemben jelen levő direkt σ feszültségekből eredő nyomatékokat a rúdelem bal és jobb oldalán jelölje rendre $M(x)$ és $M(x+dx)$. A τ nyíró feszültségekből származó F_y belső nyíró erők által az elemre kifejtett nyomaték $F_y(x)dx$. Kis kitérések esetén a rúdelem teljes nyomatéka (a rúdelemre ható forgatónyomatékok összege) közelítőleg zérus.¹

$$M(x+dx) - M(x) + F_y(x)dx = 0, \quad (4.23)$$

ahonnan dx -szel leosztva, majd a $dx \rightarrow 0$ határátmenetet képezve:

$$M'(x) + F_y(x) = 0 \quad (4.24)$$

¹ A $g(x)$ erőeloszlás által keltett forgatónyomatékok elhanyagolhatjuk, mivel ezt a $g(x)x$ szorzat integrálásával kapjuk, melynek eredménye $(dx)^2$ szorzót tartalmaz, ami a $dx \rightarrow 0$ határátmenetben zérust ad.



4.5. ábra. A hajlított rúdszegmensben ébredő elemi nyomatékok

A rúdelemben uralkodó σ feszültségből származó M nyomatékok kifejezéséhez tekintjük a 4.5. ábrát. A rúd középvonalától y távolságban a rúd semleges szállal párhuzamosan futó ívdarabjának nyúlása

$$\varepsilon(y) = \frac{l(y) - l_0}{l_0} = \frac{(R+y)\alpha - R\alpha}{R\alpha} = \frac{y}{R}, \quad (4.25)$$

ahol R a rúd görbületi sugara. A görbületi sugár általános $u(x)$ függvény esetén az

$$R(x) = -\frac{[1 + u'(x)^2]^{3/2}}{u''(x)} \quad (4.26)$$

összefüggéssel adódik, mely kis elfordulások ($u'(x) \ll 1$) esetén a keresztirányú elmozdulás második deriváltjából

$$R(x) \approx -\frac{1}{u''(x)} \quad (4.27)$$

módon számítható, ahonnan

$$\varepsilon(x, y) = -yu''(x). \quad (4.28)$$

A Hooke-törvény szerint a semleges száltól y távolságra uralkodó direkt feszültség

$$\sigma(x, y) = E\varepsilon(x, y) = -Eyu''(x), \quad (4.29)$$

aminek értelmében egy dA felületű szegmens által kifejtett elemi dM forgató nyomaték (az ábrán jelölt forgási irányban tekintve)

$$dM(x, y) = -\sigma(x, y)dA y = Ey^2 u''(x)dA. \quad (4.30)$$

A teljes forgatónyomatékok az elemi nyomatékok

teljes felületre vett integrálásával kapjuk meg:

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_A dM(x, y) \\ &= \int_A Ey^2 u''(x) dA \\ &= EI u''(x), \end{aligned} \quad (4.31)$$

ahol

$$I = \int_A y^2 dA \quad (4.32)$$

a rúd keresztmetszetének y irányú hajlítással szemben támasztott másodrendű nyomatéka, vagy más néven inerciája.

Fejezzük ki (4.24)-ből $F'_y(x)$ -et, és helyettesítsük be (4.22)-be:

$$g(x) - M''(x) = \rho A a(x) \quad (4.33)$$

A nyomaték második deriváltját fejezzük ki (4.31)-ből, illetve helyettesítsük az a gyorsulást az u kitérés idő szerinti második deriváltjával. Eredményül a rúd hajlító rezgését leíró differenciálegyenletet kapjuk:

$$g(x, t) - (EI(x)u''(x, t))'' = \rho A(x)\ddot{u}(x, t). \quad (4.34)$$

Amennyiben a rúd inerciája állandó, vagyis mind a Young-modulus, mind a felület keresztmetszete konstans, a rúd hajlító rezgéseit leíró egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$g(x, t) - EI u^{(4)}(x, t) = \rho A \ddot{u}(x, t). \quad (4.35)$$

4.3.2. Néhány tipikus keresztmetszet másodrendű nyomatéka

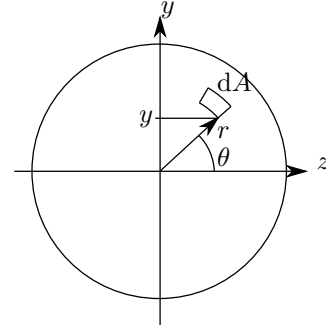
Téglalap keresztmetszet

A téglalap keresztmetszetű rúd középvonalra vonatkoztatott nyomatékának számítása

$$\begin{aligned} I &= \int_A y^2 dA = \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy dz \\ &= d \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{dh^3}{12} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Az I inercia helyett sok összefüggésben gyakran a $K = \sqrt{I/A}$ inerciasugarat használjuk, ami a téglalap keresztmetszetű rúd esetére

$$K = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{dh^3/12}{dh}} = \frac{h}{\sqrt{12}} \quad (4.37)$$



4.6. ábra. Kör keresztmetszet inerciájának számítása

Kör keresztmetszet

A kör keresztmetszetű rúd középvonalra vonatkoztatott nyomatékának számítása

$$I = \int_A y^2 dA \quad (4.38)$$

Térjünk át polár-koordinátarendszerre, így $y = r \sin \theta$, a dA felületelem kifejezése pedig $r dr d\theta$ lesz

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin^2 \theta r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \int_0^R r^2 r dr \end{aligned} \quad (4.39)$$

Kihasználva, hogy a koszinuszos tag teljes 2π periódusra vett integrálja nulla, az eredmény

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{R^4 \pi}{4} \quad (4.40)$$

ahonnan az inerciasugár

$$K = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{R^4 \pi / 4}{R^2 \pi}} = \frac{R}{2} \quad (4.41)$$

Kör keresztmetszetű cső

Az R külső és r belső átmérőjű kör keresztmetszetű cső inerciája a (4.32)-ben szereplő integráloperátor linearitása miatt számítható a külső és a belső cső inerciáinak különbségeként:

$$I = \frac{R^4 \pi}{4} - \frac{r^4 \pi}{4} = \frac{(R^2 + r^2)(R^2 - r^2)\pi}{4} \quad (4.42)$$

ahonnan az inerciasugár

$$K = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{(R^2+r^2)(R^2-r^2)\pi}{4(R^2-r^2)\pi}} = \frac{\sqrt{R^2+r^2}}{2} \quad (4.43)$$

4.3.3. A rúd hajlító szabadrezgései – diszperzió

Keressük a homogén rúdegyenlet megoldását a változók szeparálásának módszerével, vagyis legyen

$$u(x, t) = U_t(t)U_x(x) \quad (4.44)$$

A rúdegyenletbe helyettesítve:

$$-\frac{EI}{\rho A} \frac{U_x^{(4)}(x)}{U_x(x)} = \frac{\ddot{U}_t(t)}{U_t(t)} = -\omega^2 \quad (4.45)$$

Az időfüggő tag megoldása a már jól ismert

$$U_t(t) = U \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.46)$$

harmonikus időfüggvény. A helyfüggő egyenlet átalakítása

$$U_x^{(4)}(x) = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 U_x(x) \quad (4.47)$$

Aminek megoldásai a harmonikus és hiperbolikus függvények:

$$U_x(x) = A \sin kx + B \cos kx + C \operatorname{sh} kx + D \operatorname{ch} kx \quad (4.48)$$

ahol

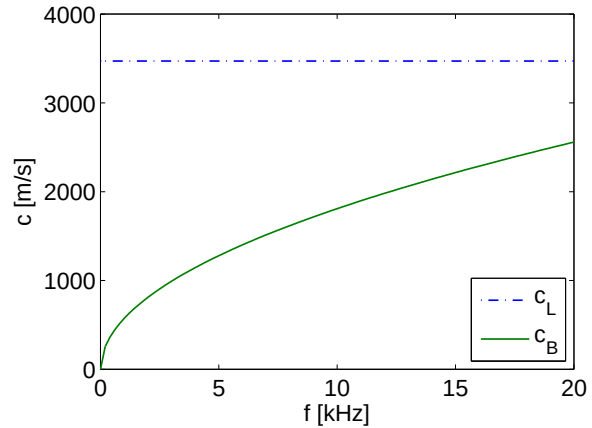
$$k^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 \quad (4.49)$$

A (4.49) összefüggés a k hullámszám és az ω frekvencia közti kapcsolatot teremti meg, vagyis a rezgés terjedési sebességét definiálja. Kihasználva, hogy a hullámszám és a sebesség kapcsolata $k = \omega/c_B$, a sebességre a következő kifejezést kapjuk:

$$c_B = \sqrt[4]{\frac{E}{\rho}} \sqrt[4]{\frac{I}{A}} \sqrt{\omega} = \sqrt{c_L K \omega} \quad (4.50)$$

vagyis a hajlító hullám terjedési sebessége a frekvencia négyzetgyökével arányos, amint azt a 4.7. ábra mutatja.

Ezt a tulajdonságot diszperzióknak nevezzük. Fontos fizikai tartalma az, hogy ha a rúdban egy



4.7. ábra. Hat centiméter átmérőjű rózsafa rúd hajlító rezgésének diszperziógörbéje. A kék vonal a longitudinális rezgés sebességét, a zöld görbe a hajlító hullám frekvenciafüggő sebességét ábrázolja.

elmozdulásimpulzust ébresztünk, akkor annak különböző frekvenciájú komponensei eltérő sebességgel terjednek. A nagyfrekvenciás komponensek gyorsabban terjednek a lassan változó összetevőknél. A frekvenciafüggő terjedési sebesség következménye, hogy az impulzus rezgésterjedés közben nem őrzi meg alakját, hanem „elkenődik”.

4.3.4. Véges hosszú rúd hajlító módusai

A rudak hajlító rezgéseit leíró (4.35) egyenlet alapvetően eltér a longitudinális hullámegyenlettől, hiszen az elmozdulás hely szerinti negyedik deriváltját is tartalmazza, vagyis térben negyedrendű. A negyedik derivátnak számos fontos következménye van. Egyrészt a térbeli peremfeltételeket négy megkötéssel kell megadnunk, ami a véges rúd két végén definiált két-két peremfeltétellel realizálható. A másik fontos következmény a módusok hullámszámai és sajátfrekvenciái közti összefüggés lesz.

Peremfeltételek

A megoldáshoz négy peremfeltételt kell használnunk, melyeket az alábbi fizikai mennyiségek definiálnak:

- Az $u(x)$ keresztirányú elmozdulás

Egyszerű alátámasztás, $u(0) = 0, M(0) = 0$



Merev befogás, $u(0) = 0, \phi(0) = 0$



Szabad rúdvég, $F(0) = 0, M(0) = 0$



4.8. ábra. Peremfeltétel-típusok rúd hajlító rezgése esetén

- A $\phi(x) = u'(x)$ szögelfordulás
- Az $M(x) = EIu''(x)$ forgatónyomaték
- Az $F(x) = -M'(x) = -EIu'''(x)$ keresztirányú erő.

A megoldásnál a rúd mindkét oldalán két-két peremfeltételt definiálunk, melyek tipikusan a 4.8. ábrán megjelenített három esetből kerülnek ki. Egyszerű alátámasztás esetén a rúd vége nem tud elmozdulni, de nyomaték sem hat rá. A teljesen merev megfogás esetén a rúdvégzördés sem elmozdulni, sem elfordulni nem tud. A szabadon hagyott rúdvégre sem erő, sem forgatónyomaték nem hat.

Egyszerű alátámasztás

Tekintsük először az egyszerű alátámasztás esetét, mely során a rúd bal és jobb oldali elmozdulása zérus, illetve sem a bal, sem a jobb oldalra nem fejtünk ki forgatónyomatékokat.

A bal oldali elmozduláskényszer szerint, a (4.48) egyenlet alapján

$$u(0) = B + D = 0 \quad (4.51)$$

a bal oldali zérus nyomaték szerint

$$M(0) = EIu''(0) = 0 \Rightarrow -D + B = 0 \quad (4.52)$$

(4.51) és (4.52) alapján $B = D = 0$.

A jobb oldali elmozduláskényszerből kiindulva

$$u(L) = A \sin(kL) + C \operatorname{sh}(kL) = 0 \quad (4.53)$$

a jobb oldali zérus nyomaték feltétel szerint pedig

$$u''(L) \propto -A \sin(kL) + C \operatorname{sh}(kL) = 0 \quad (4.54)$$

A lehetséges megoldásokhoz képezzük (4.53) és (4.54) különbségét:

$$2A \sin(kL) = 0 \quad (4.55)$$

ahonnan a lehetséges hullámszámok: $k_n = n\pi/L$, ahol $n = 1, 2, \dots$

Másik lehetőségként képezhetjük (4.53) és (4.54) összegét, de az így adódó

$$2C \operatorname{sh}(kL) = 0 \quad (4.56)$$

egyenletnek nincsen nemtriviális, azaz konstans zérus elmozdulást eredményezőtől különböző megoldása.

Egyszerű alátámasztás esetén tehát a rúd módusai

$$\psi_n(x) = \sin(k_n x), \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (4.57)$$

alakúak, a hozzájuk tartozó sajátfrekvenciák pedig

$$\omega_n = c_L K k_n^2 = c_L K \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad (4.58)$$

Figyelemre méltó, hogy bár a módusalakok megegyeznek a befogott húr vagy a mindkét végén megfogott, longitudinálisan rezgő rúd módusalakjaival, a sajátfrekvenciák ezennel a módusszámmal nem egyenesen arányosan, hanem négyzetesen növekednek.

Szabad-szabad lezárás

Tekintsük most azt az esetet, mikor a rúd mindkét végét szabadon hagyjuk, vagyis sem erővel, sem nyomatékkal nem hatunk rá. Ez a peremfeltétel-típus jó közelítéssel írja le a rugalmasan alátámasztott marimbarudak esetét. A peremfeltételeink ekkor:

$$\begin{aligned} M(0) \propto u''(0) &= 0, & M(L) \propto u''(L) &= 0 \\ F(0) \propto u'''(0) &= 0, & F(L) \propto u'''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

A második deriváltakat tartalmazó nyomatékfeltétel $x = 0$ -ra való alkalmazása (a kiugró k -hatványok mellőzésével):

$$\begin{aligned} u''(0) \propto -A \sin(0) - B \cos(0) \\ + C \operatorname{sh}(0) + D \operatorname{ch}(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

ahonnan $B = D$. A harmadik deriváltakat tartalmazó erőfeltétel alakja

$$u'''(0) \propto -A \cos(0) + B \sin(0) + C \operatorname{ch}(0) + D \operatorname{sh}(0) = 0 \quad (4.61)$$

ahonnan $A = C$. A helyettesítések elvégzésével a kitérésünk immár

$$u(x) = A [\sin kx + \operatorname{sh} kx] + B [\cos kx + \operatorname{ch} kx] \quad (4.62)$$

alakú.

Alkalmazzuk a nyomatékfeltételt az $x = L$ pozícióban:

$$u''(L) \propto A [-\sin(kL) + \operatorname{sh}(kL)] + B [-\cos(kL) + \operatorname{ch}(kL)] = 0. \quad (4.63)$$

ahonnan

$$B = A \frac{-\sin(kL) + \operatorname{sh}(kL)}{\cos(kL) - \operatorname{ch}(kL)} \quad (4.64)$$

Alkalmazzuk az erőfeltételt az $x = L$ pozícióban:

$$u'''(L) \propto A [-\cos(kL) + \operatorname{ch}(kL)] + B [\sin(kL) + \operatorname{sh}(kL)] = 0. \quad (4.65)$$

ahonnan

$$B = A \frac{\cos(kL) - \operatorname{ch}(kL)}{\sin(kL) + \operatorname{sh}(kL)} \quad (4.66)$$

(4.64)-et és (4.66)-ot egyenlővé téve

$$\frac{-\sin(kL) + \operatorname{sh}(kL)}{\cos(kL) - \operatorname{ch}(kL)} = \frac{\cos(kL) - \operatorname{ch}(kL)}{\sin(kL) + \operatorname{sh}(kL)} \quad (4.67)$$

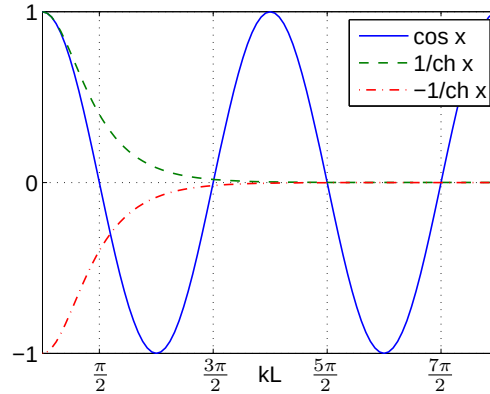
A nevezőkkel keresztbe szorozva, valamint kihasználva a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ és $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ azonosságokat

$$0 = 2 [1 - \cos(kL) \operatorname{ch}(kL)] \quad (4.68)$$

illetve átrendezve

$$\cos(kL) = \frac{1}{\operatorname{ch}(kL)} \quad (4.69)$$

A transzcendens (4.69) egyenlet közelítő megoldásait viszonylag könnyű megtalálni. tekintve,



4.9. ábra. A szabad-szabad és szabad-merev lezárásokhoz tartozó transzcendentális (4.69) és (4.76) egyenletek grafikus megoldása

hogy a ch függvény exponenciálisan tart a végtelenhez, reciproka zérushoz tart. Ezek szerint nagy hullámszámok esetére teljesülnie kell a $\cos kL \approx 0$ egyenletnek, ami szerint nagy n -ekre

$$k_n L = \frac{\pi}{2} [5, 7, 9, \dots] \quad (4.70)$$

Az alacsonyabb k értékekre a 4.9. ábrán látható grafikus megoldáshoz kell folyamodnunk, ami szerint – a $k = 0$, zenei szempontból érdektelen eseten felül – egyetlen egyéb megoldás a $k_n \approx 3,0112\pi/2L$. Összefoglalva:

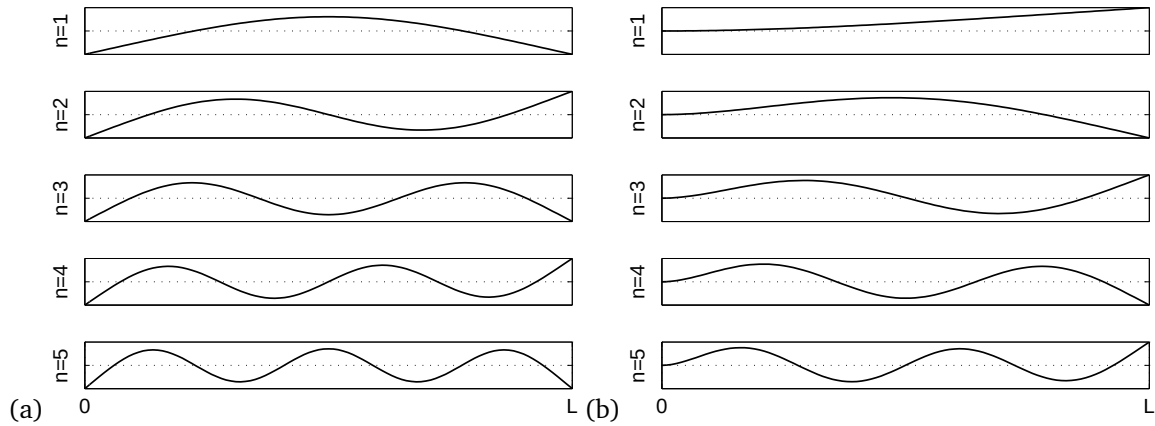
$$k_n = \frac{\pi}{2L} [3,0112, 5, 7, 9, \dots] \quad (4.71)$$

ahonnan a sajátfrekvenciák

$$\omega_n = c_L K \frac{\pi^2}{4L^2} [3,0112^2, 5^2, 7^2, 9^2, \dots] \quad (4.72)$$

Ez esetben tehát a rúd sajátfrekvenciáit a páratlan számok négyzetei írják le, de az alaphang az $n \approx 3$ értékhez tartozik.

A rúd hajlító módusait a 4.10(a) ábra mutatja. Megfigyelhető, hogy a módusalakok a rúd két szélén a lokális maximumokhoz képest erősebb kilengéseket mutatnak. Felismerhetjük továbbá, hogy a páros rendszámú módusalakoknak a rúd közepén csomópontjuk van, amiből következik, hogy a rúdat az $L/2$ pozícióban megütve, a páros módusok nem vesznek részt a válaszban. Az $L/3$, $L/4$ stb. arányok esetére ez a jelenség már csak erős közelítésként áll fenn.



4.10. ábra. (a) A mindkét végén szabadon hagyott rúd hajlító módusai. (b) A bal oldalon megfogott, jobb oldalon szabadon hagyott rúd hajlító módusai.

Amennyiben a módusokat úgy normáljuk, hogy maximális abszolút elmozdulásuk $|\psi_n(L)| = \sqrt{2}$ legyen, akkor a normanégyszetük $\|\psi_n\|^2 = L/2$.

4.1. példa Homogén rúd felhangjai

Egy homogén, állandó keresztmetszetű farudat ütéssel gerjesztünk. Az alaphanghoz képest milyen hangközök szólalnak meg?

A (4.72) képlet alapján az első felhang alaphanghoz viszonyított frekvenciaaránya

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{5}{3,0112} \right)^2 \quad (4.73)$$

amihez tartozó hangmagasság-eltérés

$$1200 \log_2 \left(\frac{5}{3,0112} \right)^2 = 1756 \text{ cent} \quad (4.74)$$

ami egy tiszta oktávnak és 556 centnek felel meg. Az 556 cent a tiszta kvartnál 58 centtel, vagyis egy fél félhanggal magasabban szól, ami meglehetősen hamis hangot eredményez.

A második felhang alaphanghoz viszonyított hangmagassága 2920 cent, ami két tiszta oktávnak és a tiszta kvartnál 23 centtel magasabb hamis kvartnak felel meg.

A harmadik felhang három tiszta oktáv és egy 13 centnyivel szűk (nagy) nagyszekundnyi távolságra van az alaphangtól.

Merev-szabad lezárás

A gyakorlati alkalmazásokban és hangszerekben is igen gyakran fordul elő a merev-szabad lezárás, mikor a rúd $x = 0$ -ban teljesen be van fogva, vagyis mind elmozdulása, mind szögelfordulása zérus, illetve $x = L$ -ben szabadon van hagyva, vagyis sem erővel, sem nyomatékkal nem terheljük. Az állapotot leíró peremfeltételek

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, & u''(L) &= 0 \\ u'(0) &= 0, & u'''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

A szabad-szabad esethez hasonlóan könnyen végigvezethető a megoldás, végeredményként a megfelelő hullámszámokra az alábbi transzcendentális egyenletet kapjuk:

$$\cos(kL) = \frac{-1}{\text{ch}(kL)} \quad (4.76)$$

A (4.76) grafikus megoldása itt is kiolvasható a 4.9. ábrából. A megfelelő hullámszámok sorban

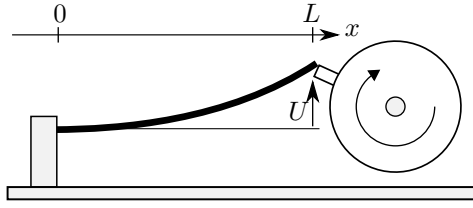
$$k_n = \frac{\pi}{2L} [1,194, 2,985, 5, 7, 9, \dots] \quad (4.77)$$

ahonnan a sajátfrekvenciák

$$\omega_n = c_L K \frac{\pi^2}{4L^2} [1,194^2, 2,985^2, 5^2, 7^2, 9^2, \dots] \quad (4.78)$$

A módusalakok kifejezése

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= A [\sin kx - \text{sh } kx] \\ &\quad + B [\cos kx - \text{ch } kx] \end{aligned} \quad (4.79)$$



4.11. ábra. Büttykös harangjáték

ahol

$$B = -A \frac{\sin(kL) + \text{sh}(kL)}{\cos(kL) + \text{ch}(kL)} \quad (4.80)$$

A módusalakokat a 4.10(b) ábra mutatja. Amennyiben a módusokat úgy normáljuk, hogy maximális abszolút elmozdulásuk $|\psi_n(L)| = \sqrt{2}$ legyen, akkor a normanégyszetük $\|\psi_n\|^2 = L/2$.

4.3.5. Büttykös harangjáték

Pengetett rudak zenei alkalmazására az egyik legismertebb példa a 4.11. ábrán látható büttykös harangjáték, melynek forgódobján levő büttykök különböző hosszúságú és vastagságú fémrudacskákat pengetnek meg. Mivel a forgódobot lassan forgatjuk, feltételezhetjük, hogy a megfeszített rudacskák álló helyzetből, adott kezdeti elmozdulásról kezdik rezgésüket.

A kezdeti feltétel

A kezdeti elmozdulás $u_0(x)$ helyfüggését egyértelműen meghatározza a rudacska végpontjának $u_0(L) = U$ elmozdulása. A kezdeti feltétel természetesen kielégíti a statikus ($\ddot{u} = 0$) rúdegyenletet:

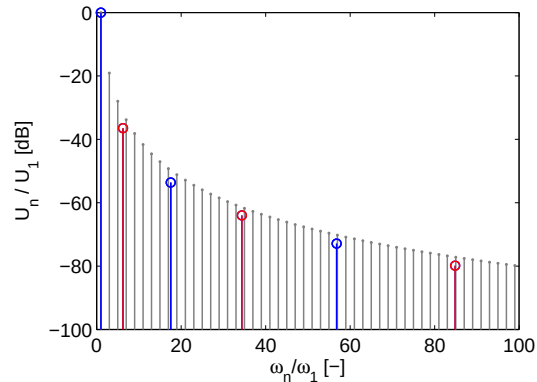
$$c_L^2 K^2 u_0^{(4)}(x) = 0 \quad (4.81)$$

A megoldást egyszerűen harmadfokú polinom alakban kereshetjük:

$$u_0(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \quad (4.82)$$

A rudacska bal oldala mereven be van fogva, vagyis mind $u_0(0)$ elmozdulása, mind $u_0'(0)$ szögelfordulása zérus. Innen $A = B = 0$. A rudacska jobb oldalára nyomatókkal nem hat a büttyök ($u_0''(L) = 0$), ahonnan $D = -C/3L$, vagyis

$$u_0(x) = Cx^2 \left(1 - \frac{x}{3L}\right) \quad (4.83)$$



4.12. ábra. A büttykös harangjáték modális amplitúdói. A kék vonalak a pozitív, a piros vonalak a negatív értékeket jelölik. A szürke vonalak az azonos alaphangon megszólaló, középen pengetett ideális húr spektrumvonalait ábrázolják.

a jobb oldali elmozdulás pedig $u_0(L) = U$, ahonnan

$$u_0(x) = \frac{3}{2}U \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{3L}\right) \quad (4.84)$$

A szabadrezgés

Az álló helyzetből, adott kezdeti feltétellel indított szabadrezgés alakja

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \psi_n(x) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (4.85)$$

Az $\dot{u}(x, 0) = 0$ zérus kezdeti sebességből következik a $\varphi_n = 0$, a kezdeti elmozdulás kifejezése pedig

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \psi_n(x) \quad (4.86)$$

ahonnan az U_n együtthatók kifejezése

$$U_n = \frac{\langle \psi_n, u_0 \rangle}{\|\psi_n\|^2} = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \psi_n(x) dx \quad (4.87)$$

Az integrál elvégzése harmadfokú polinom és harmonikus, illetve hiperbolikus függvények szorzatának integrálását igényli, ami parciális integrálással analitikusan is elvégezhető. Az eredményül kapott U_n együtthatókat a 4.12. ábra mutatja. Az ábrán

kék vonalak jelölik a pozitív, piros vonalak a negatív U_n értékeket. Összehasonlításként felvázoltuk a középen pengetett ideális húr spektrális komponenseit is.

Figyelemre méltó, hogy míg a középen pengetett ideális húrnak az ábrázolt frekvenciáskálán ötven módusa van, a pengetett harangjátéknak mindössze hat. Megjegyezzük, hogy 200 Hz alaphangfrekvenciájú rezgés esetén az ábrázolt tartomány a teljes hallható tartományt lefedi. A módusok amplitúdói nagyságrendileg megegyeznek a gitárhúr spektrális amplitúdóival, vagyis a frekvencia négyzetével arányosan csökkennek. Ez természetesen az n módusszám negyedik hatványával való csökkenésnek felel meg.

4.2. példa Harangjáték

Egy kis kézi „tekerős” harangjáték forgó dobján elhelyezett büttyök az állórészbe befogott apró acélrudacsákat pengetnek meg. A kiválasztott rudacsánk 1,5 cm hosszú és 0,2 mm vastag. Milyen alaphangfrekvencián szólal meg a megpengetett rudacska? (az acél Young-modulusa 200 GPa.) Mely frekvenciákon jelentkezik a rudacska első három felhangja?

A rudacska befogási feltétele merev-szabad, ami szerint a sajátfrekvenciák

$$f_n = \sqrt{\frac{E}{\rho}} K \frac{\pi}{8L^2} [1,194^2, 2,985^2, 5^2, 7^2, \dots] \quad (4.88)$$

Az acélrudacska inerciasugara $K = h/\sqrt{12} = 5,77 \cdot 10^{-5}$ m, az alaphangfrekvencia innen $f_1 = 727$ Hz.

A sajátfrekvenciák a képlet szerint $f_2 = 4\,544$ Hz, $f_3 = 12\,749$ Hz, $f_4 = 24\,987$ Hz.

4.4. Rudak hangolása

Láttuk, hogy mind a szabad-szabad peremfeltétellel, mind a merev-szabad peremfeltétellel definiált homogén rúd sajátfrekvenciái az alaphang irracionális többszörösein jelennek meg. A szabad-szabad lezárás esetén például az első felhang frekvenciája az alaphang $5^2/3,0112^2 \approx 25/9$ -szerese, ami két oktávnak és egy kicsit hamis bővített kvartnak (558 cent) felel meg. Látható tehát, hogy a téglatest alakú homogén farudak önmagukban is hamisan szól-

nak, ezért zenei célokra csak korlátozottan alkalmasak.

A homogén geometriájú rúd rövidítésével vagy vastagításával növelhető a rúd alaphangfrekvenciája, de a felhangok egymáshoz képesti aránya nem, vagyis a rúd önmagához képest hamis marad. A rúd hangolásának fontos eszköze a rúd helyfüggő vékonyítása. A továbbiakban azt vizsgáljuk meg, hogy egy homogén rúd enyhe helyfüggő keskenyítésével miként változnak a rúd sajátfrekvenciái.

Az inhomogén, vagyis változó keresztmetszetű rúd harmonikus szabadrezgéseit leíró differenciálegyenlet alakja

$$c_L^2 \frac{(I(x)u''(x))''}{A(x)} = \omega^2 u(x) \quad (4.89)$$

ahol $I(x)$ a helyfüggő inercia, $A(x)$ pedig a helyfüggő keresztmetszeti felület. A homogén rúd esetén a differenciálegyenlet lényegesen egyszerűbb

$$c_L^2 K^2 u^{(4)}(x) = \omega^2 u(x) \quad (4.90)$$

ahol K a konstans inerciasugár. Vezessük be a (4.90) homogén differenciálegyenletre az alábbi általános jelölést:

$$\mathcal{A}_0 \{u\} = \gamma u \quad (4.91)$$

ahol $\mathcal{A}_0$ az egyenlet bal oldalán kifejtett differenciáloperátort jelöli, mely az argumentumát négyszer deriválja, majd a $c_L^2 K^2$ konstanssal szorozza. A $\gamma = \omega^2$ mennyiség az $\mathcal{A}_0$ differenciáloperátor egy sajátértéke, melyhez tartozó sajátfüggvény $u(x)$.

Tudjuk, hogy az $\mathcal{A}_0$ operátor sajátfüggvényei a homogén rúd $\psi_n(x)$ módusalakjai, a hozzájuk tartozó $\gamma_n = \omega_n^2$ sajátértékek pedig az ω_n sajátfrekvenciák négyzetei:

$$\mathcal{A}_0 \{\psi_n\} = \gamma_n \psi_n \quad (4.92)$$

Ha a rudat inhomogén jelleggel keskenyítjük, akkor a differenciáloperátor meg fog változni: megjelennek benne az $u(x)$ megoldásfüggvény második és harmadik deriváltjai, az $I(x)$ inerciafüggvény legfeljebb második deriváltjai, valamint a nevezőben a helyfüggő $A(x)$ tag is. Értelemszerűen változnak a sajátfüggvények és az azokhoz tartozó sajátértékek is. Ezek a változások annyira bonyolultak, hogy az inhomogén egyenlet analitikus megoldására nincs lehetőségünk.

4.4.1. A perturbációmódszer

Tegyük fel azonban, hogy a rudat csak igen kis mértékben keskenyítjük. Vezessük be a keskenyítés mértékére az ϵ vágási mélységet, ami lényegesen kisebb a rúd magasságánál. Ekkor feltételezhetjük, hogy mind a differenciáloperátor, mind a megoldásfüggvény, mind a sajátérték az ϵ vágási mélységgel lineárisan változik:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &\rightarrow \mathcal{A}_0 + \epsilon \delta \mathcal{A} \\ \psi_n &\rightarrow \psi_n + \epsilon \delta \psi \\ \gamma_n &\rightarrow \gamma_n + \epsilon \delta \gamma\end{aligned}\quad (4.93)$$

Helyettesítsük be a változásokat az eredeti (4.92) differenciálegyenletbe:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 \{\psi_n + \epsilon \delta \psi\} + \epsilon \delta \mathcal{A} \{\psi_n + \epsilon \delta \psi\} \\ = (\gamma_n + \epsilon \delta \gamma) (\psi_n + \epsilon \delta \psi)\end{aligned}\quad (4.94)$$

használjuk ki az operátorok linearitását, valamint hagyjuk el az elhanyagolható ϵ^2 -es tagokat:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 \{\psi_n\} + \epsilon \mathcal{A}_0 \{\delta \psi\} + \epsilon \delta \mathcal{A} \{\psi_n\} \\ = \gamma_n \psi_n + \epsilon (\delta \gamma \psi_n + \gamma_n \delta \psi)\end{aligned}\quad (4.95)$$

(4.92) felhasználásával egyszerűsíthetünk:

$$\mathcal{A}_0 \{\delta \psi\} + \delta \mathcal{A} \{\psi_n\} = \delta \gamma \psi_n + \gamma_n \delta \psi \quad (4.96)$$

Használjuk ki, hogy a sajátfüggvény $\delta \psi$ megváltozása a rúd egy rezgésalakja, ami mindig felírható a módusok szuperpozíciójaként:

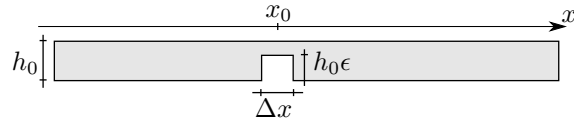
$$\delta \psi = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \psi_m \quad (4.97)$$

amit (4.96)-ba behelyettesítve

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \mathcal{A}_0 \{\psi_m\} + \delta \mathcal{A} \{\psi_n\} = \delta \gamma \psi_n + \gamma_n \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \psi_m \quad (4.98)$$

Egyszerűsítsünk ismét (4.92) felhasználásával, valamint szorozzuk (4.98) mindkét oldalát skalárisan ψ_n -nel, és használjuk ki a módusok ortogonalitását:

$$\begin{aligned}\alpha_n \gamma_n \|\psi_n\|^2 + \langle \psi_n, \delta \mathcal{A} \{\psi_n\} \rangle \\ = \delta \gamma \|\psi_n\|^2 + \gamma_n \alpha_n \|\psi_n\|^2\end{aligned}\quad (4.99)$$



4.13. ábra. Téglalap keresztmetszetű rúd lokális keskenyítése

ahonnan a lehetséges egyszerűsítések elvégzése után a sajátérték változása az alábbi alakban fejezhető ki:

$$\delta \gamma = \frac{\langle \psi_n, \delta \mathcal{A} \{\psi_n\} \rangle}{\|\psi_n\|^2} \quad (4.100)$$

4.4.2. Alkalmazás téglalap keresztmetszetű rúdra

A továbbiakban általános eredményünket egy konkrét esetre alkalmazzuk. Tekintsük a téglalap keresztmetszetű rúd esetét, melynek szélessége w , magassága pedig $h(x)$. Ekkor az inercia és a felület kifejezése

$$\begin{aligned}I(x) &= \frac{h^3(x)w}{12} \\ A(x) &= h(x)w\end{aligned}\quad (4.101)$$

Tegyük fel továbbá, hogy a rúd helyfüggő vékonyítását egy négyszögfüggvény írja le, melynek középpontja az x_0 belső pont, szélessége Δx , magassága pedig $h_0 \epsilon$ (4.13. ábra). A négyszögfüggvényt egy ekvivalens Dirac-impulzussal közelítjük, mely alatti terület $h_0 \Delta x \epsilon$:

$$h(x) = h_0 (1 - \Delta x \epsilon \delta(x - x_0)) \quad (4.102)$$

A továbbiakban feladatunk az, hogy a $h(x)$ függvényt, az $I(x)$ és $A(x)$ függvényeket behelyettesítsük a (4.89) egyenletbe, majd kifejezzük a bal oldalon megjelenő operátor ϵ -nal arányos $\delta \mathcal{A}$ tagját. Az elvi nehézséget nem okozó, de annál fáradságosabb számításokat mellőzve, az eredmény

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{A} \{u\} &= -c_L^2 K^2 \Delta x \left(2\delta(x - x_0) u^{(4)}(x) + \right. \\ &\quad \left. + 6\delta'(x - x_0) u'''(x) + 3\delta''(x - x_0) u''(x) \right)\end{aligned}\quad (4.103)$$

A $\delta \mathcal{A}$ operátor ismeretében immár lehetőségünk

nyílik a (4.100) egyenlet kiértékelésére:

$$\begin{aligned}\delta\gamma &= \frac{\langle \psi_n, \delta\mathcal{A}\{\psi_n\} \rangle}{\|\psi_n\|^2} = \frac{2}{L} \langle \psi_n, \delta\mathcal{A}\{\psi_n\} \rangle \\ &= -2c_L^2 K^2 \frac{\Delta x}{L} \left\{ 2 \int_0^L \delta(x-x_0) \psi_n(x) \psi_n^{(4)}(x) dx \right. \\ &\quad + 6 \int_0^L \delta'(x-x_0) \psi_n(x) \psi_n'''(x) dx \\ &\quad \left. + 3 \int_0^L \delta''(x-x_0) \psi_n(x) \psi_n''(x) dx \right\} \quad (4.104)\end{aligned}$$

A Dirac-delta deriváltjainak kiválasztási tulajdonsága miatt² az integrálokat könnyen elvégezhetjük:

$$\begin{aligned}\delta\gamma &= -2c_L^2 K^2 \frac{\Delta x}{L} \left\{ 2\psi_n(x_0) \psi_n^{(4)}(x_0) \right. \\ &\quad - 6 (\psi_n(x) \psi_n'''(x))' \Big|_{x_0} \\ &\quad \left. + 3 (\psi_n(x) \psi_n''(x))'' \Big|_{x_0} \right\} \quad (4.106)\end{aligned}$$

A szorzatok deriválását elvégezve az alábbi eredményt kapjuk:

$$\delta\gamma = 2c_L^2 K^2 \frac{\Delta x}{L} \left(\psi_n(x_0) \psi_n^{(4)}(x_0) - 3\psi_n'''(x_0) \right) \quad (4.107)$$

illetve a $c_L^2 K^2 \psi_n^{(4)} = \omega_n^2 \psi_n$ összefüggés felhasználásával

$$\delta\gamma = \delta\omega^2 = \frac{2\Delta x}{L} (\omega_n^2 \psi_n^2(x_0) - 3c_L^2 K^2 \psi_n''^2(x_0)) \quad (4.108)$$

Fejezzük ki végül, hogy a vékonyítás hány cent hangmagasság-eltérést okoz az egyes módusok ese-

tében:

$$\begin{aligned}1200 \log_2 \sqrt{\frac{\omega_n^2 + \epsilon \delta\omega^2}{\omega_n^2}} \\ = 600 \log_2 \left(1 + \epsilon \frac{\delta\omega^2}{\omega_n^2} \right) \approx \frac{600}{\ln 2} \epsilon \frac{\delta\omega^2}{\omega_n^2} \\ = \frac{1200}{\ln 2} \frac{\epsilon \Delta x}{L} \left(\psi_n^2(x_0) - \frac{3\psi_n''^2(x_0)}{k_n^4} \right) \quad (4.109)\end{aligned}$$

Az eredményt a 4.14. ábra mutatja az első öt módus esetére. Az ábra felső diagramja az öt módus-alakot, az alsó diagram pedig a centben kifejezett normalizált hangmagasság-eltérést mutatja. A normalizálás jelen esetben az $\epsilon = \Delta x/L = 1$ szélsőséges esetet jelenti.

Az ábrából kiolvasható, hogy a rúd középső 70 – 80%-án történő bemetszéssel a módusok frekvenciáit alacsonyíthatjuk. Ha pl. a rúd középpontján ejtünk egy mind a hossz, mind a magassághoz mérten 10%-nyi bemetszést, akkor a legalsó módus frekvenciája $\approx 5000/10/10 = 50$ centtel, a harmadik és az ötödik módus frekvenciája pedig ≈ 35 centtel csökken, míg a páros rendszámú módusok frekvenciája lényegében változatlan marad. A középső tartományon igaz, hogy a módusok frekvenciacsökkenése a módusalakok négyzetének bevágási helyen felvett értékével arányos. Ennek indoklása az, hogy a középső tartományon a módusalakok szinuszosan viselkednek, ami alapján $\psi_n'' \approx -k_n^2 \psi_n$, így a frekvenciaváltozás

$$\frac{1200}{\ln 2} \frac{\epsilon \Delta x}{L} (-2\psi_n^2(x_0)) \quad (4.110)$$

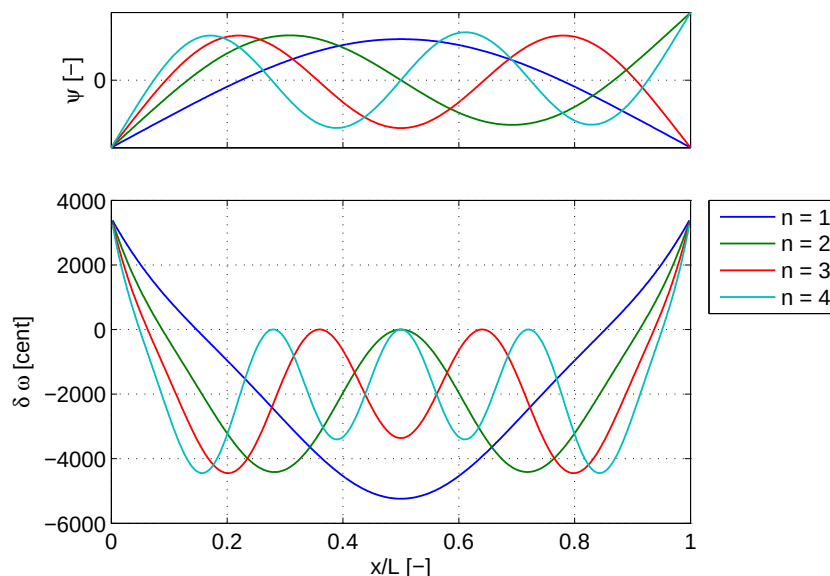
A szélső tartományon a szinuszok mellett a hiperbolikus függvények már nem elhanyagolhatóak, ami miatt nem alkalmazható a $\psi_n'' \approx -k_n^2 \psi_n$ közelítés. Elmondhatjuk viszont, hogy a szélek felé közeledve a módusok második deriváltja zérushoz kell, hogy tartson, hiszen ez a modális nyomatékokkal arányos, amik a szabadon hagyott rúd vége felé szükségszerűen zérus értékűek. Ennek értelmében a rúd végei felé a frekvenciaváltozás centben kifejezett értéke hozzávetőlegesen

$$\frac{1200}{\ln 2} \frac{\epsilon \Delta x}{L} \psi_n^2(x_0) \quad (4.111)$$

Ez az eredmény jó összhangban van azzal, hogy a széleken történő bemetszés a rúd rövidítésének is tekinthető, ami a sajátfrekvenciák növekedését eredményezi.

² Parciális integrálással könnyen igazolható, hogy

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) f(x) dx &= f(x_0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x-x_0) f(x) dx &= -f'(x_0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta''(x-x_0) f(x) dx &= f''(x_0)\end{aligned} \quad (4.105)$$



4.14. ábra. Mindkét végén szabadon hagyott rúd hajlító módusainak normalizált frekvenciaváltozása koncentrált, kis mértékű vékonyítás esetén. Az alsó ábra a $\delta f/\epsilon/(\Delta x/L)$ normalizált értékeket mutatja.

4.4.3. Marimbarúd hangolása

A szabad-szabad peremfeltétellel leírt hajlító rezgésű rúd fontos alkalmazási esete a marimbarúd. A marimbarudakat általában rózsafából készítik, aminek számunkra érdekes anyagjellemzői: $E = 1 \cdot 10^{10}$ Pa, $\rho = 830$ kg/m³.

A 4.15 ábra bal oldali ábrásora egy rózsafából kivágott, 40 cm hosszú, 6 cm széles és 4 cm magas rúd első öt módusalakját mutatja.

Marimbarúdnak azt a rudat nevezzük, amely esetében az alaphang és az első felhang frekvenciái 1 : 4 arányra, vagyis két oktávra vannak behangolva. Ezt – többek között – a 4.15 ábra jobb oldalán bemutatott módon érhetjük el. A marimbarudat itt a közepe felé egyre jobban elkeskenyítettük. A keskenyítés mértéke a rúd közepén 51%, a két szélén pedig a rúd hosszának 21%-21%-a változatlan vastagságú maradt. A beavatkozás eredményeképpen a rúd alaphangfrekvenciája 892 Hz-ről jelentősen, 481 Hz-re csökkent. Az első és második sajátfrekvenciák aránya a kívánt két oktáv, a harmadik sajátfrekvencia pedig az alaphangnál három oktávval és egy kissé bő félhanggal magasabban szólal meg.

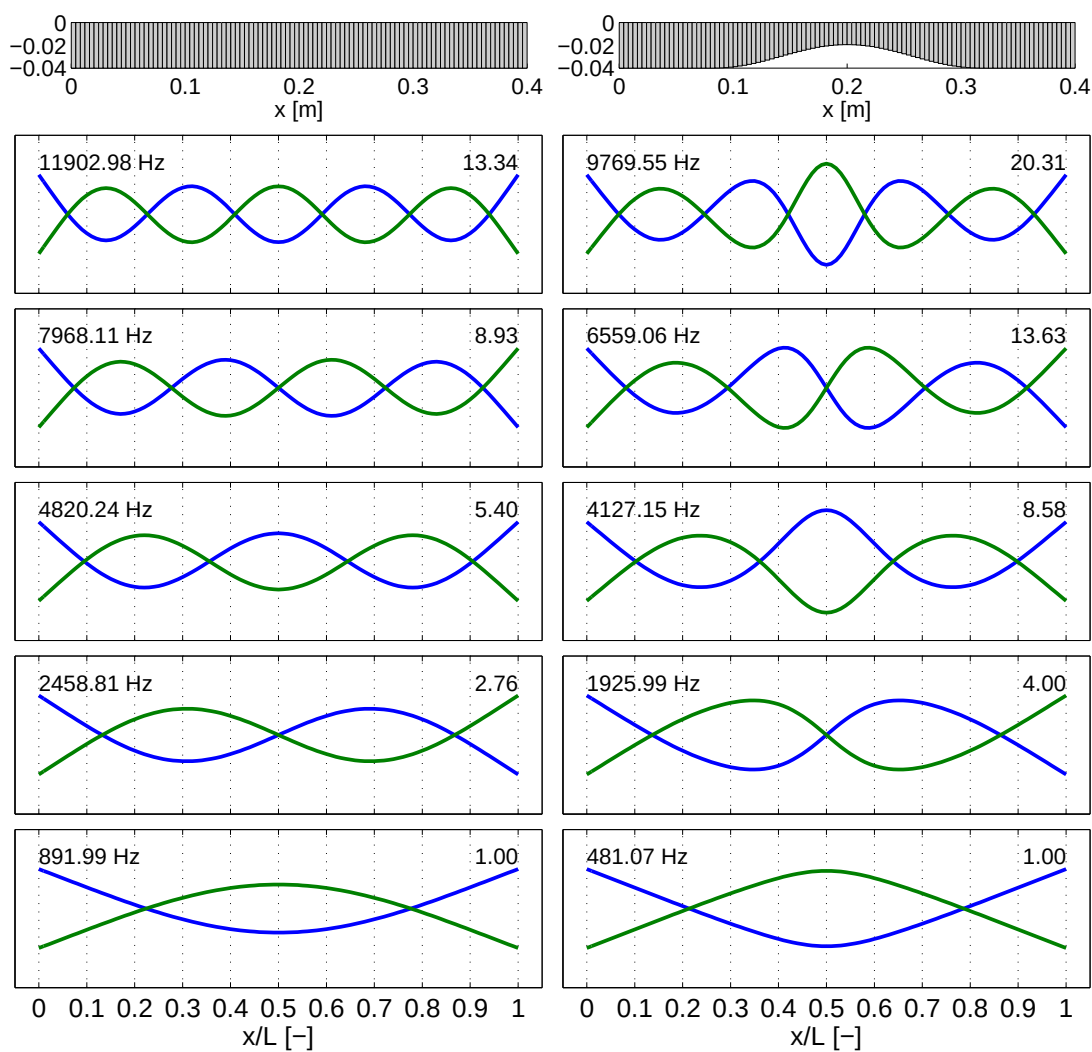
Különböző vastagságprofilok alkalmazásával a marimbarúd harmadik harmonikusa is behangolható, itt a cél általában az 1 : 10 értékhez tartozó

nagy terc hangközre történő hangolás.

A módusalakokat megfigyelve látható, hogy a hangolás nemcsak a sajátfrekvenciákat, hanem a módusalakokat is befolyásolja. A középső tartomány keskenyítésével olyan módusalakokat kapunk, melyek a közép felé nagyobb amplitúdóval rezegnek, mint a széleken. Ez azt is jelenti, hogy a rudat a középtartományban megütve, nagyobb amplitúdójú rezgéseket kelthetünk, mint a szélekhez közeli ütésekkel. Ez nem volt igaz a homogén rúd esetére, ahol a módusalakok pont a széleken mutattak nagy kilengéseket.

4.5. Merev húrok inharmonicitása

Térjünk vissza kicsit a húrok rezgéseire. A húrok-ról szóló fejezetben kizárólag ideális húrok rezgéseit vizsgáltuk. Az idealitás egyik feltétele az volt, hogy a húr nem bír önálló merevséggel, pusztán külső feszítő erő hatására képes harmonikus rezgésre. Amennyiben figyelembe vesszük a húr saját merevségét is, a húregyenletet a rudak hajlító rezgéseiből ismert negyedrendű taggal egészíthetjük



4.15. ábra. Hangolatlan rózsafarúd (bal) és marimbarúd (jobb) módusalakjai és sajátfrekvenciái. A rudak hossza 40 cm, szélességük 6 cm, a hangolatlan rúd vastagsága 4 cm. Az ábrák bal oldalán a sajátfrekvencia, jobb oldalon az alapharmonikushoz viszonyított frekvencia van feltüntetve.

ki:

$$g + Su'' - EIu^{(4)} = \mu \ddot{u} \quad (4.112)$$

Mind térben, mind időben harmonikus megoldást feltételezve

$$u(x, t) = U \sin kx \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.113)$$

amit a homogén, vagyis gerjesztésmentes húr-egyenletbe helyettesítve az alábbi diszperzió-egyenlethez jutunk:

$$Sk^2 + EI k^4 = \mu \omega^2 \quad (4.114)$$

Tegyük fel, hogy a húr az n -edik módusában rezeg, vagyis a hossza pont n félhullám jut, azaz $k = n\pi/L$. Ekkor a frekvencia kifejezése

$$\omega_n^2 = \frac{S}{\mu} \left(k^2 + \frac{EI}{S} k^4 \right) \quad (4.115)$$

illetve némi átrendezés és a $c = \sqrt{S/\mu}$ sebesség bevezetése után

$$\omega_n = \frac{nc\pi}{L} \sqrt{1 + \frac{EI}{S} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2} = n\omega_1^0 \sqrt{1 + Bn^2} \quad (4.116)$$

ahol ω_1^0 az ideális húr alapfrekvenciája,

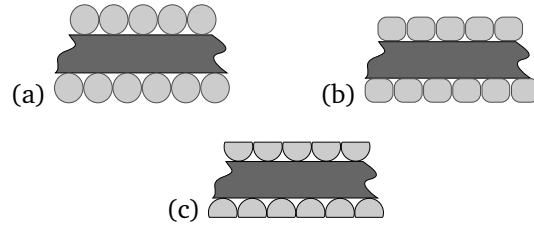
$$B = \frac{\pi^2 EI}{SL^2} \quad (4.117)$$

pedig a húr inharmonicitási állandója. Ennek értéke kör keresztmetszetű húr esetére

$$B = \frac{\pi^3 E d^4}{64 S L^2} \quad (4.118)$$

Látjuk, hogy a nem ideális, önálló merevséggel bíró húr módusai nem az alapharmonikus frekvenciájának többszörösein, hanem annál magasabban szólnak meg. Ezt a jelenséget a merev húr inharmonicitásának nevezzük. Az inharmonicitás mértéke a gyök alatti n^2 tagnak köszönhetően a módus-számmal nő, vagyis a nagy rendszámú felharmonikusok ω_n frekvenciája egyre jobban tér el az $n\omega_1^0$ értéktől.

Az inharmonicitási állandó kifejezéséből látszik, hogy az inharmonicitás mértéke az E/S aránnyal arányos, vagyis adott anyagjellemzők mellett az inharmonicitás csökkentéséhez érdemes nagy feszítő erőt alkalmazni. Ez azt jelenti, hogy pusztán az



4.16. ábra. Bevonatolt húrok három fajtájának keresztmetszeti ábrája

anyagi tulajdonságot tekintve, a jobban megfeszített, vagyis magasabb hangon megszólaló húrok inharmonicitása kisebb lesz.

A kifejezésben rendkívül fontos az átmérő negyedik hatványával változó tag. Ez azt mutatja, hogy a húr vastagításával az inharmonicitás drasztikusan növekszik. A hossz növelésével ugyan csökkenthető az inharmonicitás mértéke, de ennek általában komoly méretkorlátai vannak. Különösen nagy problémát jelent az inharmonicitás olyan mélyen szóló húroknál, melyeket méretkorlát miatt röviden kell tartani. Ezeknél az alacsony alaphfrekvenciát a húr-tömeg növelésével lehet elérni. A húr tömegének növelése az átmérő növelését kívánja meg, ami az inharmonicitást jelentősen emeli.

4.5.1. Bevonatolt húrok

A mély húrok magas inharmonicitását kiküszöbölő megoldás a bevonatolt húrok alkalmazása, vagyis tömegnövelés az aktív húrátmérő növelése nélkül. A bevonatolás során a húr egy kis d_c átmérőjű magból (core) és az arra feltekercselt d_w átmérőjű bevonó szálból (winding) készítik el. A bevonó szál lényegében csak nehezíti a húr, de a merevségből származó feszültségek és forgató nyomatékok közvetítésében nem (vagy csak elhanyagolható mértékben) játszik szerepet.

A bevonatok anyaga rendszerint réz, ezüst vagy nikkell. A gyakorlatban három fajta bevonatolási technika létezik, amint azt a 4.16. ábra mutatja.

A kör keresztmetszetű bevonat esetén a bevonó szál kör keresztmetszetű, így kis felületen csatlakozik a húrmaghoz, és – ami sokkal fontosabb – a bevonat menetei kis felületen érintkeznek egymással. Az utóbbi nagy előny, mert minimalizálja a bevonatból származó merevséget – könnyű belátni, hogy a húr hajlító mozgása során a szomszédos

menetek elváltnak egymástól, illetve a másik oldalon csak minimális mértékben nyomják össze egymást. A kör keresztmetszetű bevonatolás hátránya viszont, hogy a húr érdes felületű lesz, így jobban koptatja a húros hangszerek fogólapját és bundjait, illetve a hangszeres játéknál a húron csúszó ujjak erős surrogó hangot adnak. Gyakorlati hátrány továbbá, hogy az érdes felület mélyedéseiben könnyebben megül a piszok, ami a húr rövidebb élettartamát eredményezi.

A lekerekített téglalap keresztmetszetű bevonatolás esetében az előbb említett hátrányok csökkennek, de az inharmonicitás növekszik, hiszen a szomszédos téglalapok összenyomódás esetén nagyobb felületen közvetítik a merevségből származó feszültségeket. Ez gyakorlatilag az inerciasugár növekedéseként fogható fel.

A legdrágább bevonatolási technika a csiszolt bevonat alkalmazása. Ez azt jelenti, hogy a húr eredetileg kör keresztmetszetű bevonó szállal tekercselik körbe, majd a húr felületét préseléssel vagy csiszolással kiegyenlítik. A csiszolási technika előnyös az inharmonicitás szempontjából, nem ad surrogó hangot, illetve alig piszkolódik, viszont komoly anyagvesztéssel jár, így drága.

Mindhárom bevonatolási módszer esetében alkalmazzák a hatszög keresztmetszetű húrmagokat is a bevonat jobb tapadása érdekében.

4.3. példa Bevonatolt húr

Egy acél basszusgitárhúr hossza $L = 60$ cm, a húrban ható feszítő erő $S = 70$ N. A húr magátmérője $d_c = 0,8$ mm, a kör keresztmetszetű, szintén acél húrbevonat átmérője szintén $d_w = 0,8$ mm. Az acél sűrűsége $\rho = 7800$ kg/m³, Young modulusa $E = 200$ GPa.

Határozzuk meg a húr inharmonicitási állandóját, valamint adjuk meg, hogy hány centtel tér el az első három felharmonikus frekvenciája az ideális felharmonikus frekvenciáktól.

A húr egységnyi hosszra eső μ tömege a mag és a bevonat tömegéből adódik össze. A mag tömege

$$\mu_c = \rho \left(\frac{d_c}{2} \right)^2 \pi = 3,92 \frac{\text{g}}{\text{m}} \quad (4.119)$$

A sűrűn tekercselt bevonat középvonala $d_w/2$ távolságra fut a mag szélétől, vagyis hozzávetőlegesen $d_w + d_c$ átmérőjű köríven mozog. Az egységnyi húrhosszon befutott körívek száma $1/d_w$, ahonnan

a bevonat tömege

$$\mu_w = \rho (d_c + d_w) \pi \left(\frac{d_w}{2} \right)^2 \pi \frac{1}{d_w} \approx 24,63 \frac{\text{g}}{\text{m}} \quad (4.120)$$

ahonnan az össztömeg

$$\mu = \mu_c + \mu_w = 28,6 \frac{\text{g}}{\text{m}} \quad (4.121)$$

A húrban terjedő rezgés sebessége

$$c = \sqrt{S/\mu} \approx 49,5 \text{ m/s} \quad (4.122)$$

A húr inharmonicitási állandója

$$B = \frac{\pi^3 E d_c^4}{64 S L^2} = 1,57 \cdot 10^{-3} \quad (4.123)$$

A húr alaphangja

$$f_1 = \frac{c}{2L} \sqrt{1+B} = 41,29 \text{ Hz} \quad (4.124)$$

Az első felharmonikus frekvenciája

$$f_2 = \frac{2c}{2L} \sqrt{1+2^2 B} = 82,8 \text{ Hz} \quad (4.125)$$

az ideális oktávótól vett eltérés $1200 \log_2 \sqrt{\frac{1+2^2 B}{1+B}} = 4,1$ cent. A második felharmonikusra ez az érték $1200 \log_2 \sqrt{\frac{1+3^2 B}{1+B}} = 10,8$ cent. A harmadik felharmonikusra pedig $1200 \log_2 \sqrt{\frac{1+4^2 B}{1+B}} = 20,2$ cent.

4.5.2. A Railsback-görbe

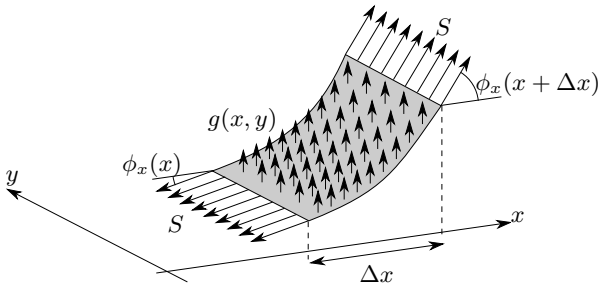
Azon húros hangszereknél, melyek húrjainak alaphangfrekvenciái széles hangtartományt fognak át, különösen fontos az inharmonicitás kezelése. Legjobb példa a zongora, melynek húrjai több mint hét oktávót fognak át, a hosszúság változása azonban nyilván meg sem közelítheti az $1 : 2^7$ arányt. Az inharmonicitás elleni védekezés két módja a hurok bevonatolása, illetve a hurok megkettőzése vagy háromszorozása. Az utóbbi technika is nyilván az inerciasugár csökkentéseként fogható fel.

Az inharmonicitás a nagyon mély és nagyon magas hurok esetében még így sem küszöbölhető ki: A legmélyebb oktávban a zongorahúr második felharmonikusa hozzávetőlegesen 25-30 centtel magasabban szólal meg az oktávnál, és ugyanez igaz

a legfelső oktáv tartományában is. A különböző húrok együttes megszólalása esetén kialakuló lebegést elkerülendő, a zongora hangközeit szándékosan tágabbra hangolják a temperált hangközöknél. Az egyes billentyűk temperált hangolásához mért eltérését a Railsback-görbe adja meg, ami a legmélyebb hangoknál -40 centról indul, az egyvonalas C és a 440 Hz-es kamara A hang között ≈ 0 cent körül halad, a legmagasabb oktávban pedig $+40$ centet ér el.

5. fejezet

Membránok rezgései



5.1. ábra. Membrándarabra ható erők

5.1. Az ideális membrán egyenlete

Rezgéstani szempontból a membrán kétdimenziós húr. Az ideális húrral analóg módon a membrán olyan rezgő rendszer, mely önálló merevséggel nem bír, pusztán külső feszítő erő jelenlétében képes rezgésvégre.

A membránokban ható feszítő erőt jelölje S . Ez hosszegységre eső feszítő erőt jelent, mértékegysége N/m .

Tekintsük a kitérített membrán x, y pozícióban elhelyezkedő, $\Delta x \times \Delta y$ méretű darabját, ahogy az 5.1. ábra mutatja. A membrándarabra $g(x, y)$ keresztirányú külső gerjesztő erő hat. A $g(x, y)$ mennyiség felületegységre eső erőt jelöl, mértékegysége N/m^2 . A teljes membrándarabra ható külső erő ezek szerint $g(x, y)\Delta x\Delta y$.

A hosszirányú S feszítő erő x tengellyel bezárt hajlásszöge az elem bal oldalán $\phi_x(x)$, jobb oldalon $\phi_x(x + \Delta x)$. A membránra ható feszítő erők keresztirányú komponense a bal oldalon $-S\Delta y \sin \phi_x(x)$, a jobb oldalon pedig $S\Delta y \sin (\phi_x(x + \Delta x))$.

Bár az ábra nem jelöli, természetesen az y tengelytől való elfordulásokból is származnak keresztirányú erőkomponensek. Ezeket az $y + \Delta y$ pozícióban jelölje $S\Delta x \sin \phi_y(y + \Delta y)$, az y pozícióban pedig $-S\Delta x \sin \phi_y(y)$. A membrándarab felületegységre eső tömege σ [kg/m^2]. Ezen mennyiségek ismeretében felírható a membrándarabra Newton második törvénye:

$$\begin{aligned} & g(x, y, t)\Delta x\Delta y \\ & + S\Delta y [\sin \phi_x(x + \Delta x, y, t) - \sin \phi_x(x, y, t)] \\ & + S\Delta x [\sin \phi_y(x, y + \Delta y, t) - \sin \phi_y(x, y, t)] \\ & = \sigma \Delta x\Delta y a(x, y, t), \end{aligned} \quad (5.1)$$

ahol $a(x)$ a membrándarab keresztirányú gyorsulását jelöli. Kis szögelfordulások esetén $\sin \phi_x \approx \phi_x$, ami szerint (a $\Delta x\Delta y$ felületelemmel végigosztva)

$$g(x, y) + S \left(\frac{\partial \phi_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y(x, y)}{\partial x} \right) = \sigma a(x, y) \quad (5.2)$$

A membrán szögelfordulásai kifejezhetők a keresztirányú $u(x, y)$ kitérésfüggvény segítségével. Kis szögek esetén

$$\phi_x(x, y) \approx \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad \phi_y(x, y) \approx \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}. \quad (5.3)$$

Behelyettesítve (5.3)-at az (5.2) Newton-törvénybe, valamint a keresztirányú a gyorsulás helyett az u kitérés idő szerinti második deriváltját írva, az alábbi membránegyenletet kapjuk:

$$g(x, y, t) + S\nabla^2 u(x, y, t) = \sigma \ddot{u}(x, y, t), \quad (5.4)$$

ahol ∇^2 a Laplace-operátor, aminek kifejtése

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (5.5)$$

5.2. A membránegyenlet megoldása

5.2.1. A téglalap alakú membrán módusai

Gyakorlati szempontból nem, de az elvi megoldás szempontjából lényeges az $L_x \times L_y$ méretű, téglalap alakú membrán esete. Ekkor az $u(x, y, t)$ megoldást keressük három függvény szorzataként

$$u(x, y, t) = u_X(x)u_Y(y)u_T(t) \quad (5.6)$$

Ezt az egyenletet a membránegyenletbe helyettesítve, majd a teljes elmozdulással végigosztva az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\underbrace{\frac{d^2 u_X(x)}{dx^2} \frac{1}{u_X(x)}}_{-k_x^2} + \underbrace{\frac{d^2 u_Y(y)}{dy^2} \frac{1}{u_Y(y)}}_{-k_y^2} = \underbrace{\frac{1}{c^2} \frac{d^2 u_T(t)}{dt^2} \frac{1}{u_T(t)}}_{-k^2}. \quad (5.7)$$

A k_x , k_y és k konstansokat azért vezettük be, mert a szeparált egyenlet minden tagja konstans, hiszen az egyenlőség csak ekkor teljesülhet. A három hullámszám között fennáll a

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (5.8)$$

összefüggés.

A három taghoz tartozó egyenletek megoldásai rendre

$$u_X(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x) \quad (5.9)$$

$$u_Y(y) = C \sin(k_y y) + D \cos(k_y y) \quad (5.10)$$

$$u_T(t) = E \sin(\omega t) + F \cos(\omega t), \quad (5.11)$$

ahol $\omega = kc$ a rezgés körfrekvenciája.

A téglalap alakú membrán peremfeltételei

$$u(x=0, y) = u(x=L_x, y) = 0 \quad (5.12)$$

$$u(x, y=0) = u(x, y=L_y) = 0. \quad (5.13)$$

Ezeket a megoldásba helyettesítve, a következő elmozdulásfüggvényt kapjuk:

$$u(x, y, t) = U \sin(k_{xm} x) \sin(k_{ym} y) \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.14)$$

ahol a lehetséges hullámszám értékek

$$k_{xm} = \frac{m\pi}{L_x}, \quad k_{yn} = \frac{n\pi}{L_y}. \quad (5.15)$$

Jól látszik, hogy a membrán valóban kétdimenziós húrként kezelhető, hiszen a megoldás nem más, mint két független húr rezgésalakjainak „diádszorzata”. Az egyes módusalakok frekvenciáit az alábbi összefüggés adja meg:

$$\omega_{mn} = c \sqrt{k_{xm}^2 + k_{yn}^2}. \quad (5.16)$$

A membránok módusait az úgynevezett Chladni-féle ábrákkal ábrázoljuk. Ezek az ábrák a módusalakok csomóvonalait, azaz a zérus kitérésű pontokat összekötő vonalakat tartalmazzák, a csomóvonalak közti tartományokon pedig a módusalak előjelét tüntetik fel. Néhány téglalap alakú membránmódust mutat az 5.2. ábra.

Degenerált módusalakok

A téglalap alakú membránok között kitüntetett szerepet kapnak az L oldalhosszúságú négyzetes membránok. Ezeknél az (m, n) -es módus frekvenciája

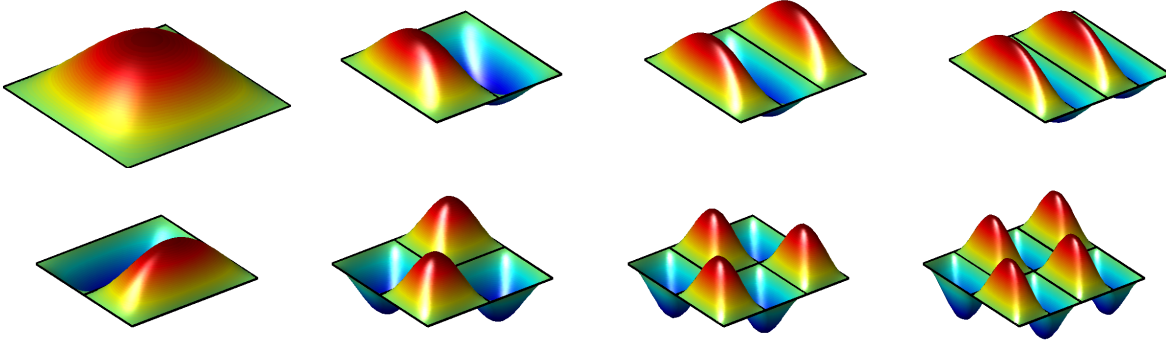
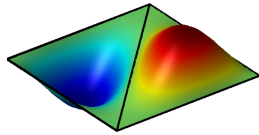
$$\omega_{mn} = \frac{c\pi}{L} \sqrt{m^2 + n^2}. \quad (5.17)$$

Könnyen látható, hogy ugyanaz a frekvencia többféle módusalak esetén is előfordulhat, pl. $\omega_{1,2} = \omega_{2,1}$. Ha egy lineáris rendszernek egyazon frekvencián több módusalakja is van, akkor ezen módusalakok tetszőleges szuperpozíciója is egyfajta módusalak lesz ugyanazon a frekvencián. Az így kialakuló módusalakokat degenerált módusalakoknak hívjuk. Az $n = 1$ és $m = 2$ értékekhez tartozó, egy lehetséges degenerált módusalakot mutat az 5.3. ábra.

A módusok sűrűsége

A négyzetes membrán esetéből könnyen belátható, hogy a membránok adott $\bar{\omega}$ határfrekvencia alatti összes módusainak száma a frekvenciával négyzetesen változik. Felírhatjuk ugyanis az alábbi egyenletet:

$$\left(\frac{\bar{\omega} L}{c\pi} \right)^2 > m^2 + n^2, \quad (5.18)$$

5.2. ábra. Téglalap alakú alakú membrán módusai $n = 1 \dots 4$ és $m = 1 \dots 2$ értékekre5.3. ábra. Négyzet alakú membrán $n = 1$ és $m = 2$ értékekhez tartozó, egy lehetséges degenerált módusai.

ahol minden lehetséges (m, n) pár egy módot ír le. Az összefüggést az $r = \bar{\omega}L/c\pi$ sugarú körön belüli pozitív egész koordinátájú pontok elégítik ki, melyek száma hozzávetőlegesen (nagy $\bar{\omega}$ körfrekvenciák esetére)

$$\frac{r^2\pi}{4} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\bar{\omega}L}{c} \right)^2. \quad (5.19)$$

5.2.2. Kör alakú membránok módusai

A membránok tárgyalásakor a kör alakú membrángeometriák az elsődleges fontosságúak, hiszen a membranofon hangszerek rezonátorai szinte kivétel nélkül kör alakban kifeszített membránok. A membrán módusainak meghatározásához a gerjesztés nélküli ($g = 0$) membránegyenletet vizsgáljuk, melynek alakja

$$c^2 \nabla^2 u(x, y, t) = \ddot{u}(x, y, t), \quad (5.20)$$

ahol bevezettük a

$$c = \sqrt{\frac{S}{\sigma}} \quad (5.21)$$

rezgésterjedési sebességet. Látjuk, hogy a húrokhoz hasonlóan a membránban terjedő rezgés sebessége nem pusztán anyagjellemző, hanem a membrán feszítettségétől függ. Ez teszi lehetővé, hogy a membranofon hangszereket – a húrokhoz hasonlóan – a membrán előfeszítésével akár játék közben is hangoljuk.

Mivel R sugarú kör alakú geometriát vizsgálunk, érdemes áttérnünk az $x-y$ derékszögű koordinátarendszertől az $r-\theta$ polárkoordináta-rendszerre, melyben a koordinátákat az

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (5.22)$$

összefüggések definiálják, ahol $0 \leq r \leq R$ és $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

A membránegyenlet megoldásához ismét a változók szeparálásának módszerét alkalmazzuk, vagyis az u elmozdulást egy helyfüggő és egy időfüggő tag szorzataként írjuk fel:

$$u(r, \theta, t) = \psi(r, \theta)\alpha(t). \quad (5.23)$$

A szorzatalakot a homogén membránegyenletbe helyettesítve és a teljes elmozdulással leosztva:

$$c^2 \frac{\nabla^2 \psi(r, \theta)}{\psi(r, \theta)} = \frac{\ddot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} = -\omega^2. \quad (5.24)$$

Az időfüggő tag megoldása

$$\alpha(t) = \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.25)$$

vagyis a gerjesztetlen membrán szabadrezgéseit időben harmonikus függvények írják le. A helyfügő tagra pedig a

$$\nabla^2 \psi(r, \theta) = -k^2 \psi(r, \theta) \quad (5.26)$$

Helmholtz-egyenletet kapjuk, ahol $k = \omega/c$ a hullámszám.

A Helmholtz-egyenlet megoldásához szükségünk van a ∇^2 Laplace-operátor polár-koordinátarendszerbeli kifejezésére is:

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}. \quad (5.27)$$

Éljünk ismét a változók szeparálásának módszerével, vagyis a ψ elmozdulást írjuk fel

$$\psi(r, \theta) = \psi_R(r) \psi_\Theta(\theta) \quad (5.28)$$

alakban. A Helmholtz-egyenletbe helyettesítve, majd a ψ taggal végigosztva és r^2 -tel végigszorozva, az alábbi összefüggést kapjuk:

$$r^2 \frac{\psi_R''(r)}{\psi_R(r)} + r \frac{\psi_R'(r)}{\psi_R(r)} + r^2 k^2 = - \frac{\psi_\Theta''(\theta)}{\psi_\Theta(\theta)} = n^2. \quad (5.29)$$

A θ -tól függő tagra felírt egyenlet

$$\psi_\Theta''(\theta) = -n^2 \psi_\Theta(\theta), \quad (5.30)$$

aminek megoldása:

$$\psi_\Theta(\theta) = \cos(n\theta + \zeta), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.31)$$

Itt lényeges kiemelni, hogy a polárkoordinátarendszer miatt a ψ_Θ megoldásfüggvény a θ változó szerint 2π -periodikus kell legyen, vagyis a megoldás csak egész n -ek esetére igaz.

Az r -tól függő oldal egyenlete kis átrendezés után

$$r^2 \psi_R''(r) + r \psi_R'(r) + (r^2 k^2 - n^2) \psi_R(r) = 0, \quad (5.32)$$

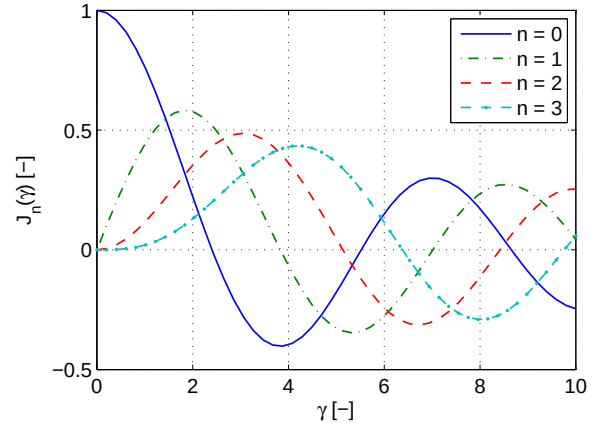
illetve a $\gamma = kr$ új változó bevezetésével

$$\gamma^2 \psi_R''(\gamma) + \gamma \psi_R'(\gamma) + (\gamma^2 - n^2) \psi_R(\gamma) = 0. \quad (5.33)$$

Eredményül Bessel differenciálegyenletét kaptuk, aminek megoldásai az 5.4. ábrán látható $J_n(\gamma)$ Bessel-függvények:

$$\psi_R(r) = J_n(kr). \quad (5.34)$$

A Bessel-függvények az alábbi tulajdonságokkal bírnak:



5.4. ábra. A $J_n(\gamma)$ Bessel-függvények $n = 0$ -tól 3-ig

- A Bessel-függvényeket az n rendszámmal indexeljük, ami 0-tól végtelenig fut.
- A nulladrendű $J_0(\gamma)$ függvény $\gamma = 0$ -ban 1 értékeről indul, az összes többi $J_n(\gamma)$ függvény 0-ból. Az n -edrendű Bessel-függvény az origó környezetében γ^n jelleggel viselkedik.
- A Bessel-függvények a harmonikus függvényekhez hasonlóan oszcillálnak, de monoton csökkenő burkolóval. Nagy argumentumokra ($\gamma \gg n^2 - 1/4$) jól közelíthetők a

$$J_n(\gamma) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma}} \cos\left(\gamma - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right) \quad (5.35)$$

aszimptotikus közelítéssel, vagyis szomszédos zérushelyeik a harmonikus függvényekhez hasonlóan hozzávetőlegesen π távolságra vannak egymástól. A $\sqrt{1/\gamma}$ jellegű amplitúdócsökkenéshez $1/\gamma$ -val arányos energiacsökkenés tartozik, ami a hengerszimmetrikus terjedés sajátja (az energia a henger felületén oszlik el, ami a sugárral arányosan nő).

Feszített membránok esetében természetesen élünk az $u(R, \theta, t) = 0$ peremfeltétellel, ami az r -függő $\psi_R(r)$ tagra felírható

$$\psi_R(R) = J_n(kR) = 0 \quad (5.36)$$

alakban fogalmazható meg.

Látjuk, hogy a szabadrezgések k hullámszámait a Bessel-függvények zérushelyei határozzák meg.

m	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178

5.1. táblázat. A $J_n(\gamma)$ Bessel-függvények γ_{mn} zérushelyei. Nagyobb m értékekre a zérushelyek közelíthetők a $\gamma_{mn} \approx (4m + 2n - 1)\pi/4$ kifejezéssel.

A Bessel-függvények tulajdonságaiból következik, hogy minden n értékhez végtelen sok zérushely tartozik. Ha a $J_n(\gamma)$ függvény zérushelyeit γ_{mn} jelöli, akkor a lehetséges megoldásokat a $kR = \gamma_{mn}$ egyenlet választja ki, ami alapján a feszített kör alakú membránok ψ_{mn} módusai

$$\psi_{mn}(r, \theta) = J_n(k_{mn}r) \cos(n\theta + \zeta), \quad k_{mn} = \frac{\gamma_{mn}}{R} \quad (5.37)$$

és a hozzájuk tartozó sajátfrekvenciák

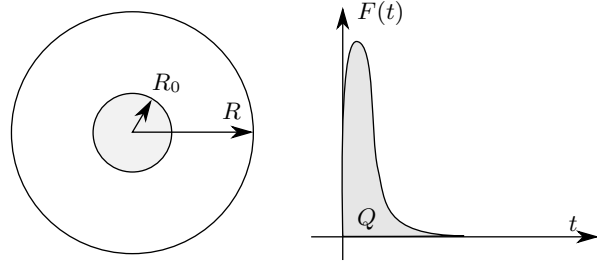
$$\omega_{mn} = k_{mn}c = \frac{\gamma_{mn}c}{R}. \quad (5.38)$$

A módusalakokat az 5.5. ábra mutatja az $n = 0 \dots 3$ és $m = 1 \dots 3$ esetre. Az ábrákon feltüntetjük a módusok zérus elmozduláshoz tartozó csomóvonalait és csomóköröit. A csomóátmérők száma megegyezik az n értékkel, a csomókörök száma pedig az m értékkel, ahol az m -edik csomókör a membrán pereme. Egyszerűbb ábrázolási lehetőségként rajzolhatunk Chladni-ábrákat is, melyek a csomóvonalakat és átmérőket tartalmazzák, valamint feltöltetik a köztes tartományhoz tartozó előjeleket is.

5.2.3. Megütött membránok szabadrezgése

A továbbiakban egy fontos zenei alkalmazást, az impulzusszerűen megütött membránok szabadrezgéseit vizsgáljuk.

Kiindulásként egyszerű impulzusmodellt vizsgálunk, melyben a membránt érő $g(r, \theta, t)$ gerjesztés a membrán középpontjában levő, R_0 sugarú körfelületen egyenletesen eloszló erő, ahogy azt az 5.6. ábra mutatja. Az impulzust a kalapáccsal gerjesztett húrmodellben bevezetett Q intenzitással jellemezzük, ami az impulzus erő-ideje függvénye alatti területtel egyezik meg. Ennek értelmében a



5.6. ábra. A membrán közepére ható erőgerjesztés térbeli és időbeli eloszlása

$g(r, \theta, t)$ gerjesztés alakja

$$g(r, \theta, t) = \frac{Q}{R_0^2 \pi} (1 - \varepsilon(r - R_0)) \delta(t), \quad (5.39)$$

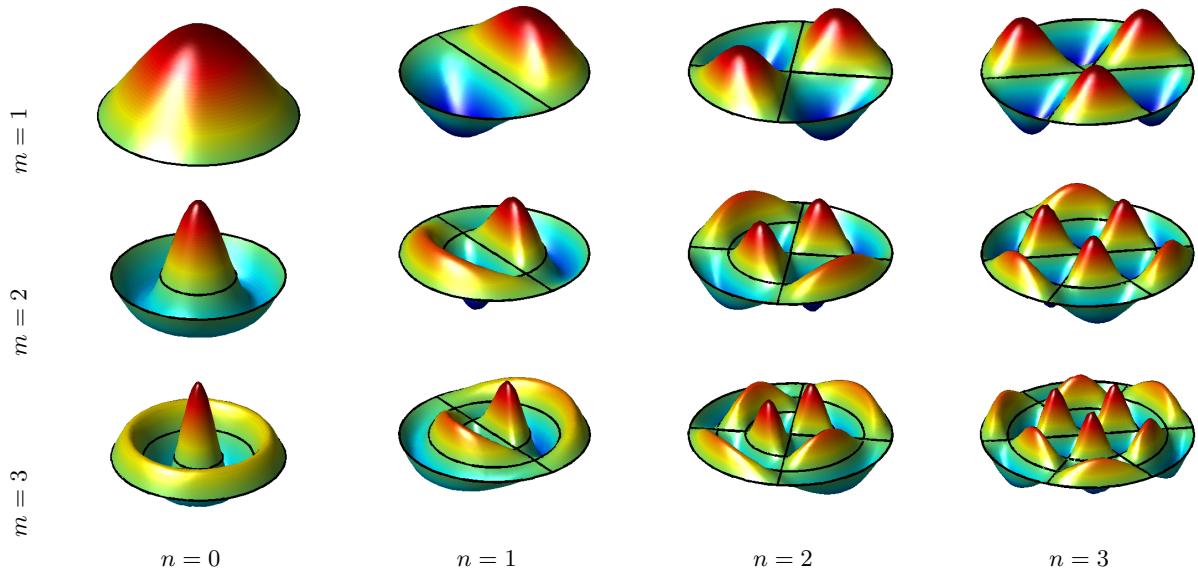
ahol $\varepsilon(r)$ az egységugrás függvény. Az impulzusszerű erőgerjesztéssel ekvivalens kezdeti sebesség kifejezése a húroknál megtanult (2.65) összefüggés szerint

$$v_0(r, \theta) = \frac{g(r, \theta, t)}{\sigma} \Delta t = \frac{Q}{\sigma R_0^2 \pi} (1 - \varepsilon(r - R_0)). \quad (5.40)$$

Az $u(r, \theta, t)$ választ ismét a módusok szuperpozíciójaként keressük, vagyis

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{m0}(r) \alpha_{m0}(t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} U_m \psi_{m0}(r) \sin(\omega_m t + \varphi_m), \end{aligned} \quad (5.41)$$

ahol azonnal kihasználtuk, hogy a gerjesztésünk körszimmetrikus, vagyis nem függ a θ koordinátától, így a válaszban sem vesznek részt azok a módusok, melyek a θ koordinátától függenek. A θ -független módusalakok az $n = 0$ értékhez tartoznak, ezért csak az $n = 0$ indexek szerepelnek a megoldásban. A továbbiakban az $n = 0$ indexet elhagyjuk, és ψ_m alatt a ψ_{m0} módust értjük.



5.5. ábra. Kör alakú membrán módusalakjai $n = 0 \dots 3$ és $m = 1 \dots 3$ értékekre. A fekete vonalak a módusok csomóvonalait és csomóköröit jelölik.

A zérus kezdeti elmozdulásból következik, hogy $\varphi_m = 0$.

A kezdeti sebességre felírhatjuk, hogy

$$v_0(r) = \dot{u}(r, t=0) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m \omega_m \psi_m(r). \quad (5.42)$$

A módusok ortogonalitása miatt (5.42) az alábbi kifejezéssel ekvivalens

$$U_m = \frac{1}{\omega_m} \frac{\langle \psi_m, v_0 \rangle}{\|\psi_m\|^2}, \quad (5.43)$$

ahol jelenleg a skaláris szorzat az R sugarú körlapra vett integrállal értelmezhető:

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle &= \int_A a(r, \theta) b(r, \theta) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R a(r, \theta) b(r, \theta) r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^R a(r) b(r) r dr. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Az utolsó egyenlőségénél kihasználtuk a θ változótól való függetlenséget.

A skaláris szorzatokat behelyettesítve

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{\omega_m} \frac{Q}{\sigma R_0^2 \pi} \frac{\int_0^{R_0} J_0(k_m r) r dr}{\int_0^R J_0^2(k_m r) r dr} \\ &= \frac{1}{\omega_m} \frac{Q}{\sigma R_0^2 \pi} \frac{\frac{R_0}{k_m} J_1(k_m R_0)}{\frac{R^2}{2} J_1^2(k_m R)} \\ &= \frac{Q R_0}{M c} \frac{2 J_1(k_m R_0)}{(k_m R_0)^2 J_1^2(k_m R)}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

ahol $M = \sigma R^2 \pi$ a membrán teljes tömege. A teljes megoldás ezek szerint az alábbi végtelen sorral írható fel:

$$u(r, t) = \frac{Q R_0}{M c} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{2 J_1(k_m R_0)}{(k_m R_0)^2 J_1^2(k_m R)} \times \right. \\ \left. \times J_0(k_m r) \sin \omega_m t \right\}. \quad (5.46)$$

5.3. Harmonikus membránok – a timpani

Az ideális membrán sajátfrekvenciái nem az alaphang egész számú többszörösein jelennek meg, hanem a Bessel-függvények gyökei által kijelölt frekvenciákon. Ennek ellenére membranofon hangsze-

rek is lehetnek alkalmasak „zenei” játéokra, vagyis adott magasságú hangok tiszta megszólaltatására. A legismertebb, adott magasságon megszólaló membranofon hangszerek a timpanik (üstdobok).

A timpani egy közel félgömb alakú üstre kifeszített membránból áll. Az üst anyaga leggyakrabban réz. A membrán anyaga korábban borjúbőr volt, de ma már inkább az ötvenes években kifejlesztett, különösen erős poliészterből, mylárból készül, ami lényegesen homogénebb, illetve a levegő páratartalmára is érzéketlen. A mylár membránok vastagsága tipikusan 0,2 mm, sűrűségük pedig $\rho = 1,38 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, aminek értelmében az egységnyi felületre eső tömegük $\sigma = 0,276 \text{ kg/m}^2$. A membránban terjedő rezgés $c \approx 100 \text{ m/s}$ sebességét az $S \approx 2760 \text{ N/m}$ feszítő erő biztosítja.

A membrán hangmagassága a feszítő erő változtatásával egy szext tartományon belül változtatható, amihez a feszítő erőnek ≈ 3 -szoros tartományban kell változnia. A feszítő erőt a játékos a timpani pedálmechanikáján keresztül befolyásolhatja.

Mivel a játékos a timpanit általában nem közvetlenül, hanem a sugár felezőpontjának környékén vagy a peremhez közeli negyedelőpontján üti, nem az (1,0), hanem az (1,1) módus a timpani alapl módusa. Timpanikon végzett mérések szerint a hangképzésben jellemzően kiemelkedő további módusok az (1,1), (1,2), (1,3), (1,4) és (1,5) alakok, melyek (1,1)-hez képest mért relatív frekvenciái

$$1 : 1,5 : 2 : 2,44 : 2,9,$$

ami igen közel esik az $2 : 3 : 4 : 5 : 6$, alapharmonikusban hiányos harmonikus sorhoz. Ideális membrán esetén a megfelelő frekvenciaarányok

$$1 : 1,34 : 1,67 : 1,98 : 2,29.$$

Az eltérés oka több tényezőben keresendő: A legfontosabb tényező a membránt felülről terhelő, a membránnal együttmozgó levegő tömege. Ökölszabály szerint kis frekvencián az együttmozgó légterfogot jól közelíthetők a membrán fölötti $8R/3\pi$ vastagságú légoszlop m_t tömegével:

$$m_t \approx R^2 \pi \times \frac{\rho_0 8R}{3\pi} = \frac{8\rho_0 R^3}{3}, \quad (5.47)$$

ahol ρ_0 a levegő sűrűsége. A 200–300 Hz-es tartomány fölött az együttmozgó légréteg tömege a frekvencia négyzetével arányosan csökken, aminek

köszönhetően 500 Hz fölött ez a hatás már teljesen elhanyagolható.

A második domináns jelenség az üstben levő zárt légterfogat merevítő hatása. Ez a hatás a membrán sajátfrekvenciáinak enyhe növekedését okozza, de tipikusan csak a körszimmetrikus $(m,0)$ módusok esetében.

Harmadik domináns hatás a membrán anyagának merevsége, mely a merev húrokhoz hasonlóan a magasabb frekvenciájú módusok frekvenciáit felfelé tolja. Ez a hatás tipikusan 0,5–1%-os frekvencianövekedést eredményez.

5.1. példa Membránra ható légterhelés I.

Mennyivel mélyül egy kismagasságú membránmódus sajátfrekvenciája a légterhelés hatására? A membrán átmérője $R = 33 \text{ cm}$, sűrűsége $\sigma = 262 \text{ g/m}^3$, a levegő sűrűsége $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$.

A frekvenciacsökkenés kifejezése

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sqrt{k/(m_m + m_t)}}{\sqrt{k/m_m}} \quad (5.48)$$

ahol m_m a membrán tömege, m_t a terhelő levegő tömege, k pedig a membrán módusához tartozó ekvivalens rugóállandó. A kifejezés kifejtése

$$\begin{aligned} \frac{\omega'}{\omega} &= \sqrt{\frac{m_m}{m_m + m_t}} = \sqrt{\frac{R^2 \pi \sigma}{R^2 \pi \sigma + R^2 \pi \rho_0 8R/3\pi}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\rho_0 8R}{3\pi \sigma}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 1,3}} = 0,66, \end{aligned} \quad (5.49)$$

ami igen jelentős, több mint egy tiszta kvintnyi hangmagasság-csökkenésnek felel meg.

6. fejezet

Lemezek rezgései

A lemezek rezgései témakört csak érintőlegesen tárgyaljuk, mivel hangszerek esetében ritka az egyenes sík lemez mint hang sugárzó. A húros hangszerek sugárzó testét vagy merevítik, vagy meghajlítják a kellő merevség elérése érdekében, az ütős hangszerlemezek, pl. cintányérok is hajlítottak. Ezen beavatkozások jelentősen módosítják a sugárzó viselkedését, ezért a sík lemezekkel nem érdemes behatóan foglalkoznunk.

Jelen fejezetben felírjuk a sík lemezek rezgéseit leíró differenciálegyenletet, majd a megoldások elemzése helyett csak néhány alapvető jelenség megfigyelésével foglalkozunk.

6.1. Homogén sík lemez rezgései

A homogén sík lemez fontos anyagjellemzői a ρ tömegsűrűség, a lemez anyagának E Young-modulusa és ν Poisson-száma. A Poisson-szám anyagjellemző, és azt adja meg, hogy az anyagra ható direkt feszültségek milyen mértékben eredményezik az anyag keresztirányú deformációját. A Hooke-törvény a Poisson-hatás figyelembe vételével az alábbi alakban írható fel:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) \quad (6.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (-\nu\sigma_x + \sigma_y - \nu\sigma_z) \quad (6.2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (-\nu\sigma_x - \nu\sigma_y + \sigma_z) \quad (6.3)$$

vagyis az x irányú alakváltozásban részt vesz az y és z irányú direkt feszültség is, negatív előjellel. A Poisson-szám értéke elméleti megfontolások alapján -1 és $1/2$ között változhat. A $\nu = 1/2$ érték az összenyomhatatlan anyagokhoz (pl. lágy gumi)

tartozik. Falemezekre a Poisson-szám tipikusan $1/4$ és $1/3$ között mozog.

A homogén lemez keresztirányú hajlító rezgéseit leíró differenciálegyenlet alakja

$$g - \nabla^2 D \nabla^2 u = \sigma \ddot{u}, \quad (6.4)$$

ahol $g(x, y)$ a lemezre ható felületegységre vetített keresztirányú erő, $u(x, y)$ a lemez keresztirányú elmozdulása, D pedig a hajlító merevség

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (6.5)$$

ahol h a lemez vastagsága. Vegyük észre, hogy az egyenlet nagyon hasonlít a rudak hajlító rezgéseit leíró differenciálegyenlethez. Az egyenlet hely szerint negyedrendű, időben másodrendű, a hajlító merevség pedig rokon a téglalap keresztmetszetű rúd $EI = Eh^3w/12$ hajlító merevségével.

6.1.1. Lemezek diszperz viselkedése

Akárcsak a rudak hajlító rezgései, a lemezek hajlító rezgései is diszperz módon terjednek. A diszperziórelációhoz vegyük a gerjesztetlen differenciálegyenlet időben és térben harmonikus változatát, melyben $u(t) \propto e^{j\omega t}$ és $u(x, y) \propto e^{-jk_B x}$:

$$k_B^4 Du = \sigma \omega^2 u, \quad (6.6)$$

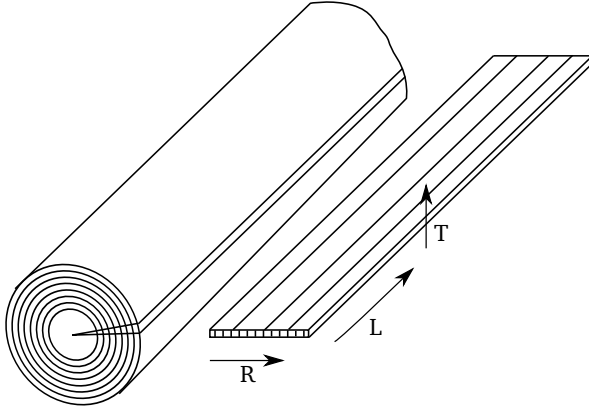
ahonnan

$$k_B^2 = \sqrt{\sigma/D} \omega. \quad (6.7)$$

A $k_B = \omega/c_B$ összefüggés felhasználásával a hajlító hullám c_B sebessége

$$c_B = \sqrt[4]{\frac{D}{\sigma}} \sqrt{\omega}. \quad (6.8)$$

Ez a rudakkal analóg módon a frekvencia négyzetgyökével arányos.



6.1. ábra. Ortotróp falemezek longitudinális, radiális és transzverzális irányainak definíciója

6.2. Merev membránok

A húrok és rudak közti határvonal nem éles, hasonló módon a membránok és lemezek sem különíthetők el határozottan egymástól. Minden feszített membránnak van némi önálló merevsége, ami a merev húrokhoz hasonlóan inharmonicitásként jelentkezik. Membránok esetében okafogyott az inharmonicitás elnevezés, hiszen a membránmódusok zérus merevségű membrán esetében sem alkotnak harmonikus felhangsort. Timpanik esetében az inharmonicitás a sajátfrekvenciák százalékos emelkedését eredményezi.

6.1.2. Ortotróp falemezek

Falemezek esetében a diszperzió mellett fontos a lemez ortotróp viselkedése. A hangszerlemezeket a jó bútorlapokhoz hasonlóan az évgyűrűkre merőlegesen, sugár mentén kivágott vékony falapokból ragasztják össze, így a lemezek bütürésén az évgyűrűk merőleges vonalkázatot adnak. A falapok ortotróp viselkedésének jellemzéséhez bevezetjük a longitudinális, transzverzális és radiális irányokat a 6.1. ábrán vázolt módon. Az ortotróp viselkedés azt jelenti, hogy az anyagjellemzők irányfüggők. A falemez másként reagál a longitudinális irány feszültségekre, mint a radiális irányúakra. A falapoknak külön megadható az E_l , E_t és E_r Young-modulusa, illetve a Poisson szám mind a kilenc iránykombinációra. Hangszerlapok esetében ezek közül az E_l , E_r , ν_{lr} és ν_{rl} érdekes. A Young-modulusok közül a longitudinális irányú a nagyobb, vagyis a lapok merevebbek longitudinális irányban. A különböző irányú Young-modulusok aránya akár a tízes nagyságrendet is elérheti.

Az ortotróp viselkedés következménye, hogy falemezek esetében a degenerált módusok nem négyzet, hanem egy bizonyos oldalarányú téglalap alakú lemezekben fordulnak elő. A kívánt oldalarány

$$\frac{L_l}{L_r} = \sqrt[4]{\frac{E_l}{E_r}}, \quad (6.9)$$

ami hozzávetőlegesen 1,5 és 1,9 között mozog, és jellemző a hegedű- és gitárfélék családjára.

7. fejezet

Kísérleti móduselemzés

A korábbi fejezetekben láttuk, hogy a rezgő rendszer módusainak ismeretében könnyen leírhatjuk a rendszer tetszőleges gerjesztésre adott válaszát. A következő fejezetben célunk egy rezgő rendszer módusainak kísérleti, vagyis mérés útján történő meghatározása. Ez a téma a kísérleti móduselemzés (Experimental Modal Analysis, EMA).

A kísérleti móduselemzés gyakorlati kivitelezése két lépésből áll. Az első lépésben megmérjük a rendszer $h(t)$ erő-elmozdulás impulzusválaszait, majd a mért impulzusválaszok alapján meghatározzuk a módusok ω_n sajátfrekvenciáit, α_n csillapítási tényezőit és $\psi_n(x)$ módusalakjait.

7.1. Az impulzusválasz mérése

7.1.1. H1- és H2-becslők

Képzeljünk el az alábbi egyszerű mérési feladatot. Egy fizikai rendszert az x bemeneti és y kimeneti mennyiségek közötti h arányossági tényező jellemez (például egy ideális lineáris rugó esetében lehet a gerjesztés a rugóra ható erő, a válasz a rugó megnyúlása, a rendszert pedig a rugó engedékenysége jellemzi).

$$y = hx \quad (7.1)$$

Célunk a h arányossági tényező meghatározása, ezért N független méréssel felvesszük a rendszer x_i gerjesztésekre adott y_i válaszait. Mind az x_i gerjesztéseket, mind az y_i válaszokat mérjük, és a mérések természetesen zajjal terheltek. Így az összetartozó x_i, y_i párok pontjai nem esnek egy egyenesre, hanem attól némileg eltérnek. A rendszer becsült $\bar{h}$ átvitelét úgy választjuk meg, hogy mini-

malizálja a

$$\sum_{i=1}^N (x_i \bar{h} - y_i)^2 \quad (7.2)$$

négyzetes hibát. A hiba lokális minimumát a kifejezés $\bar{h}$ szerinti deriváltjának zérushelyén keressük:

$$\sum_{i=1}^N 2(x_i \bar{h} - y_i)x_i = 0, \quad (7.3)$$

ahonnan

$$\bar{h}^{H1} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i x_i} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{y}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}, \quad (7.4)$$

ahol $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ a mérési eredményeket tartalmazó oszlopvektorok. Az eredményként kapott kifejezést a h mennyiség H1-becslőjének nevezzük.

A becslést alternatív módszerrel úgy is elvégezhettük, hogy a $g = 1/h$ reciprokl mennyiségre adunk legkisebb négyzetes hibájú becslést:

$$\sum_{i=1}^N (y_i \bar{g} - x_i)^2 \rightarrow \min, \quad (7.5)$$

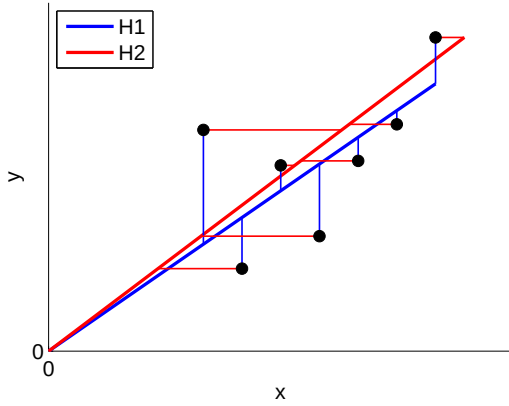
aminek megoldása

$$\bar{g}^{H1} = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{x}}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}}. \quad (7.6)$$

Az eredmény reciprokát véve kapjuk h alternatív becslését:

$$\bar{h}^{H2} = \frac{1}{\bar{g}^{H1}} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i y_i}{\sum_{i=1}^N y_i x_i} = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{x}}, \quad (7.7)$$

amit a h mennyiség H2-becslőjének nevezünk.



7.1. ábra. Az (x_i, y_i) pontokra illesztett H1- és H2-becslők. A H1-becslő a kék, a H2-becslő a piros vonalakkal jelzett távolságok négyzetösszegeit minimalizálja.

A H1- és H2-becslők közti koncepcionális különbséget a 7.1. ábra szemlélteti. A H1-becslő az y -tengely menti eltérések négyzetösszegeit minimalizálja, így akkor érdemes használni, ha a rendszer kimenetén megjelenő, a mérendő mennyiséggel korrelálatlan zajt akarjuk kiátlagolni. A H2-becslő az x -tengely menti eltérések négyzetösszegeit minimalizálja, így akkor érdemes használni, ha a rendszer bemenetének mérését terheli a bemenettel korrelálatlan zaj.

A H1- és H2-becslők arányát a mérés determinációs együtthatójának vagy koherenciájának nevezzük. Ennek értéke mindig 0 és 1 közé esik:

$$0 \leq \frac{\bar{h}^{H1}}{\bar{h}^{H2}} = \frac{(\mathbf{x}^T \mathbf{y})(\mathbf{y}^T \mathbf{x})}{(\mathbf{x}^T \mathbf{x})(\mathbf{y}^T \mathbf{y})} \leq 1. \quad (7.8)$$

A koherencia akkor egy, ha a mérés zajmentes, és a mért rendszer lineáris. Ellenkező esetben a koherencia egynél kisebb lesz. Zérushoz közeli koherencia esetén a mérést erősen terheli a zaj, vagy a rendszer nem írható le lineáris modellel.

Komplex mennyiségek mérése esetén is értelmezzük a H1- és H2-becslőket, itt a vektoros meghatározási módok az érvényesek, annyi különbséggel, hogy a transzponált vektorok helyett konjugált transzponált vektorokkal kell számolnunk.

7.1.2. Az impulzusválasz mérése

A rendszer $h_i(t)$ erő-elmozdulás impulzusválaszait a következő módon értelmezzük: A mért rendszer $\mathbf{x}_0$ pontjában pontszerű $\delta(t)$ erőimpulzussal hatunk, és mérjük a rendszer $\mathbf{x}_i$ pontjaiban az elmozdulás $h_i(t)$ időfüggvényét.

Természetesen a valóságban nem tudjuk kivitelezni a $\delta(t)$ impulzussal való gerjesztést, hanem egy valóságos $f(t)$ kalapács-impulzussal gerjesztjük a rendszert, és az $u_i(t)$ válaszokat mérjük. Az impulzusválaszt spektrális elemzéssel határozzuk meg, vagyis képezzük a válaszok $U_i(j\omega)$ Fourier-transzformáltjainak és a gerjesztés $F(j\omega)$ Fourier-transzformáltjának $H_i(j\omega)$ hányadosait, és ezeket inverz Fourier-transzformálva megkapjuk az impulzusválaszokat, ahogy azt a 7.2. ábra mutatja.

A mérés során problémát jelent, hogy tipikusan több tucat, vagy akár több száz pozícióban is mérni akarjuk a rendszer választ, ezért a sok rezgésérzékelővel végzett szinkron mérés lehetetlenné válik. Szerencsére kihasználhatjuk a rendszer reciprok voltát, miszerint az $\mathbf{x}_0$ pontban gerjesztett rendszer $\mathbf{x}_i$ pontban mért válasza megegyezik az $\mathbf{x}_i$ pontban gerjesztett rendszer $\mathbf{x}_0$ pontban mért válaszával. Eszerint a rezgő rendszerre egyetlen rezgésérzékelőt helyezünk, majd az objektumot végigkalapáljuk az $\mathbf{x}_i$ pozíciókban. Így nagy számú $f_i(t)$ gerjesztést és $u_i(t)$ választ mérünk.

A mérés során fellépő zajok hatását átlagolással csökkentjük. Az $\mathbf{x}_i$ pontban történő gerjesztés esetén nem csupán egy regisztrátumpárt rögzítünk, hanem a mérést N -szer megismételjük. A vett regisztrátumokat $h_i^{(n)}(t)$ és $u_i^{(n)}(t)$ -vel jelöljük, ahol n az átlagolás indexe. Az átlagolást a spektrális tartományban, H1-becslővel végezzük. Ez azt jelenti, hogy az átviteli függvényt

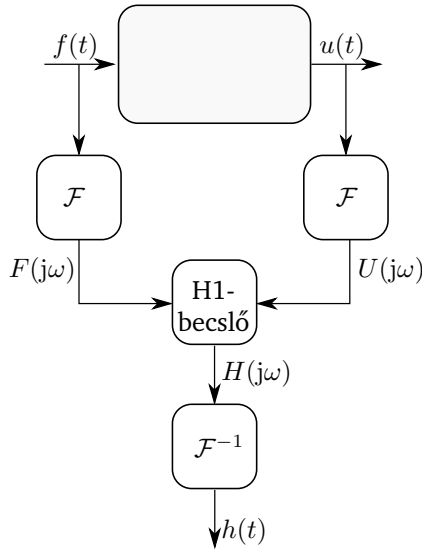
$$H_i^{H1}(j\omega) = \frac{\sum_{n=1}^N F_i^{*(n)}(j\omega) U_i^{(n)}(j\omega)}{\sum_{n=1}^N F_i^{*(n)}(j\omega) F_i^{(n)}(j\omega)} \quad (7.9)$$

alakban becsüljük, a koherenciát pedig

$$C_i(j\omega) = \frac{H_i^{H1}(j\omega)}{H_i^{H2}(j\omega)} \quad (7.10)$$

alakban adjuk meg, ahol a H2-becslő definíciója értelemszerűen

$$H_i^{H2}(j\omega) = \frac{\sum_{n=1}^N U_i^{*(n)}(j\omega) U_i^{(n)}(j\omega)}{\sum_{n=1}^N U_i^{*(n)}(j\omega) F_i^{(n)}(j\omega)}. \quad (7.11)$$



7.2. ábra. Az impulzusválasz-mérés bloksémája

7.2. Móduselemzés

Az impulzusválasz-mérés során előállítottuk a rendszer $h_i(t) = h(\mathbf{x}_i, t)$ impulzusválaszeit, melyek – szabadrezgésről lévén szó – a modális szuperpozíció felhasználásával

$$h(\mathbf{x}_i, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \psi_n(\mathbf{x}_i) \cos(\omega_n t + \varphi_n) e^{-\alpha_n t} \quad (7.12)$$

alakban írhatók fel. A $\cos$ függvény exponenciális alakját felhasználva (7.12) ekvivalens alakja

$$h_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(r_{ni} e^{\gamma_n t} + r_{ni}^* e^{\gamma_n^* t} \right), \quad (7.13)$$

ahol

$$\gamma_n = -\alpha_n + j\omega_n \quad (7.14)$$

a rendszer komplex pólusai, melyek az ω_n sajátfrekvenciákat és az α_n csillapítási tényezőket adják meg, az

$$r_{ni} = \frac{U_n \psi_n(\mathbf{x}_i) e^{j\varphi_n}}{2} \quad (7.15)$$

tagok pedig a módusokhoz tartozó reziduumok.

Látjuk, hogy a rendszer sajátfrekvenciái és csillapítási tényezői, vagyis a komplex pólusok nem függnek a gerjesztés és a válasz helyzetétől, vagyis az i indextől. A reziduumok tartalmazzák a

helyfüggő módusalakokat, így ezek nyilván más-más értéket vesznek fel a különböző gerjesztés-válasz párok esetére. Érdekes megjegyezni, hogy a (7.12)-ben az U_n együtthatók tartalmazzák a $\psi_n(\mathbf{x}_0)$ szorzótényezőt, ami azt jelenti, hogy ha a mérési pozíció valamelyik módus nullhelyére esik, akkor az adott módus nem jelenik meg a h_i impulzusválaszokban, így az elemzés során a hozzá tartozó sajátfrekvenciát, csillapítási tényezőt illetve módusalakot nem tudjuk meghatározni.

7.2.1. A komplex pólusok meghatározása

Célunk elsőként a γ_n komplex pólusok, vagyis a sajátfrekvenciák és csillapítási tényezők felvétele.

Valóságos mérés esetén az időfüggvények Δt időközönként rögzített minták formájában, $t = k\Delta t$, $k = 1, 2, \dots, K$ alakban állnak rendelkezésünkre. Ekkor a modális szuperpozíció alakja

$$h_i[k] = \sum_{n=1}^D (r_{ni} z_n^k + r_{ni}^* z_n^{*k}), \quad (7.16)$$

ahol

$$z_n = e^{\gamma_n \Delta t}, \quad (7.17)$$

és a szuperpozíciót D számú módusra korlátoztuk

(7.16)-ban a $h_i[k]$ mintasorozat $2D$ diszkrét z -hatványfüggvény szuperpozíciója, vagyis egy $2D$ -fokú diszkrét rendszer szabadválasza. E diszkrét rendszer rendszeregyenlete a

$$h_i[k] = a_1 h[k-1] + a_2 h[k-2] + \dots + a_{2D} h[k-2D] \quad (7.18)$$

rekurzív képlettel adható meg. Fontos, hogy a rekurzió a_n együtthatói az i indextől függetlenek, vagyis minden impulzusválasz ugyanannak a rekurziós összefüggésnek engedelmeskedik. Mivel (7.16)-ban a z_n tagok komplex konjugált párokat alkotnak, a rendszeregyenlet a_n együtthatói valósak. A rendszeregyenlet és a z_n komplex gyökök közti összefüggést az adja meg, hogy a z_n értékek a rendszeregyenlet

$$A(z) = \prod_{n=1}^D (z - z_n)(z - z_n^*) \quad (7.19)$$

$$= z^{2D} - a_1 z^{2D-1} - \dots - a_{2D-1} z - a_{2D}$$

karakterisztikus polinomjának gyökei.

A számítást időtatománybeli illesztéssel végezzük, vagyis a mért $h_i[k]$ impulzusválasz minták alapján próbáljuk meghatározni a rendszeregyenlet a_n együtthatóit. Ehhez felírjuk a (7.18) szuperpozíciót az i -edik impulzusválasz minden egymás melletti $2D + 1$ számú mért $h_i[k]$ mintájára. Az i indexeket leahyva:

$$\begin{bmatrix} h[1] & h[2] & \dots & h[2D] \\ h[2] & h[3] & \dots & h[2D+1] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h[K-2D-1] & h[K-2D] & \dots & h[2D+1] \\ h[K-2D] & h[K-2D+1] & \dots & h[K-1] \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2D} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h[2D+1] \\ h[2D+2] \\ \vdots \\ h[K-1] \\ h[K] \end{Bmatrix}. \quad (7.20)$$

Ugyanez kompakt formában:

$$\mathbf{R}_i \mathbf{a} = \mathbf{y}_i. \quad (7.21)$$

Az egyenletrendszert az összes impulzusválaszra felírva, majd közös mátrixba rendezve az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_N \end{bmatrix} \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N \end{Bmatrix}. \quad (7.22)$$

A sokszorosan túlhatározott egyenletrendszer (tipikusan százazres nagyságrendű egyenletszám néhány tucat ismeretlenhez) legkisebb négyzetes értelemben optimális megoldását úgy kapjuk, hogy az egyenletet balról szorozzuk az $\mathbf{R}$ mátrix transzponáltjával, majd a bal oldalon megjelenő $2D \times 2D$ méretű együtthatómátrixot invertáljuk:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{y}. \quad (7.23)$$

Az a_n együtthatók ismeretében meghatározzuk az $A(z)$ polinom z_n komplex konjugált gyökpárjait, majd a komplex pólusokat a

$$\gamma_n = -\alpha_n + j\omega_n = \frac{\ln z_n}{\Delta t} \quad (7.24)$$

összefüggéssel számíthatjuk.

7.2.2. A módusalakok meghatározása

A komplex pólusok felvétele után, második illesztési fázisban határozzuk meg az egyes impulzusválaszokhoz tartozó r_{ni} reziduumokat. Írjuk fel ismét

(7.16)-ot az i -edik impulzusválasz minden mintájára:

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_D & z_1^* & \dots & z_D^* \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_D^2 & z_1^{*2} & \dots & z_D^{*2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^K & z_2^K & \dots & z_D^K & z_1^{*K} & \dots & z_D^{*K} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} r_{1i} \\ r_{2i} \\ \vdots \\ r_{Di} \\ r_{1i}^* \\ \vdots \\ r_{Di}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_i[1] \\ h_i[2] \\ \vdots \\ h_i[K] \end{Bmatrix}. \quad (7.25)$$

Az erősen túlhatározott, $K \times 2D$ méretű $\mathbf{Zr}_i = \mathbf{h}_i$ egyenletrendszert impulzusválaszonként külön-külön ismét a legkisebb négyzetek módszerével oldjuk meg, vagyis

$$\mathbf{r}_i = (\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^H \mathbf{h}_i, \quad (7.26)$$

ahol H a konjugált transzponáltat jelöli.

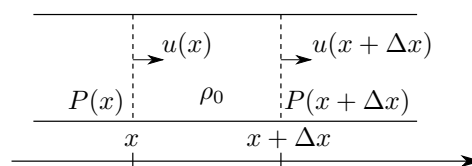
A reziduumok meghatározása után a $\psi_n(\mathbf{x}_i)$ módusalakok kinyerése már egyszerű, ehhez mindössze az r_{ni}/r_{n1} hányadost kell képeznünk, aminek értéke $\psi_n(\mathbf{x}_i)/\psi_n(\mathbf{x}_1)$. Nem kapjuk meg tehát amplitúdóhelyesen a módusalakokat, hanem a kiválasztott első (vagy tetszőleges másik referencia) csomóponthoz viszonyított értéküket nyerhetjük ki. Ez nem probléma, hiszen a módusalakok természetesen tetszés szerint újraskálázhatók, ezzel pusztán a modális szuperpozíció U_n együtthatói módosulnak.

8. fejezet

A hangtér

8.1. Bevezetés

Eddig rezgő mechanikai rendszerekkel foglalkoztunk, a hátralevő fejezetekben pedig a rezgő testek hangkeltési mechanizmusát, illetve a hang levegőben való terjedését leíró fizikai modelleket tárgyaljuk.



8.1. ábra. Légtérfogat az egydimenziós hullámegyenlet levezetéséhez

8.2. A hangtér alapegyenletei

Tárgyalásunkat természetesen a hang terjedését leíró differenciálegyenlet levezetésével kezdjük. A hangot leíró elsődlegesen fontos mennyiség a $P(\mathbf{x}, t)$ légnyomás, mely felbontható a mind térben, mind időben állandó P_0 légköri nyomás és a $p(\mathbf{x}, t)$ hangnyomás összegére:

$$P(\mathbf{x}, t) = P_0 + p(\mathbf{x}, t) \quad (8.1)$$

hétköznapi körülmények között a normál légköri nyomás értéke $P_0 = 103 \text{ kPa}$.

8.2.1. Egydimenziós leírás

Először a hangterjedést leíró differenciálegyenlet egydimenziós változatát vezetjük le. Az egydimenziós leírás azt jelenti, hogy minden mennyiség csak a tér x koordinátája mentén változik. Ez a feltétel megállja a helyét olyan hullámvezetőkben (pl. csövekben), melyek keresztirányú mérete lényegesen kisebb a bennük haladó hang hullámhosszánál.

Tekintsük a 8.1. ábrán látható, A keresztmetszetű hullámvezető Δx hosszú szakaszát, és írjuk fel az x és $x + \Delta x$ pozíciók közti levegődarabra ható erők eredőjét! A levegődarab bal oldalára $P(x, t)A$

erő hat, jobb oldalára $-P(x + \Delta x)A$. Newton II. törvényének alakja ezek szerint

$$P(x, t)A - P(x + \Delta x)A = \rho_0 A \Delta x \ddot{u}(x, t) \quad (8.2)$$

ahol $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$ a levegő sűrűsége, $\ddot{u}(x, t)$ pedig a levegődarabka elmozdulásának idő szerinti második deriváltja, azaz a gyorsulás. A lehetséges egyszerűsítések és határátmenet képzése után a

$$-P'(x, t) = \rho_0 \ddot{u}(x, t) \quad (8.3)$$

összefüggést kapjuk. Kihasználva továbbá a 8.1 szuperpozíciós összefüggést és a normál légköri nyomás állandóságát, a Newton-törvény alábbi formájához jutunk:

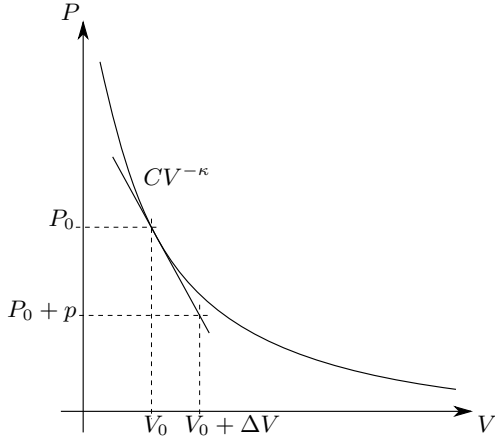
$$-p'(x, t) = \rho_0 \ddot{u}(x, t) \quad (8.4)$$

Ez a hangtér első alapegyenlete, amit a hangtanban gyakran használatos $v(x, t)$ részecskesebesség mennyiség bevezetésével az

$$p'(x, t) + \rho_0 \dot{v}(x, t) = 0 \quad (8.5)$$

alakban is írhatunk.

A második alapegyenletünk a gáztörvény, mely a légnyomás és a levegődarab térfogata közti kapcsolatot írja le. A hallható hang frekvenciatartományában a levegő állapotváltozása adiabatikus, ami



8.2. ábra. A levegő adiabatikus állapotváltozásának linearizálása

azt jelenti, hogy nincs hőcsere a szomszédos levegőszegmensek között. Az adiabatikus állapotváltozást leíró egyenlet

$$PV^\kappa = \text{állandó} = C \quad (8.6)$$

alakú, ahol $\kappa = c_P/c_V$ a levegő fajhőállandója, ami az állandó nyomáson mérhető c_P és az állandó térfogaton mérhető c_V fajhők aránya. Levegő esetére a fajhőállandó értéke $\kappa = 1,4$.

A továbbiakban linearizáljuk a gáztörvény alakját, vagyis a $P-V$ görbét a P_0 munkapontban érintő egyenessel közelítjük a 8.2. ábrán mutatott módon. Ezt megtehetjük azért, mert a ΔP nyomásváltozás lényegesen kisebb a normál légköri nyomásnál.

A

$$P = CV^{-\kappa} \quad (8.7)$$

összefüggés alapján a ΔP nyomásingadozás kifejezése

$$\Delta P = \left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_{V_0} \Delta V = -\kappa \left. \frac{CV^{-\kappa}}{V} \right|_{V_0} \Delta V = -\kappa P_0 \frac{\Delta V}{V_0} \quad (8.8)$$

A $\Delta V/V_0$ relatív térfogatváltozás kifejezése könnyen megadható a levegődarabka bal és jobb oldalának elmozdulásaival:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{(u(x + \Delta x) - u(x)) A}{\Delta x A} \rightarrow u'(x) \quad (8.9)$$

Használjuk ki végül, hogy a ΔP nyomásingadozás a p hangnyomást adja meg:

$$p = -\kappa P_0 \frac{\Delta V}{V_0} \quad (8.10)$$

valamint helyettesítsük be p kifejezésébe a relatív térfogatváltozásra kapott eredményt. Ekkor a hangtér második alapegyenletéhez jutunk:

$$p(x, t) = -\kappa P_0 u'(x, t) \quad (8.11)$$

A hangtér második alapegyenletének hely szerinti első deriváltját és az első alapegyenletet összevonva, az alábbi hullámeqyenletet kapjuk:

$$u''(x, t) = \frac{\rho_0}{\kappa P_0} \ddot{u}(x, t) = \frac{1}{c^2} \ddot{u}(x, t) \quad (8.12)$$

ahol

$$c = \sqrt{\frac{\kappa P_0}{\rho_0}} \quad (8.13)$$

a hang terjedési sebessége a levegőben. Ennek értéke hozzávetőlegesen $c = 340$ m/s.

Alternatív kifejezésként vonjuk össze az első alapegyenlet hely szerinti első deriváltját a második alapegyenlet idő szerinti második deriváltjával. Ekkor a nyomásra felírt hullámeqyenlethez jutunk:

$$p''(x, t) = \frac{1}{c^2} \ddot{p}(x, t) \quad (8.14)$$

A fentieket összefoglalva, a hangtér egyenleteit általában az alábbi két egyenlettel adjuk meg:

$$p''(x, t) = \frac{1}{c^2} \ddot{p}(x, t) \quad (8.15)$$

$$p'(x, t) = -\rho_0 \dot{u}(x, t) \quad (8.16)$$

8.2.2. Háromdimenziós leírás

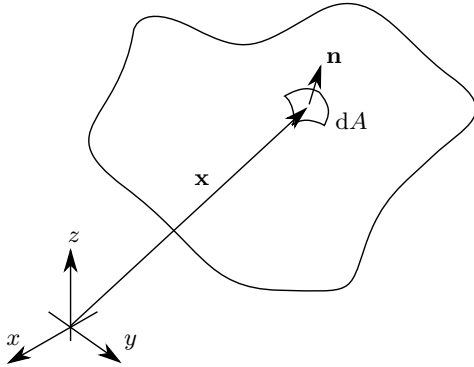
A következőkben a hullámeqyenletet levezetjük a háromdimenziós általános esetre. tekintsük a 8.3. ábrán látható, általános zárt V térfogatot, melynek felületét jelölje A , a felület $\mathbf{x}$ pontjában kifelé mutató egységnormálist pedig $\mathbf{n}(\mathbf{x})$.

A teljes V térfogatra felírhatjuk Newton második törvényét, miszerint

$$-\int_A p(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) dA = \int_V \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) dV \quad (8.17)$$

Itt a $-p \mathbf{n} dA$ tag a felületre ható, a külső nyomásból származó erőt jelöli. A Gauss-tétel értelmében a felületi integrál térfogati integrállá alakítható:

$$-\int_V \nabla p(\mathbf{x}) dV = \int_V \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) dV \quad (8.18)$$



8.3. ábra. Zárt térfogat a háromdimenziós hullámgörbe levezetéséhez

és mivel az egyenletnek tetszőlegesen megválasztott V térfogatra fenn kell állnia, az integrandusoknak meg kell egyezniük:

$$\nabla p(\mathbf{x}) + \rho_0 \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = 0 \quad (8.19)$$

ahol bevezettük a $\mathbf{v}$ részecskesebesség vektort.

Az egydimenziós levezetésnél eredményül kapott (8.8) képlet változtatás nélkül alkalmazható a háromdimenziós esetre:

$$p(\mathbf{x}) = -\kappa P_0 \frac{\Delta V}{V_0} \quad (8.20)$$

ahol a relatív térfogatváltozás kifejezése

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \frac{1}{V} \int_A \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dA \\ &= \frac{1}{V} \int_V \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dV \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (8.21)$$

ahonnan a második alapegyenlet

$$p(\mathbf{x}, t) = -\kappa P_0 \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (8.22)$$

illetve a sebességgel kifejezve

$$\dot{p}(\mathbf{x}, t) = -\kappa P_0 \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (8.23)$$

A második alapegyenlet idő szerinti első deriváltjából és az első alapegyenlet divergenciájából a nyomásra felírt hullámgörbe adódik:

$$\nabla \cdot \nabla p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2} \ddot{p}(\mathbf{x}, t) \quad (8.24)$$

Kihasználva, hogy $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta$, a háromdimenziós hangtér egyenleteit az alábbi formában foglalhatjuk össze:

$$\begin{aligned} \nabla^2 p(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c^2} \ddot{p}(\mathbf{x}, t) \\ \nabla p(\mathbf{x}, t) + \rho_0 \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (8.25)$$

8.3. A hullámgörbe egyszerű megoldásai

A továbbiakban a hullámgörbe egyszerű megoldásait keressük meg.

8.3.1. Síkhullámok

A húregyenlettel mutatott teljes analógia szerint az egydimenziós hullámgörbe megoldásai a c sebességgel haladó, tetszőleges kétszer deriválható hullámalakok:

$$p(x, t) = p^+(ct - x) + p^-(ct + x) \quad (8.26)$$

A gyakorlatilag fontos harmonikus esetben a hullámgörbe alakja a Helmholtz-egyenlet:

$$p''(x) + k^2 p(x) = 0 \quad (8.27)$$

ahol $k = \omega/c$ a hang hullámszáma. A Helmholtz-egyenlet általános komplex alakú megoldása

$$p(x) = A e^{-jkx} + B e^{jkx} \quad (8.28)$$

ahol A és B a pozitív és negatív irányba haladó síkhullámok tetszőleges komplex amplitúdói. Élünk a $B = 0$ feltétellel, vagyis csak a pozitív irányban haladó hullámot válasszuk ki a megoldásból, majd írjuk fel a Newton-törvény alapján a hangnyomás és a részecskesebesség kapcsolatát:

$$v(x) = -\frac{1}{j\omega\rho_0} p'(x) = \frac{jk p(x)}{j\omega\rho_0} = \frac{p(x)}{\rho_0 c} = \frac{p(x)}{z} \quad (8.29)$$

ahol $z = \rho_0 c$. Eredményünk szerint a levegőben haladó síkhullám nyomása és sebessége között a $z = \rho_0 c$ mennyiség, a síkhullámú tér hullámimpedanciája teremti meg a kapcsolatot. A síkhullám nyomása és sebessége fázisban van egymással, vagyis nyomásmaximumhoz sebességmaximum tartozik, a nyomás zérushelyéhez pedig a sebesség zérushelye is. A síkhullámú impedancia értéke hozzávetőlegesen 409 Pas/m

8.3.2. Megoldás gömbi koordináta-rendszerben

Következő fontos esetként a háromdimenziós Helmholtz-egyenlet és Newton-törvény megoldásával foglalkozunk:

$$\begin{aligned}\nabla^2 p + k^2 p &= 0 \\ \nabla p + j\omega\rho_0 \mathbf{v} &= 0\end{aligned}\quad (8.30)$$

A megoldást gömbi koordináta-rendszerben keressük, vagyis $p(\mathbf{x}) = p(r, \theta, \phi)$, továbbá az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy minden mennyiség csak az origótól mért r távolságtól függ. Ebben az esetben a gradiens az r szerinti differenciálásnak felel meg, a Laplace-operátor kifejezése pedig

$$\Delta p = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (8.31)$$

Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető, hogy a Helmholtz-egyenletet kielégíti a

$$p(r) = A \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (8.32)$$

nyomásfüggvény, ahol A tetszőleges konstans. A megoldás az origótól c sebességgel távolodó gömbhullámot ad meg, melynek amplitúdója a távolsággal arányosan csökken.

8.3.3. A lélegző gömb

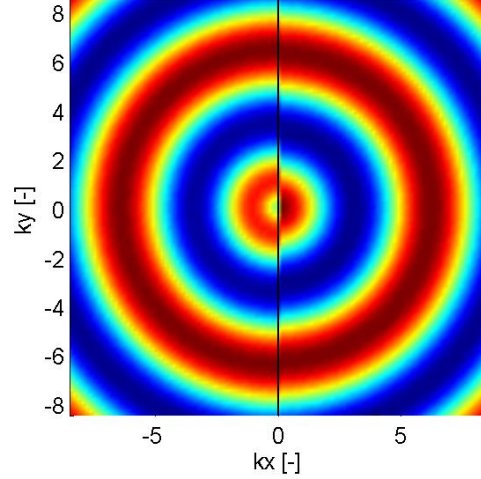
Ilyen gömbi nyomásteret az ún. lélegző gömb hoz létre. A lélegző gömb egy R sugarú gömbfelület, melynek felületén p_0 harmonikus hangnyomás uralkodik. Szimmetriaokokból nyilvánvaló, hogy a lélegző gömb gömbszimmetrikus teret ébreszt, vagyis a nyomás helyfüggését a (8.32) egyenlet adja meg. A $p(R) = p_0$ peremfeltétel felírásával az A konstans kifejezhető, és megoldásként a

$$p(r) = p_0 \frac{e^{-jk(r-R)}}{r/R} \quad (8.33)$$

nyomásfüggvényt kapjuk.

Gömbhullámú térben a p nyomás és a v sebesség kapcsolata tetszőleges pozícióban

$$v(r) = -\frac{1}{j\omega\rho_0} p'(r) = \frac{1}{\rho_0 c} \frac{jkr + 1}{jkr} p(r) \quad (8.34)$$



8.4. ábra. Az origóban elhelyezett pontszerű forrás (bal) sebesség- és (jobb) nyomásterének fázisviszonyai. Az ábra az $1/r$ -es amplitúdócsökkenést nem mutatja.

ahonnan a gömbhullámú hangtér specifikus impedanciája az origótól r távolságban

$$z_s = \frac{p}{v} = \rho_0 c \frac{jkr}{1 + jkr} \quad (8.35)$$

A síkhullámú és a gömbhullámú tér specifikus impedanciái közti eltérés a $jkr/(1 + jkr)$ szorzó, mely kis kr értékekre hozzávetőlegesen jkr , nagy kr értékekre pedig egyhez tart. Ez azt jelenti, hogy gömbhullámú térben az origóhoz közel a nyomás és a sebesség között 90° -os fáziskülönbség van, de a távolság növekedésével a fáziskülönbség eltűnik, és a tér egyre inkább a síkhullámú térhez hasonlít. Ezt a jelenséget mutatja a 8.4. ábra, melynek bal oldalán egy pontszerű gömbi sugárzó sebességtér, jobb oldalán pedig a nyomástere van ábrázolva. Az ábra figyelmen kívül hagyja az amplitúdócsökkenést, csupán a fázisviszonyokat ábrázolja. Látszik, hogy az origóban nyomásmaximumhoz sebesség nullhely tartozik, ami a $\pi/2$ fáziseltérés jellegzetessége. A forrástól 2 – 3 hullámhossz távolságra a sebesség és a nyomás fázisban van, vagyis a gömbhullámú hangtér már lényegében síkhullámúnak tekinthető.

8.3.4. Monopólus, forráserősség

Képzeld el, hogy egy R sugarú lélegző gömb felülete v_0 sebességgel harmonikusan rezeg. A gömb forráserőssége definíció szerint a

$$Q = v_0 A = 4\pi R^2 v_0 \quad (8.36)$$

összefüggéssel számítható, ahol A a sugárzó felülete. Képzeld el, hogy a sugárzó R sugarát minden határon túl csökkentjük úgy, hogy forráserőssége állandó Q érték marad. Ehhez nyilván a sebességet minden határon túl növelnünk kell. Végeredményként egy olyan pontforrást kapunk, amely végtelen sebességgel rezeg, de véges Q forráserősséggel sugároz. A Q forráserősségű monopólus nyomásterének kifejezése

$$p(r) = p_0 \frac{e^{-jk(r-R)}}{r/R} \quad (8.37)$$

ahol

$$p_0 = z_s(R) v_0 = \rho_0 c \frac{jkR}{1 + jkR} \cdot \frac{Q}{4\pi R^2} \quad (8.38)$$

Összevetve

$$p(r) = \rho_0 c \frac{jkR}{1 + jkR} \cdot \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{e^{-jk(r-R)}}{r/R} \quad (8.39)$$

egyszerűsítve és az $R \rightarrow 0$ határátmenetet elvégezve a pontforrás terére az alábbi összefüggést kapjuk:

$$p(r) = \frac{Qj\omega\rho_0}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (8.40)$$

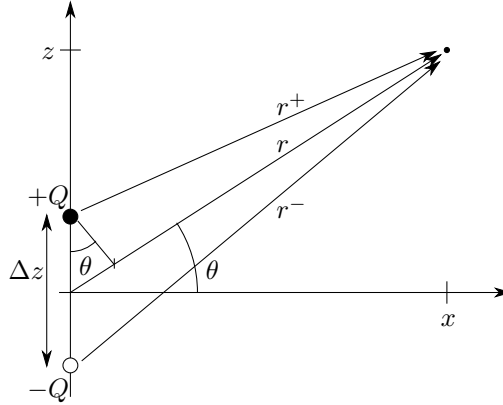
Ezt az összefüggést később használjuk majd a bonyolultabb alakú, adott sebességeloszlású sugárzók terének számításához.

8.3.5. Dipólus, dipol nyomaték

Az akusztikai dipólus első közelítésként két, egymástól Δz távolságra elhelyezett, ellentétes $\pm Q$ forráserősséggel sugárzó monopólus párként képzelhetjük el, ahogy a 8.5. ábra mutatja. A monopólus pár szuperponált terét a (8.40) egyenlet alapján

$$p(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^+) - p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^-) \quad (8.41)$$

ahol $\mathbf{r}_0^+ = (0, 0, \Delta z/2)$ a pozitív előjellel sugárzó forrás pozíciója, $\mathbf{r}_0^- = (0, 0, -\Delta z/2)$ pedig a negatív



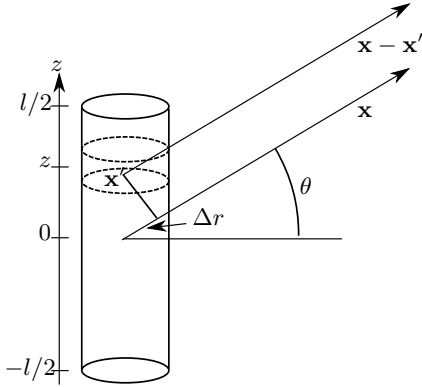
8.5. ábra. Akusztikai dipólus

előjellel sugárzó. Az összefüggést Δz -vel bővítve, majd a $\Delta z \rightarrow 0$ határátmenetet elvégezve

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}) &= \Delta z \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^+) - p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^-)}{\Delta z} \\ &= \Delta z \frac{dp(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{dz_0} \\ &= \Delta z \frac{dp(r)}{dr} \frac{dr}{dz_0} \\ &= \Delta z \frac{dp(r)}{dr} \frac{-z}{r} \\ &= \Delta z \frac{dp(r)}{dr} (-\sin \theta) \\ &= \underbrace{\frac{\mu j \omega \rho_0}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r}}_{\text{monopól tér}} \underbrace{\frac{1 + jkr}{r} \sin \theta}_{\text{dipólus korrekció}} \end{aligned} \quad (8.42)$$

ahol bevezettük a $\mu = Q\Delta z$ dipol nyomatékot. A távolságfüggést tekintve a dipólus a távolságban lényegében monopólusként viselkedik, vagyis a hangnyomás amplitúdója az $1/r$ szabály szerint csökken. A közeletérben (kis kr értékekre) ez a függés a második tag miatt $1/r^2$ jellegűre változik. Fontos továbbá a dipol sugárzó irányítottasága, amit a $\sin \theta$ iránykarakterisztika fejez ki. A sugárzás maximális erősségű a dipólus tengelyének irányában, és zérus erősségű arra merőlegesen. A tengellyel ellentétes irányban szimmetriaokokból nyilván ellentétes előjelű nyomástér alakul ki.

A dipólus nyomástere szintén fontos összetevője lesz a tetszőleges alakú akusztikai sugárzó terének.



8.6. ábra. Lélegző vonalforrás terének számítása

8.4. Összetett sugárzók hangtere

A következő fejezetekben az imént megismert monopólus és dipólus sugárzókat használjuk fel arra, hogy bonyolultabb, és a gyakorlati esetek szempontjából is fontos sugárzók terét meghatározzuk.

8.4.1. Véges vonalforrás tere

Tekintsünk egy l hosszú, a keresztmetszeti sugarú, hengeres vonalforrást, melynek palástja $v(z)$ sugárirányú sebességgel rezeg. A hengerfelület dz hosszúságú szakaszának $dQ(z)$ forráserőssége $dQ(z) = 2\pi a dz v(z)$. A kis csőszegmens által le-sugárzott nyomás kifejezéséhez alkalmazhatjuk a monopólussal való közelítést, aminek értelmében

$$dp(\mathbf{x}) = \frac{j\omega\rho_0}{4\pi} \frac{e^{-jk|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} dQ \quad (8.43)$$

Tételezzük fel, hogy az $\mathbf{x}$ vevőpont igen messze van, vagyis az $r = |\mathbf{x}|$ távolság lényegesen nagyobb a cső l hosszánál. Ekkor az $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ vektor lényegében párhuzamos az $\mathbf{x}$ vektorral, a hosszúságaik különbsége pedig $\Delta r = z \sin \theta$, azaz $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r - z \sin \theta$. A közelítést a fázis kifejezésébe behelyettesítve (az amplitúdó esetében a Δr tag hatása elhanyagolható)

$$\begin{aligned} dp(r, \theta) &= \frac{j\omega\rho_0}{4\pi} \frac{e^{-jk(r-z\sin\theta)}}{r} dQ \\ &= \frac{j\omega\rho_0}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} e^{jkz\sin\theta} 2\pi a dz v(z) \end{aligned} \quad (8.44)$$

A teljes hangnyomás kifejezése pedig

$$p(r, \theta) = \frac{j\omega\rho_0 A}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} v(z) e^{jkz\sin\theta} dz \quad (8.45)$$

ahol $A = 2\pi al$ a vonalsugárzó teljes felülete. A kifejezést megvizsgálva feltűnik, hogy az

$$\frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} v(z) e^{jkz\sin\theta} dz \quad (8.46)$$

integrál a $v(z)$ sebességfüggvény Fourier-transzformáltja.

Tegyük fel továbbá, hogy a sugárzó hossza mentén a sebesség állandó, majd végezzük el az integrálást a sugárzó hossza mentén:

$$\begin{aligned} p(r, \theta) &= \frac{j\omega\rho_0 Q}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} e^{jkz\sin\theta} dz \\ &= \frac{j\omega\rho_0 Q}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\frac{e^{jk\frac{l}{2}\sin\theta} - e^{-jk\frac{l}{2}\sin\theta}}{2jk\frac{l}{2}\sin\theta} \right] \\ &= \frac{j\omega\rho_0 Q}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\sin(k\frac{l}{2}\sin\theta)}{k\frac{l}{2}\sin\theta} \end{aligned} \quad (8.47)$$

A kifejezésből látszik, hogy a távoltéből a véges hosszúságú csődarab lényegében Q forráserősségű pontforrásként látszik, mely irányítottan sugároz. Az irányítottságot a

$$\Psi(\theta) = \frac{\sin(k\frac{l}{2}\sin\theta)}{k\frac{l}{2}\sin\theta} = \frac{\sin x}{x} \quad (8.48)$$

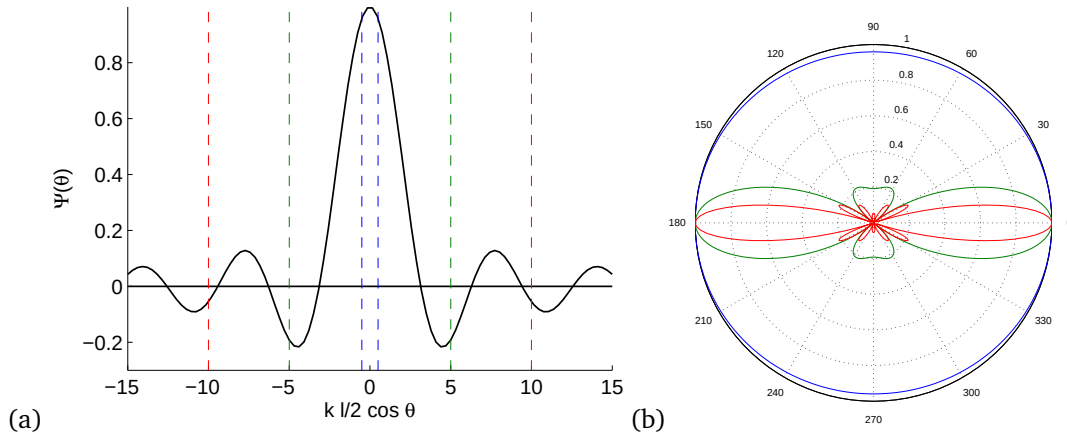
iránykarakterisztika írja le, ami nem más, mint a véges szakaszon egyenletes $v(z)$ sebességfüggvény Fourier-transzformáltja.

Az iránykarakterisztika maximumát az $x = k \sin \theta l/2 = 0$ helyen veszi fel, ahonnan $\sin \theta = 0$, azaz $\theta = 0$ adódik. Eszerint a csődarab sugárzása a hosszirányra merőlegesen a legintenzívebb.

Mivel a $\sin \theta$ tag értéke ± 1 között mozog, az iránykarakterisztika a $\sin x/x$ függvénynek csak a

$$-kl/2 \leq x \leq kl/2 \quad (8.49)$$

ún. láthatósági tartományát tartalmazza. A frekvencia vagy a csőhossz (azaz a kl érték) növelésével a láthatósági tartomány szélesedik, aminek hatására egyre több zérushely és lokális maximum jelenik meg az iránykarakterisztikában. A 8.7 ábra a $kl = 1$, $kl = 10$ és $kl = 20$ esetekre mutatja



8.7. ábra. Végess hosszú vonalforrás iránykarakterisztikájának számítása különböző kl értékekre. Az (a) ábra a sebességeloszlás Fourier-transzformáltját, illetve a láthatósági tartomány határait mutatja három különböző kl értékre (kék: $kl = 1$, zöld: $kl = 10$, piros: $kl = 20$.) A (b) ábra a különböző frekvenciákon kialakuló iránykarakterisztikákat szemlélteti.

a láthatósági tartományt, illetve az ezen értékeken kialakuló iránykarakterisztikákat.

Az iránykarakterisztika nullhelyeit az

$$k \frac{l}{2} \sin \theta_n = n\pi, \quad \sin \theta_n = \frac{n2\pi}{kl} = \frac{n\lambda}{l} \quad (8.50)$$

összefüggés határozza meg.

Vizsgáljuk meg a cső főnyalábának kúpszögét és a csőszárgzó melléknyalábelnyomását! A főnyaláb kúpszöge a $2\theta_1$ érték, amire igaz, hogy

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{l} \quad (8.51)$$

Nagy frekvencián (kis nyílásszög esetére) élhetünk a $\sin \theta \approx \theta$ közelítéssel, ahonnan a nyílásszög radiánban kifejezett értéke

$$2\theta_1 = \frac{2\lambda}{l} \quad (8.52)$$

A melléknyalábelnyomást a $\sin x/x$ függvény egymást követő két szélsőértékének amplitúdóaránya határozza meg. A függvény maximuma 1, következő szélsőértéke pedig $-0,2172$, ahonnan a melléknyalábelnyomás

$$20 \log_{10} \frac{1}{0,2172} = 13,26 \text{ dB} \quad (8.53)$$

8.4.2. Hangsugárzás végtelen féltérbe – A Rayleigh-integrál

A következő fontos sugárzótípusunk a végtelen síklemez, melynek adott a rezgési sebességeloszlása. Vegyünk egy végtelen merev síklapot, melynek A felületű, tetszőleges alakú darabja adott $v(\mathbf{x}_0)$ normális sebességgel rezeg ($\mathbf{x}'$ jelenleg a síklap tetszőleges pontját jelöli). A síklap $\mathbf{x}'$ -ben elhelyezkedő dA felületű darabkájának forraserőssége $dQ = v(\mathbf{x}')dA$. Ez a forrás monopólusként kezelhető, melynek $\mathbf{x}$ pontba lesugárzott nyomástere

$$dp(\mathbf{x}) = \frac{j\omega\rho_0 dQ(\mathbf{x}') e^{-jk|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{2\pi |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \quad (8.54)$$

Felhívjuk a figyelmet a nevezőben szereplő 2π -re, ami eltér a végtelen térbe sugárzó monopólus terénél megjelenő 4π tényezőtől. Az eltérés oka egy egyszerű analógiával magyarázható. A merev falba épített, végtelen féltérbe sugárzó forrás helyettesíthető egy olyan, végtelen térben elhelyezkedő forrással, mely szimmetrikusan, „lélegezve” rezeg. A szimmetrikusan rezgő forrás szimmetrikus nyomásteret hoz létre, vagyis a szimmetriasíkban a nyomás normális irányú deriváltja nulla lesz. Ez pontosan megegyezik a merev fal által megvalósított zérus normális sebesség peremfeltételnek. Ha a féltérbe sugárzó forrás forraserőssége dQ , akkor az ekvivalens, szimmetrikusan lélegző forrás for-

rásérőssége a felület megduplázódásával $2dQ$ lesz. Ha továbbá a $2dQ$ forrásérősségű monopólus nyomásterét keressük, akkor pont az $1/2\pi$ tagot tartalmazó egyenletet kapjuk meg.

A teljes síklemez sugárzását a különböző források tereinek szuperponálásával kapjuk meg:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{j\omega\rho_0}{2\pi} \int_A v(\mathbf{x}') \frac{e^{-jk|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} dA(\mathbf{x}') \quad (8.55)$$

Az eredményül kapott kifejezés neve Rayleigh¹-integrál. A Rayleigh-integrál segítségével tetszőleges sebességeloszlású sugárzó tere számítható numerikusan.

8.4.3. Hengeres dugattyú tere

Határozzuk meg a Rayleigh-integrál segítségével egy végtelen merev falba ágyazott, egyenletes v sebességgel rezgő, R sugarú hengeres dugattyú terét. A számítást gömbi koordináta-rendszerben végezzük, ahol θ a sík normálisával bezárt szöget jelöli.

$$p(\mathbf{x}) = \frac{j\omega\rho_0 v}{2\pi} \int_A \frac{e^{-jk|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} dA(\mathbf{x}') \quad (8.56)$$

Tegyük fel, hogy az $r = |\mathbf{x}|$ távolság lényegesen nagyobb a sugárzó R sugaránál. Ekkor a nevezőben az $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ tagot nyugodtan közelíthetjük r -rel, a számláló exponensében pedig feltételezhetjük az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ vektorok párhuzamosságát, aminek értelmében a távolságkülönbség $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r - r' \cos \phi \sin \theta$. Az integrál kifejezése tehát

$$p(r, \theta) = \frac{j\omega\rho_0 v}{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{jkr' \cos \phi \sin \theta} d\phi r' dr' \quad (8.57)$$

Az integrál további egyszerűsítéséhez a Bessel-függvények két azonosságát használjuk:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\gamma \cos \phi} d\phi = J_0(\gamma) \quad (8.58)$$

aminek értelmében az integrál

$$p(r, \theta) = j\omega\rho_0 v \frac{e^{-jkr}}{r} \int_0^R J_0(kr' \sin \theta) r' dr' \quad (8.59)$$

illetve

$$\int J_0(\gamma) \gamma d\gamma = J_1(\gamma) \gamma \quad (8.60)$$

¹ III. Lord Rayleigh, azaz John William Strutt 1842–1919. Nobel-díjas angol fizikus

amiből

$$\begin{aligned} p(r, \theta) &= j\omega\rho_0 v \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{J_1(kR \sin \theta) R}{k \sin \theta} \\ &= \frac{j\omega\rho_0 Q}{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{2J_1(kR \sin \theta)}{kR \sin \theta} \end{aligned} \quad (8.61)$$

Az eredményből látszik, hogy a végtelen féltérbe sugárzó hengeres dugattyú a távoltérből lényegében egy Q forrásérősségű, féltérbe sugárzó monopólusként látszik, mely irányítottan sugároz. Az irányítottság mértékét a

$$\Psi(\theta) = \frac{2J_1(kR \sin \theta)}{kR \sin \theta} = \frac{2J_1(\gamma)}{\gamma} \quad (8.62)$$

függvény adja meg, ami hasonlóan viselkedik a $\sin \gamma/\gamma$ függvényhez (lásd 8.8. ábra). Értéke $\gamma = 0$ -ban maximális egységnyi, vagyis a hengeres dugattyú főiránya a $\theta = 0$ merőleges irány. A nagy γ értékekre az oszcilláló függvény burkolója nagyjából $\gamma^{-3/2}$ szerint csökken, ami a $\sin \gamma/\gamma$ függvényénél gyorsabb lecsengésre utal.

A vonalforrás teréhez hasonlóan ismét definiálhatjuk a láthatósági tartományt, amit a

$$-kR < \gamma < kR \quad (8.63)$$

összefüggés határoz meg. Nagyobb kR értékre a $2J_1(\gamma)/\gamma$ függvénynek szélesebb szakasza képződik le az iránykarakterisztika $-\pi/2, +\pi/2$ tartományára, ami a frekvencia növekedésével egyre nagyobb számban megjelenő oldalnyalábok jelenlétére utal.

Az iránykarakterisztika kioltási helyeit a Bessel-függvény γ_{m1} zérushelyei határozzák meg, melyek megtalálhatók az 5.1. táblázatban. A főnyaláb kúpszögét az első θ_1 zérushely határozza meg, amire

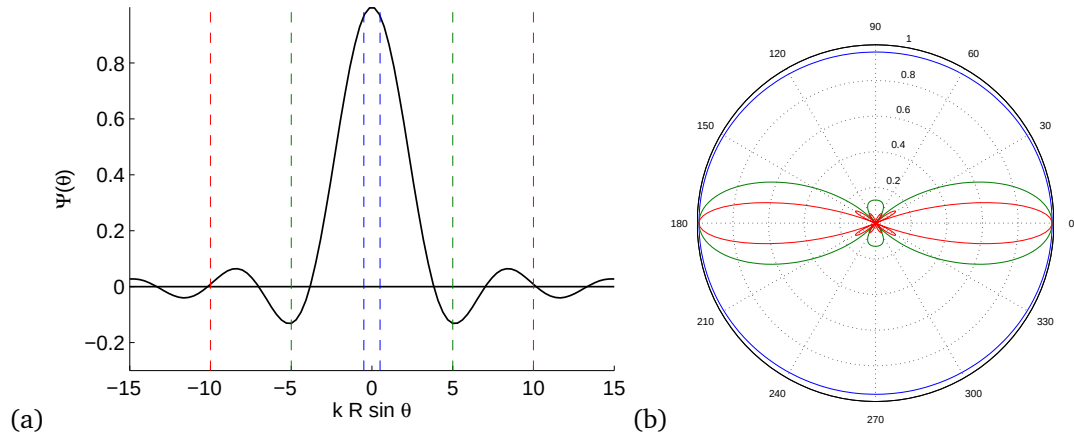
$$\sin \theta_1 = \frac{\gamma_{11}}{kR} = \frac{3,83}{kR} = \frac{1,22\lambda}{D} \quad (8.64)$$

ahol D a henger átmérője. Nagyfrekvencián a főnyaláb kúpszöge hozzávetőlegesen

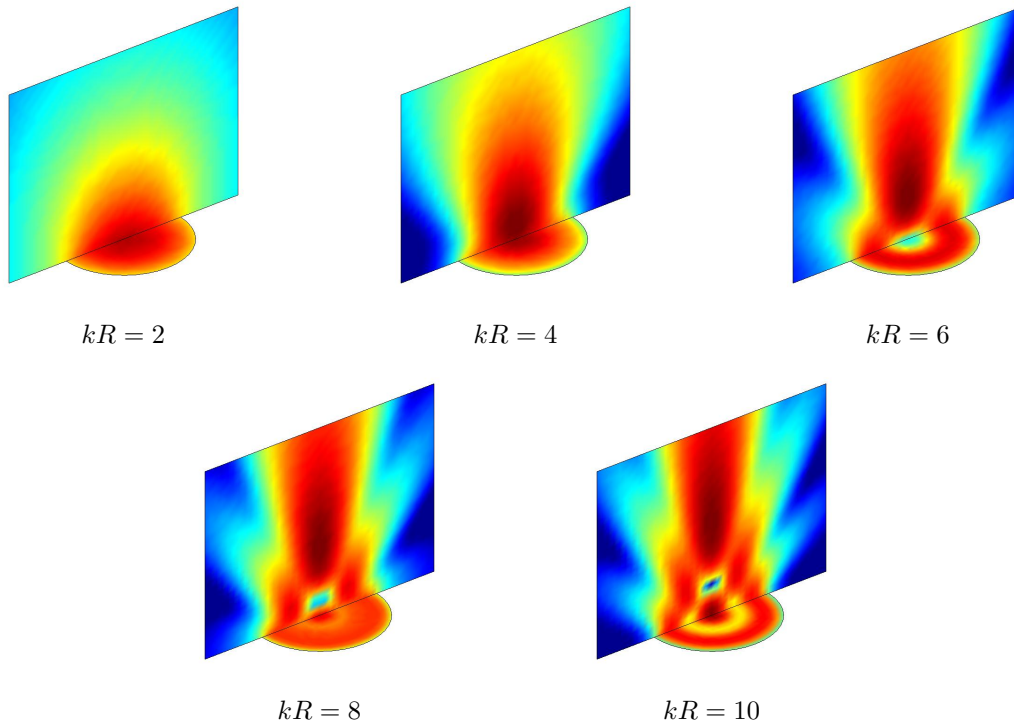
$$2\theta_1 \approx \frac{7,86}{kR} = \frac{2,44\lambda}{D} \quad (8.65)$$

A melléknaláb-elnyomást a $J_1(\gamma)/\gamma$ függvény lokális szélsőértékeinek aránya adja meg, ami jelen esetben

$$20 \log_{10} \frac{1}{0,132} = 17,5 \text{ dB} \quad (8.66)$$



8.8. ábra. Végtelen merev síkba épített, R sugarú hengeres dugattyú iránykarakteristikájának számítása különböző kR értékekre. Az (a) ábra a sebességeloszlás Fourier-transzformáltját, illetve a láthatósági tartomány határait mutatja három különböző kR értékre (kék: $kR = 0,5$, zöld: $kR = 5$, piros: $kR = 10$.) A (b) ábra a különböző frekvenciákon kialakuló iránykarakteristikákat szemlélteti.



8.9. ábra. Egyenletes sebességgel rezgő, végtelen merev falba ágyazott kör alakú lemez nyomásterének abszolút értéke különböző kR értékekre. A közeltéri nyomáseloszlást a Rayleigh-integrál segítségével határoztuk meg.

8.4.4. Hangsugárzás rezgő lemezről

Végtelen lemezben időben harmonikus hajlító síkhullám halad. A lemez transzverzális sebességének leírása

$$v_B = V e^{-j k_B x} \quad (8.67)$$

ahol k_B a hajlító hullám hullámszáma.

A lemez síkhullámú nyomásteret kelt, melynek leírása

$$p(x, z) = P e^{-j(k_x x + k_z z)} \quad (8.68)$$

ahol

$$k = \frac{\omega}{c} = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} \quad (8.69)$$

illetve

$$k_z = k \cos \theta \quad (8.70)$$

Az Euler-egyenlet alapján a z irányú részecskesebesség-komponens kifejezése a lemez felületén

$$\begin{aligned} v_z(x, 0) &= -\frac{1}{j\omega\rho_0} \left. \frac{\partial p(x, z)}{\partial z} \right|_{z=0} \\ &= \frac{k_z}{\omega\rho_0} p(x, 0) = \frac{\cos \theta}{\rho_0 c} p(x, 0) \end{aligned} \quad (8.71)$$

Ennek a sebességkomponensnek meg kell egyeznie a lemez transzverzális $v_B(x)$ rezgésével. Ez két követelményt támaszt:

$$P = \frac{\rho_0 c}{\cos \theta} V \quad (8.72)$$

$$k_x = k_B \rightarrow k_z = \sqrt{k^2 - k_B^2} = k \sqrt{1 - \frac{k_B^2}{k^2}} \quad (8.73)$$

Amennyiben a hajlító rezgés hullámszáma kisebb a hang hullámszámánál, $k_z > 0$ valós érték lesz, ami a z irányban $c_z = \omega/k_z$ sebességgel haladó síkhullámot ír le. Amennyiben a hajlító rezgés hullámszáma meghaladja a hang hullámszámát, a gyök alatti kifejezés negatív lesz, vagyis k_z

$$-j\sqrt{k_B^2 - k^2} \quad (8.74)$$

alakban írható fel, amit az $e^{-j k_z z}$ kifejezésbe helyettesítve, a z irányban exponenciálisan csökkenő, evanescens hullámot kapunk.

A lemezben terjedő hajlító rezgést leíró differenciálegyenlet

$$g - \nabla^2 D \nabla^2 u = \sigma \ddot{u} \quad (8.75)$$

időben és térben is harmonikus függést, csak x irányú változást és gerejsztésmentes homogén lemezt feltételezve

$$k_B^4 D U = \omega^2 \sigma U \quad (8.76)$$

ahonnan a hajlító rezgés diszperziórelációja

$$k_B^2 = \omega \sqrt{\frac{\sigma}{D}} \quad (8.77)$$

aminek értelmében

$$\frac{k_B^2}{k^2} = \frac{\omega \sqrt{\sigma/D}}{\omega^2/c^2} = \frac{c^2 \sqrt{\sigma/D}}{\omega} \quad (8.78)$$

Azt az ω_c frekvenciát, melyen a k_B/k hányados éppen egységnyi, vagyis a k_z kifejezésben a gyök alatti tényező nullává válik, koincidenciafrekvenciának hívjuk:

$$\omega_c = c^2 \sqrt{\sigma/D} \quad (8.79)$$

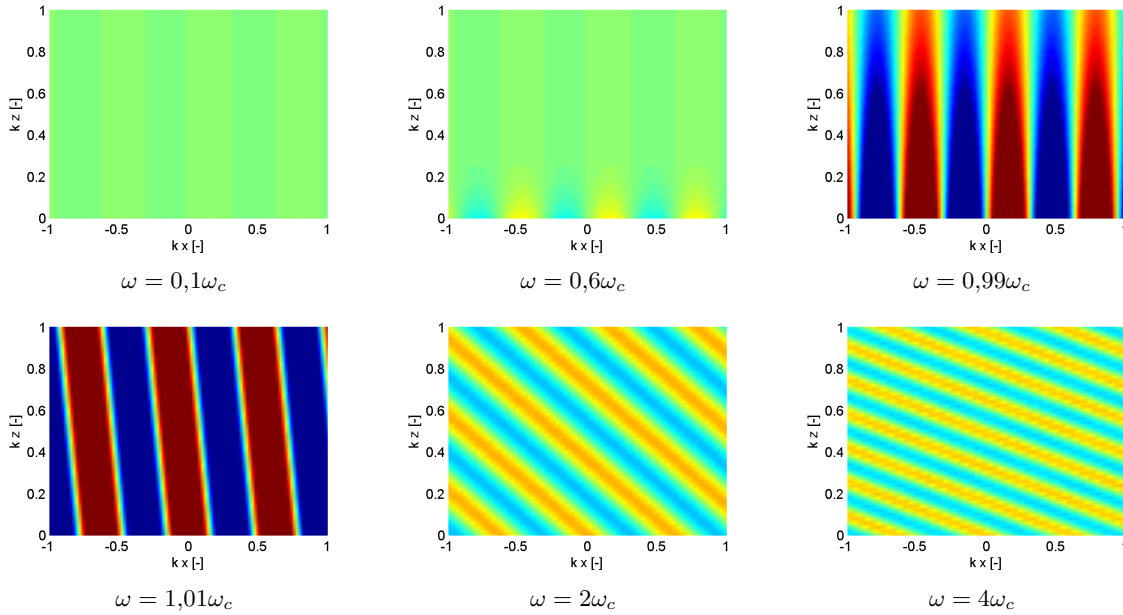
A koincidenciafrekvencia fölött a lemez haladó síkhullámot sugároz le a hangtérbe, a koincidenciafrekvencia alatt evanescens hullámokat ébreszt. A koincidenciafrekvencia fölött a sugárzás főirányát a

$$\theta = \cos^{-1} \frac{k_z}{k} = \cos^{-1} \sqrt{1 - \frac{c^2 \sqrt{\sigma/D}}{\omega}} \quad (8.80)$$

kifejezés adja meg. A koincidenciafrekvencián $\theta = \pm \pi/2$, vagyis $\pm x$ irányú síkhullám terjed a hangtérben. Ha a frekvencia növekszik, a hullámnak z irányú komponense is lesz, és ha a frekvencia tart a végtelenhez, a sugárzás iránya egyre inkább tart a merőlegeshez. A jelenséget a 8.10 ábra mutatja be. Az ábrán a végtelen lemez hangterének valós részét látjuk különböző frekvenciákon. A tengelyek normalizáltak úgy, hogy az x tengely látható szakaszára mindig ugyanannyi félhullám essen. Az ábrán jól látszik, hogy koincidenciafrekvencia alatt a nyomás z irányban exponenciálisan lecseng, de a frekvencia növelésével erősödik. A koincidenciafrekvencia fölött a hanghullám terjedő, és iránya tart a merőlegeshez.

8.4.5. Véges méretű lemezről lesugárzott hangnyomás

A továbbiakban azt vizsgáljuk meg, hogy a koincidenciafrekvencia miként befolyásolja véges méretű lemezek hangterét. Ehhez a következő egysze-



8.10. ábra. Végtelen lemez lesugárzott hangtere különböző frekvenciákon.

rú modelt vizsgáljuk: Tegyük fel, hogy egy mindkét végén egyszerűen alátámasztott, L hosszúságú lap harmonikus sebességeloszlással sugároz. Az egyszerűség kedvéért legyen a lap sebességeloszlása a z tengelyre szimmetrikus. Ekkor a véges lélegző vonalforrás teréről tanultak értelmében a lesugárzott távolféri iránykarakterisztikát a sebességeloszlás Fourier-transzformáltjaként számíthatjuk:

$$\Psi(\theta) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} v(x) e^{jk \sin \theta} dx \quad (8.81)$$

Ha a lemez $v(x)$ sebességeloszlása k_B hullámszámú harmonikus függvény, akkor az eredő spektrum a harmonikus függvény spektrumának, illetve az L szélességű négyzetablak spektrumának konvolúciója, vagyis $\pm k_B$ hullámszámoknál elhelyezkedő sinc függvények szuperpozíciója, ahogy azt a 8.11. ábra mutatja. A spektrum láthatósági tartományát a k hullámszám határozza meg. mivel a k_B hajlító hullámszám a módusszám négyzetes függvénye, a láthatósági tartomány viszont a módusszámmal arányosan szélesedik, eleinte a spektrum maximumai távolodnak a láthatósági tartomány széleitől, majd a koincidenciafrekvencián a láthatósági tartomány határai eléri a hajlító hullámszám által meghatározott maximumokat.

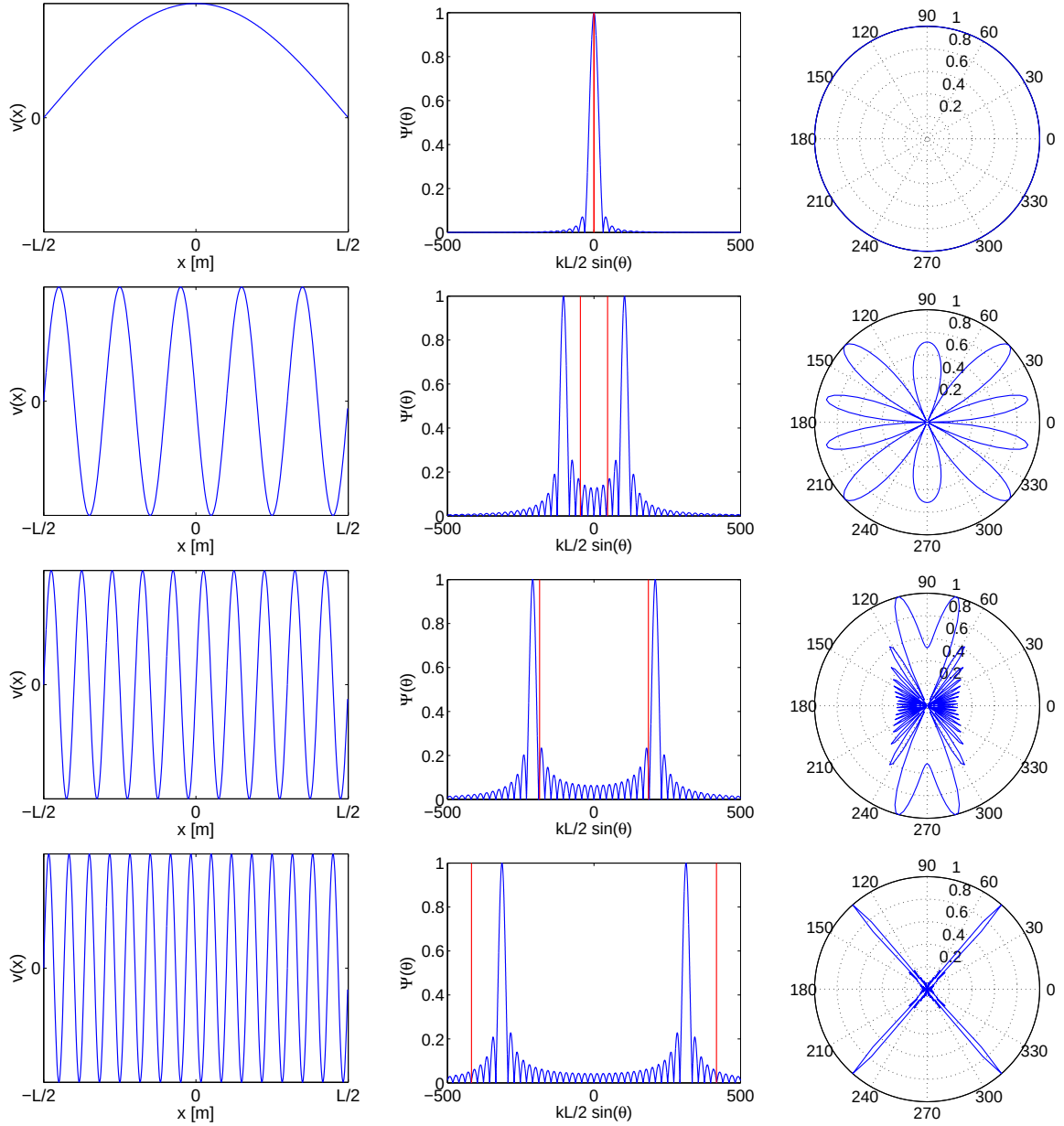
Ez az iránykarakterisztikában úgy nyilvánul meg, hogy a koincidenciafrekvencia alatt a lemez iránykarakterisztikája többé-kevésbé egyenletesen eloszló oldalnyalábokat tartalmaz, melyek a sinc függvény hullámmainak leképzései a θ tengelyre. Koincidenciafrekvencia környékén az oldalirányú oldalnyaláb nagyon felerősödik, majd két éles oldalnyaláb uralja a hangteret, melyek irányszöge a frekvenci növelésével tart a zérushoz (merőleges-hez).

8.4.6. Tetszőleges alakú sugárzó hangtere

Zárásként a tetszőleges alakú hangsugárzó hangterét adjuk meg. Legyen a hangsugárzónk egy zárt A felület, melyen ismerjük a normális irányú $v_n(\mathbf{x})$ részecske sebességet vagy a $p(\mathbf{x})$ hangnyomást. tekintsük először azt az esetet, mikor a sugárzó az A felület által körbefoglalt zárt V térfogatba sugároz. A V térfogatban természetesen érvényes a hangter hullámegyenlete, melynek harmonikus alakja a Helmholtz-egyenlet:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (8.82)$$

Írjuk fel a zárt térfogatra a vektoranalízis Green-



8.11. ábra. L széles lemezdarab hajlító módusai által sugárzott hangtér irányítottsága. A bal oldali sor a lemezdarab $v(x)$ sebességeloszlását, a középső sor a sebességeloszlás $\Psi(k \sin \theta L/2)$ spektrumát, a jobb oldali sor pedig a spektrum láthatósági tartományába eső szakasz polárdiagramos ábrázolását mutatja.

tételét. Ha p és q tetszőleges, kétszer differenciálható skalárterek, akkor érvényes a

$$\int_V \nabla^2 pq - \nabla^2 qp dV = - \int_A (\nabla pq - \nabla qp) \mathbf{n} dA \quad (8.83)$$

ahol $\mathbf{n}$ a felület befelé mutató egységnormálisa (ennek iránya miatt a jobb oldali negatív előjel). Alkalmazzuk a Green-tételt a következő szereposztásban: Legyen p a V térfogaton belül uralkodó hangnyomás, q pedig a hangtér $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ Green-függvénye, mely a

$$\nabla^2 g + k^2 g = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (8.84)$$

egyenlet megoldása, vagyis az $\mathbf{x}_0$ pontban elhelyezett monopólus nyomásteret. A Green-tétel alakja ekkor

$$\begin{aligned} \int_V (-k^2 p)g - (-\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - k^2 g)p dV = \\ - \int_A (\nabla pg - \nabla gp) \mathbf{n} dA \end{aligned} \quad (8.85)$$

A lehetséges egyszerűsítések és a Dirac-delta kiválasztási tulajdonságának kihasználásával

$$p(\mathbf{x}_0) = \int_A g'_n p - p'_n g dA \quad (8.86)$$

ahol p'_n a nyomás normális irányú deriváltját jelöli. Az Euler-egyenlet értelmében ez a normális irányú részecske sebességgel arányos:

$$p(\mathbf{x}_0) = \int_A g'_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) p(\mathbf{x}) + j\omega \rho_0 v_n(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dA \quad (8.87)$$

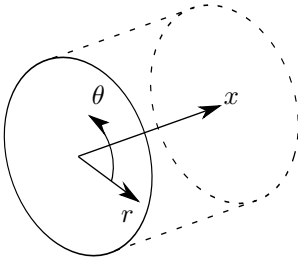
Az integrál neve Krichhoff–Helmholtz-integrál.

Eredményünk szerint az $\mathbf{x}_0$ pontban kialakuló nyomás a felületi $p(\mathbf{x})$ nyomás és $v_n(\mathbf{x})$ normális irányú rezgéssebesség ismeretében két integrál kiértékelésével számítható. A sebességet tartalmazó integrálban a sebesség együtthatója az $\mathbf{x}_0$ pontban elhelyezett monopólus $\mathbf{x}$ -beli nyomásteret, ami a reciprocitási elv értelmében megegyezik az $\mathbf{x}$ -beli monopólus $\mathbf{x}_0$ -beli terével. A nyomást tartalmazó integráltagban a nyomás együtthatója a monopól tér normális irányú deriváltja, ami egy, a felület $\mathbf{x}$ pontjában elhelyezkedő, normális irányban rezgő dipól sugárzó $\mathbf{x}_0$ -beli nyomásterét adja meg. Azt látjuk tehát, hogy tetszőleges akusztikus sugárzó hangtere monopól és dipól források szuperpozíciójával számítható.

Amennyiben a sugárzónk nem a zárt V térfogatba, hanem a nyílt végtelen térbe sugároz, a Krichhoff–Helmholtz-integrál érvényes marad, csak arra a végtelen térfogatra kell felírnunk, melyet belülről az A felület, kívülről pedig egy R sugarú gömbfelület határol, ahol $R \rightarrow \infty$. A felületi integrált ekkor nyilván a két felület uniójára kell felírnunk, de feltételezzük, hogy az R sugarú gömbfelületre felírt tag zérus. Ezt a feltételt Sommerfeld-féle sugárzási feltételnek hívjuk. Praktikusan azt jelenti, hogy a végtelenből nem reflektálódik hang a V térfogatba.

9. fejezet

Hangterjedés zárt hangszertestekben



9.1. ábra. Koordinátaváltozók értelmezése
hengerkoordináta-rendszerben

9.1. Egyenes hengeres csövek

A továbbiakban a

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (9.1)$$

Helmholtz-egyenlet $r\theta x$ hengerkoordináta-rendszerben való megoldását tárgyaljuk. A Helmholtz-egyenlet hengerkoordináta-rendszerben érvényes alakja

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k^2 p = 0 \quad (9.2)$$

A megoldáshoz alkalmazzuk szokásos módon a változók szeparálásának módszerét, azaz írjuk fel a megoldást három függvény szorzataként, ahol a három tag csak egy-egy koordinátaváltozótól függ:

$$p(r, \theta, x) = p_R(r) p_\Theta(\theta) p_X(x) \quad (9.3)$$

Visszahelyettesítés és $p(r, \theta, x)$ -szel való osztás után az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\underbrace{\frac{p_R''(r)}{p_R(r)} + \frac{p_R'(r)}{r p_R(r)}}_{-k_r^2} + \underbrace{\frac{p_\Theta''(\theta)}{r^2 p_\Theta} + \frac{p_X''(x)}{p_X(x)}}_{-k_x^2} + k^2 = 0 \quad (9.4)$$

Ismét kihasználjuk, hogy a különböző tagok különböző változóktól függenek, így mindhárom jelölt tag konstans, a köztük levő összefüggés pedig

$$k_r^2 + k_x^2 = k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (9.5)$$

A p_X tagra felírt egyenletből következik, hogy

$$p_X(x) = p^+ e^{-jk_x x} + p^- e^{jk_x x} \quad (9.6)$$

A p_R és p_Θ tagokra felírt

$$\frac{p_R''(r)}{p_R(r)} + \frac{p_R'(r)}{r p_R(r)} + \frac{p_\Theta''(\theta)}{r^2 p_\Theta} = -k_r^2 \quad (9.7)$$

egyenlet r^2 -tel való szorzás után tovább szeparálható:

$$\frac{r^2 p_R''(r)}{p_R(r)} + \frac{r p_R'(r)}{p_R(r)} + (k_r r)^2 = -\frac{p_\Theta''(\theta)}{p_\Theta} = n^2 \quad (9.8)$$

A p_Θ tagra felírt egyenlet megoldása egyenlőség megoldása

$$p_\Theta(\theta) = \cos(n\theta) \quad (9.9)$$

ahol a periodicitási feltételből következik, hogy n csak egész értéket vehet fel.

A p_R tagra felírt egyenlet p_R -rel való szorzás után

$$r^2 p_R''(r) + r p_R'(r) + ((k_r r)^2 - n^2) p_R(r) = 0 \quad (9.10)$$

alakot ölt. A $\gamma = k_r r$ Változócsere után a

$$\gamma^2 p''(\gamma) + \gamma p'(\gamma) + (\gamma^2 - n^2) p(\gamma) = 0 \quad (9.11)$$

Bessel-egyenletet kapjuk, aminek megoldásai a $J_n(\gamma)$ Bessel-függvények:

$$p_R(r) = J_n(k_r r) \quad (9.12)$$

A teljes általános megoldás ezek szerint

$$p(r, \theta, x) = J_n(k_r r) \cos(n\theta) [p^+ e^{-jk_x x} + p^- e^{jk_x x}]$$

$$k_r^2 + k_x^2 = k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (9.13)$$

alakú, azaz a Helmholtz-egyenlet hengerkoordináta-rendszerben felírt általános megoldását sugárirányban Bessel-függvények, érintőirányban harmonikus függvények, hosszirányban pedig síkhullámok adják.

9.1.1. Hullámterjedés végtelen, merev falú csőben – haladó és evanescens hullámok

A következőkben végtelen hengeres csőben terjedő hullámokat vizsgálunk. Először is feltételezzük, hogy a hullám csak a pozitív x tengely irányában terjed, vagyis a teljes (9.13) megoldásból kizárjuk a p^- tagot:

$$p(r, \theta, x) = p_0 J_n(k_r r) \cos(n\theta) e^{-jk_x x} \quad (9.14)$$

Peremfeltételként figyelembe vesszük, hogy a cső falán a sugárirányú v_r sebességkomponens zérus, vagyis a p nyomás sugár irányú p'_r deriváltja zérus. Ez a feltétel a Bessel-függvénnyel leírt komponenszt érinti:

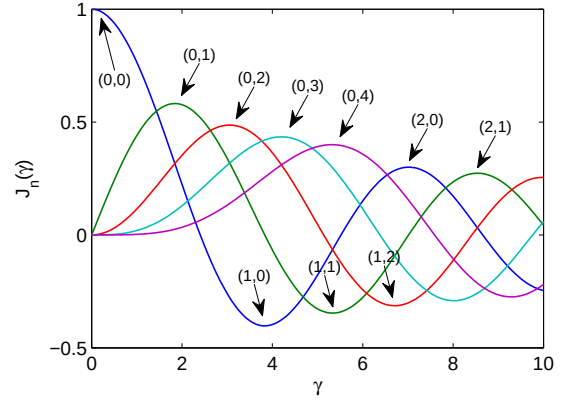
$$p'_R(R) = 0 \rightarrow J'_n(k_r R) = 0 \quad (9.15)$$

A feltételt kielégítő k_r hullámszámokat a Bessel-függvények deriváltjainak γ_{mn} gyökhelyei, vagyis a Bessel-függvények szélsőérték-helyei határozzák meg. A szélsőérték-helyeket a 9.2. ábra ábrázolja, és 9.1. táblázat sorolja fel. Mivel a Bessel-függvények oszcillálnak, természetesen minden J_n függvénynek végtelen sok szélsőértéke van. A páratlan rendszámú Bessel-függvényeknek minden szélsőérték-helyük pozitív, a páros n rendszámú Bessel-függvényeknek lokális szélsőértékük a $\gamma_{0n} = 0$ hely is. Egy adott mn kombinációhoz tartozó γ_{mn} szélsőérték hely ismeretében a keresztirányú hullámszám a

$$k_{r,mn} = \frac{\gamma_{mn}}{R} \quad (9.16)$$

összefüggéssel számolható, a hosszirányú hullámszám kifejezése pedig

$$k_{x,mn} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_{r,mn}^2} \quad (9.17)$$



9.2. ábra. A $J_n(\gamma)$ Bessel-függvények $J'_n(\gamma)$ deriváltjainak γ_{mn} zérushelyei, azaz a J_n Bessel-függvények lokális szélsőérték-helyei

Az utóbbi összefüggés fontos jelenségre mutat rá. Mindazon mn kombinációkra, ahol a gyök alatt pozitív mennyiséget kapunk, vagyis $k_{r,mn} < \omega/c$, a $k_{x,mn}$ hosszirányú hullámszám pozitív valós érték lesz, vagyis az $e^{-jk_{x,mn}x}$ tag x irányú haladó hullámot ír le. Ha ellenben a keresztirányú hullámszám meghaladja a hang ω/c hullámszámát, a gyökjel alól -1 -et kiemelve

$$k_{x,mn} = -j \sqrt{k_{r,mn}^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} = -j\alpha_{mn} \quad (9.18)$$

vagyis a hosszirányú hullámszám negatív képzetes lesz, az

$$e^{-jk_{x,mn}x} = e^{-\alpha_{mn}x} \quad (9.19)$$

tag pedig a pozitív x tengely mentén exponenciálisan csökkenő, nem oszcilláló nyomásfüggést ír le. Ezek az ún. evanescens hullámok a gerjesztés helyének közelében gyorsan lecsillapodnak, és nem játszanak szerepet a végtelen csőben kialakuló hangképben.

Látjuk, hogy minden keresztirányú módushoz tartozik egy határfrekvencia, ami fölött a módushoz terjedő hullám, és ami alatt a módushoz evanescens hullámforma tartozik. A határfrekvencia kifejezése

$$\omega_{mn} = k_{r,mn} c = \frac{\gamma_{mn} c}{R} \quad (9.20)$$

A keresztirányban konstans (0,0) módushoz zérus határfrekvencia tartozik, vagyis tetszőleges frek-

m	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
0	0	1.8412	3.0542	4.2012	5.3176	6.4156
1	3.8317	5.3315	6.7061	8.0153	9.2824	10.5199
2	7.0156	8.5364	9.9694	11.3459	12.6819	13.9872
3	10.1735	11.7060	13.1704	14.5858	15.9641	17.3129
4	13.3237	14.8636	16.3475	17.7888	19.1960	20.5755

9.1. táblázat. A Bessel-függvények lokális szélsőérték-helyei

vencián kialakulhat a végtelen csőben olyan haladó hullám, melyhez a cső keresztmetszete mentén állandó nyomás tartozik. A következő határfrekvencia a (0,1)-es módushoz tartozó ω_{01} érték, amit a cső vágási frekvenciájának nevezünk, és melynek kifejezése

$$\omega_c = \omega_{01} = \frac{c\gamma_{01}}{R} = \frac{1,84c}{R} \quad (9.21)$$

Mint később látni fogjuk, a vágási frekvencia fontos szerepet tölt be a fúvós hangszerek működésében.

9.1. példa Hullámalakok végtelen csőben

Milyen hullámalakok terjedhetnek egy $R = 10$ cm sugarú, merev falú csőben $f = 2900$ Hz frekvencia alatt?

A terjedő hullámalakokat a

$$\frac{\omega}{c} > \frac{\gamma_{mn}}{R} \quad (9.22)$$

feltétel választja ki, vagyis a megfelelő γ_{mn} értékek

$$\gamma_{mn} < \frac{2\pi f R}{c} = \frac{2\pi 2900 \cdot 0,1}{340} = 5,3592. \quad (9.23)$$

A megfelelő (mn) párok és a hozzájuk tartozó szélsőérték-helyek a következők:

$$\begin{array}{ccccccc} (0,0) & (0,1) & (0,2) & (1,0) & (0,3) & (0,4) & (1,1) \\ 0 & 1.84 & 3.05 & 3.83 & 4.20 & 5.31 & 5.33 \end{array} \quad (9.24)$$

A (0,0) alak tiszta síkhullám.

9.1.2. Véges hosszú, merev falú hengeres csövek módusai

A végtelen csövek után térjünk át a véges L hosszúságú csövek vizsgálatára. Fogalmazzunk meg két

további peremfeltételt: Legyen a csőünk mindkét végén mereven lezárva, vagyis legyen a részecske-sebesség zérus a cső mindkét végén:

$$\begin{aligned} v_x(0) &= v_x(L) = 0 \\ p'_x(0) &= p'_x(L) = 0 \end{aligned} \quad (9.25)$$

A peremfeltétel nyilván a $p_X(x)$ megoldásfüggvényt érinti, amire a következő megoldásfüggvényeket kapjuk:

$$p_X(x) = \cos\left(\frac{l\pi}{L}x\right) = \cos k_{x,lmn}x \quad (9.26)$$

ahol $k_{x,lmn} = l\pi/L$ a hosszirányú hullámszám.

$$k_{r,lmn}^2 + k_{x,lmn}^2 = k^2 \quad (9.27)$$

A cső módusait három egész számmal, az (l, m, n) számhármassal tudjuk leírni. A cső ψ_{lmn} nyomásmódusának alakja

$$\psi_{lmn}(r, \theta, x) = J_n\left(\frac{\gamma_{mn}}{R}r\right) \cos(n\theta) \cos\left(\frac{l\pi}{L}x\right) \quad (9.28)$$

ahol fennáll a

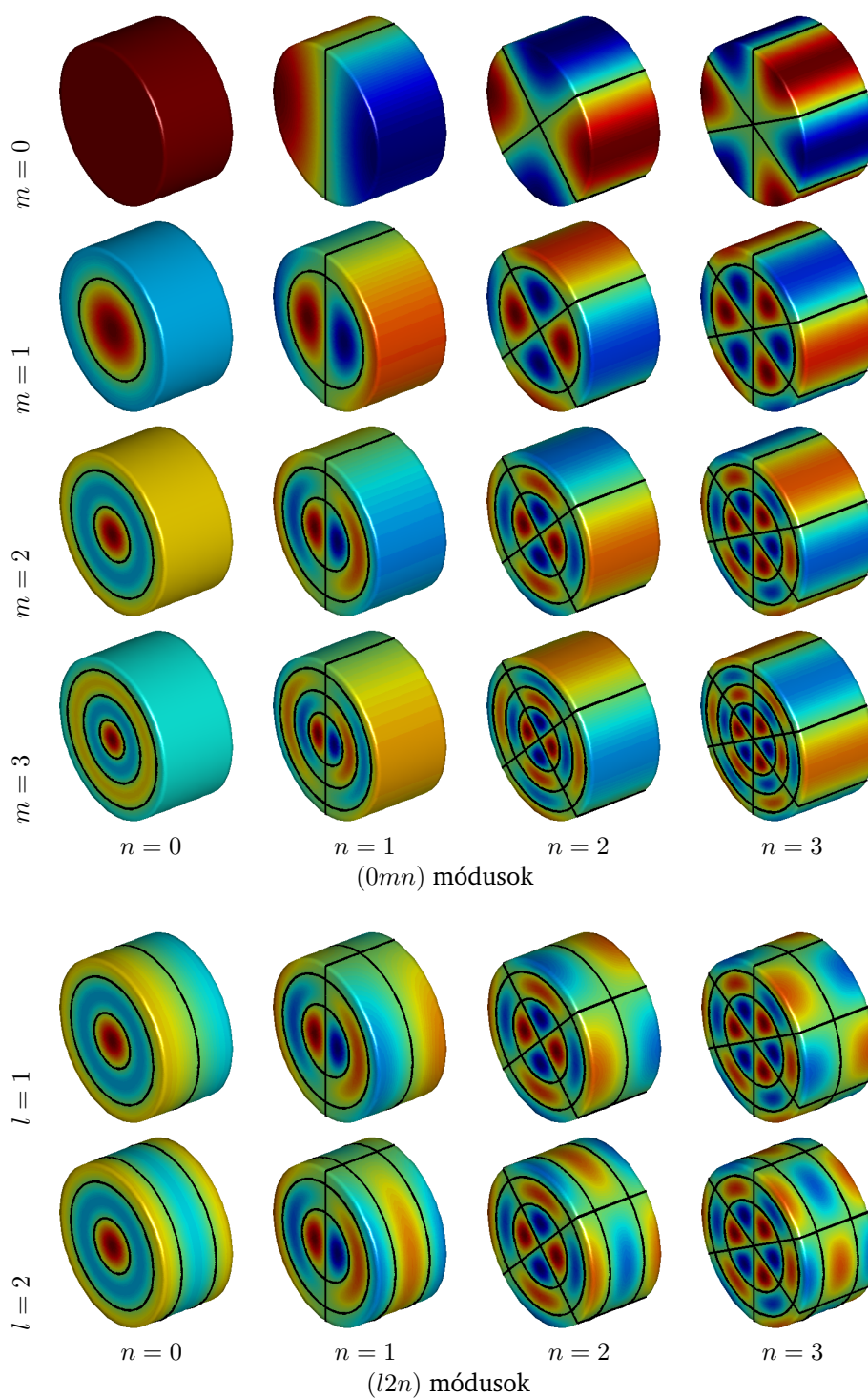
$$\left(\frac{\gamma_{mn}}{R}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (9.29)$$

összefüggés. Ez utóbbi határozza meg a ψ_{lmn} módus

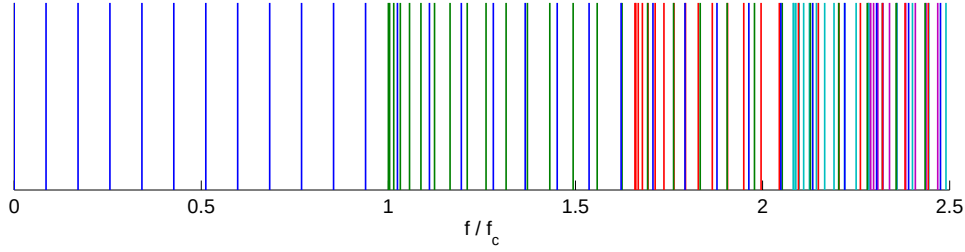
$$\omega_{lmn} = \frac{c\pi}{L} \sqrt{\left(\frac{\gamma_{mn}}{\pi R'}\right)^2 + l^2} \quad (9.30)$$

sajátfrekvenciáját, ahol $R' = R/L$ a cső relatív sugara.

A ψ_{lmn} módusalakokat a 9.3. ábra mutatja $l = 0 \dots 2$, $m = 0 \dots 3$ és $n = 0 \dots 3$ esetekre. Figyeljük meg, hogy a módusalakok csomóhengereket, valamint keresztirányú és hosszanti irányú csomósíkokat tartalmaznak. A keresztirányú csomósíkok



9.3. ábra. Véges hosszú, merev falú és mindkét végén zárt hengeres cső módusai



9.4. ábra. $R' = 0,1$ relatív sugarú kör keresztmetszetű cső sajátfrekvenciáinak eloszlása. A különböző színek a különböző keresztirányú módusokat jelölik: kék: $(l,0,0)$, zöld: $(l,0,1)$, piros: $(l,0,2)$, türkiz: $(l,1,0)$.

száma az l érték, m adja meg a csomóhengerek számát, n pedig a hosszirányú csomósíkok számát írja le.

Térjünk vissza a vágási frekvencia fontos szerepére, és vizsgáljuk meg egy $R/L = 0,1$ relatív sugarú hengeres cső első néhány sajátfrekvenciáját. A sajátfrekvenciákat a 9.4. ábra mutatja. Látjuk, hogy az első keresztirányú módus megjelenéséig a sajátfrekvenciák az alapfrekvencia egész számú többszörösei, vagyis annak felharmonikusai. A vágási frekvencián belépnek a módusok közé az $(l,0,1)$ módusok is, és innen a Bessel-függvények szélsőértékhelyeinek rendezetlensége miatt meglehetősen szabálytalanul követik egymást a sajátfrekvenciák. A kép tovább bonyolodik minden újabb keresztirányú módus belépésekor.

9.1.3. Végese hosszú hengeres cső bemenő impedanciája

A továbbiakban azzal foglalkozunk, hogy egy véges hosszú hengeres cső bemenetén hogyan alakul a hangnyomás és a részecske sebesség kapcsolata. Ez a téma többek között az akusztikai mérések szempontjából fontos: Ha tudjuk, hogy különböző cső-típusok esetén milyen kapcsolat van a cső végén mérhető hangtérjellemzők között, akkor a hangtérjellemzőket megmérve következtethetünk a cső belső viselkedésére, rezonanciáira és a lesugárzás tulajdonságaira is.

Az egyszerűség kedvéért csak a longitudinális módusokkal foglalkozunk, vagyis feltételezzük, hogy a csövet a vágási frekvencia alá eső zenei tartományban használjuk. Ebben a frekvenciatartományban a csőben kialakuló harmonikus nyomás

térfüggését a

$$p(x) = p^+ e^{-jkx} + p^- e^{jkx} \quad (9.31)$$

egyenlet írja le. A hangtér első (8.4) egyenletének harmonikus alakja szerint

$$p' + j\omega\rho_0 v = 0 \quad (9.32)$$

amit (9.31)-be helyettesítve

$$v(x) = \frac{-p'(x)}{j\omega\rho_0} = \frac{1}{\rho_0 c} (p^+ e^{-jkx} - p^- e^{jkx})$$

A cső $z(x)$ impedanciáját tetszőleges pozícióan a nyomás és a sebesség hányadosaként definiáljuk:

$$z(x) = \frac{p(x)}{v(x)} = \rho_0 c \frac{p^+ e^{-jkx} + p^- e^{jkx}}{p^+ e^{-jkx} - p^- e^{jkx}} \quad (9.33)$$

vezessük be az $r = p^-/p^+$ reflexió tényezőt, ami a pozitív és a negatív x irányban terjedő hullámok komplex amplitúdóit viszonyítja egymáshoz. Ekkor az impedanciára a

$$z(x) = \rho_0 c \frac{e^{-jkx} + r e^{jkL}}{e^{-jkx} - r e^{jkL}} = \rho_0 c \frac{1 + r e^{j2kx}}{1 - r e^{j2kx}} \quad (9.34)$$

kifejezést kapjuk.

tegyük fel, hogy a csövet lezáró impedancia $z(L) = z_2$. Ekkor a reflexió tényező kifejezhető:

$$z(L) = z_2 = \rho_0 c \frac{1 + r e^{j2kL}}{1 - r e^{j2kL}} \quad (9.35)$$

alakban, amit átrendezve

$$r = \frac{z_2 - z_0}{z_2 + z_0} e^{-j2kL} \quad (9.36)$$

A reflexiós tényező ismeretében könnyen kifejezhető a cső bemenő impedanciája:

$$\begin{aligned} z_1 &= z(0) = z_0 \frac{1+r}{1-r} \\ &= z_0 \frac{z_2 \cos kL + jz_0 \sin kL}{jz_2 \sin kL + z_0 \cos kL} \\ &= z_0 \frac{z_2 + jz_0 \tan kL}{z_0 + jz_2 \tan kL} \end{aligned} \quad (9.37)$$

A bemenő impedancia kifejezése után vizsgáljuk meg, hogy mire következtethetünk a bemenő impedancia alapján. Tegyük fel, hogy a vizsgált csövünk $x = 0$ -ban ideálisan zárt, vagyis $v(x = 0) = 0$. A cső sajátfrekvenciáin a csőben véges nyomás alakulhat ki a lezáráson, vagyis a cső bemenő impedanciája végtelen. A bemenő impedancia szingularitásai tehát az $x = 0$ -ban zárt cső sajátfrekvenciáin jelentkeznek.

Tegyük fel, hogy a csövünk $x = 0$ -ban ideálisan nyitott, vagyis $p(x = 0) = 0$. A cső rezonanciafrekvenciáin a zérus nyomás véges részecskesebesség mellett alakul ki, vagyis a cső bemenő impedanciája zérus. A bemenő impedancia zérushelyei tehát az $x = 0$ -ban ideálisan nyitott cső sajátfrekvenciáin jelentkeznek.

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy hogy alakul a bemenő impedancia néhány tipikus lezárás esetén.

Ideális szabad lezárás

Ideális szabad lezárás esetén a lezáró $z_2 = z(L)$ impedancia zérus, ami zérus $p(L)$ hangnyomásnak felel meg. Ebben az esetben a cső bemenetén látódó impedancia

$$z_1 = z_0 \frac{jz_0 \sin kL}{z_0 \cos kL} = jz_0 \tan kL \quad (9.38)$$

A mindkét végén szabadon hagyott cső rezonanciafrekvenciáit a bemenő impedancia zérushelyei adják meg, melyekre $kL = l\pi$.

A bal oldalon zárt és jobb oldalon nyitott cső rezonanciafrekvenciáit a $\tan kL$ függvény szinguláris helyei adják meg, melyekre $kL = (2l + 1)\pi/2$.

Ideális merev lezárás

Ideális merev $z_2 = \infty$, $v(L) = 0$ lezárás esetén a cső bemenő impedanciája

$$z_1 = z_0 \frac{\cos kL}{j \sin kL} = -jz_0 \cot kL \quad (9.39)$$

Ebben az esetben a bal oldalon nyitott cső rezonanciafrekvenciáit a $kL = (2n + 1)\pi/2$, a mindkét végén lezárt cső rezonanciafrekvenciáit pedig a $kL = n\pi$ értékek határozzák meg.

Lezárás specifikus impedanciával

Ha a csövet a síkhullám z_0 specifikus impedanciájával zárjuk le, akkor

$$z_1 = z_0 \frac{z_0 \cos kL + jz_0 \sin kL}{jz_0 \sin kL + z_0 \cos kL} = z_0 \quad (9.40)$$

vagyis a cső végtelen hosszúnak látszik. Könnyen látszik, hogy ebben az esetben az r reflexiós tényező zérus, vagyis egyáltalán nem verődik vissza hullám a cső lezárásáról.

Lezárás a féltér bemenő impedanciájával

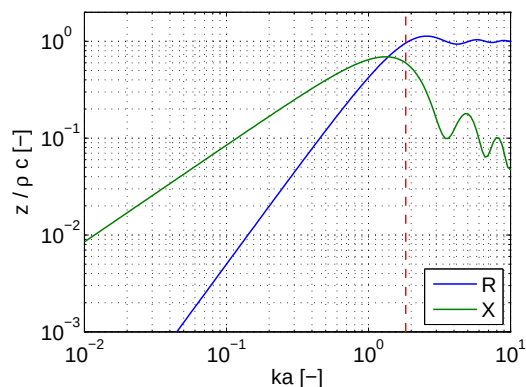
Az ideálisan merev lezárás igen jól közelíti a mereven lezárt hangszervégek esetét. A szabad lezárás esetében azonban nagyon fontos az ideális szabad lezárásnál pontosabb modell használata.

A lezáráshoz azt az esetet modellezzük, mikor a cső egy a sugarú, mereven mozgó dugattyúban végződik, amely a végtelen féltérbe sugároz. Egy ilyen, v sebességgel mozgó dugattyú által ébresztett távolféri nyomást már vizsgáltuk a ?? fejezetben. A köztérben, a dugattyú felületén kialakuló p nyomás kifejezésére az alábbi közelítő összefüggést használhatjuk:

$$\frac{p(L)}{v(L)} = z_2 = R + jX \quad (9.41)$$

ahol R a sugárzási impedancia valós része, X pedig annak képzetes része. Ezek közelítő összefüggései:

$$\begin{aligned} R &= z_0 \left[\frac{(ka)^2}{2} - \frac{(ka)^4}{2^2 3} + \frac{(ka)^6}{2^2 3^2 4} - \dots \right] \\ X &= \frac{z_0}{\pi (ka)^2} \left[\frac{(2ka)^3}{3} - \frac{(2ka)^5}{3^2 5} + \frac{(2ka)^7}{3^2 5^2 7} - \dots \right] \end{aligned} \quad (9.42)$$



9.5. ábra. A végtelen féltérbe sugárzó a sugarú dugattyúra ható akusztikai impedancia valós R és képzetes X része. A piros vonal a vágási frekvenciát jelöli.

a függvényeket pedig a 9.5. ábra ábrázolja.

A kis $ka \ll 1$ értékek tartományában a lezáró impedancia képzetes része dominál, és alkalmazható a sorfejtés egytagú közelítése:

$$z_2 \approx jz_0 \frac{8ka}{3\pi} \approx jz_0 \tan k \frac{8a}{3\pi} \quad (9.43)$$

ami jól láthatóan egy

$$L' = \frac{8a}{3\pi} \approx 0,85a \quad (9.44)$$

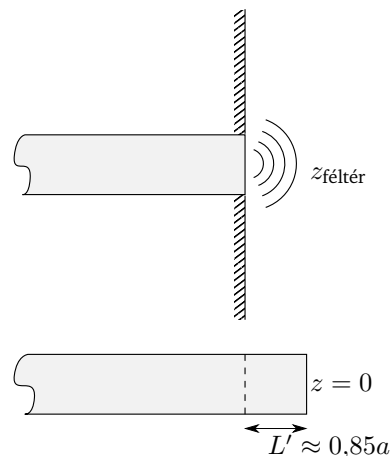
hosszúságú, ideálisan zérus nyomással lezárt cső impedanciájának felel meg.

Elmondhatjuk tehát, hogy egy, a szabad végtelen féltérbe sugárzó L hosszú és R sugarú cső a kisfrekvenciás tartományban praktikusán olyan, ideálisan lezárt csőként kezelhető, melynek hossza $L + 0,85R$. Az L' tagot korrekciós hosszknak hívjuk.

Amennyiben a cső nem a végtelen féltérbe, hanem a végtelen szabad térbe sugároz, akkor a korrekciós hossz némileg rövidebb, értéke $L' \approx 0,61R$.

Mivel a kisfrekvenciás tartományban a lezáró impedancia képzetes része dominál, a lezáráson a nyomás és a sebesség $\pi/2$ fáziskülönbséggel van jelen. Ez azt jelenti, hogy a csővég nem sugároz le valós teljesítményt, hanem csak a lengő teljesítménytag alakul ki rajta.

A nagyfrekvenciás tartományban már a lezáró impedancia valós része lesz domináns, és $kR \approx 1$ értéknél eléri a $\rho_0 c$ síkhullámú specifikus impedan-



9.6. ábra. A végtelen féltérbe sugárzó cső lezáró impedanciája kisfrekvencián L' effektív hosszú, ideálisan nyitott csővégződésével ekvivalens.

cia értékét. Ez azt jelenti, hogy a lezáráson megjelenő nyomás és sebesség egyre inkább fázisban lesznek, így a lezáráson $Apv \approx Av^2 \rho_0 c$ teljesítmény disszipálódik. A disszipált teljesítmény lesugárzott hangteljesítmény formájában távozik a csővegről.

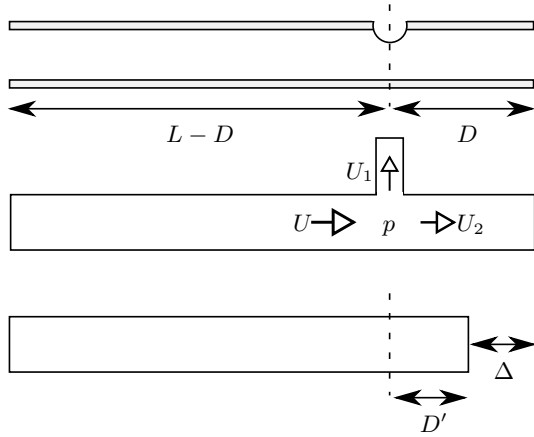
9.1.4. Oldalfuratok

A fúvós hangszerek hangmagasság-változtatásának egyik módja az oldalfuratok alkalmazása. Ha a játékos egy, a hangszer végéhez közeli oldalfuratot felnyit, a hangszer látszólagos hosszát megrövidíti, így a hangszer magasabb hangon szólal meg. Az oldalfuratok hangmagasságra gyakorolt hatásának analizéséhez egy egyszerű fúvós hangszermodellt vizsgálunk meg.

A 9.7. ábrán mutatott hangszer egy L hosszúságú, A belső keresztmetszeti felületű cső, melynek falvastagsága d . A hangszer mindkét vége nyitott, és jobb oldali végétől D távolságra egy a felületű oldalfuratot helyezünk el.

Az oldalfurattal a hangszert lényegében három csőre bontottuk: Egy $L - D$ hosszú cső a hangszer bal oldala és az oldalfurat között helyezkedik el, egy d hosszú cső maga az oldalfurat, végül a harmadik, D hosszú cső az oldalfurattól a hangszer végéig halad.

Éljünk azzal a feltételezéssel, hogy a hangszert ideális, zérus impedancia peremfeltétel zárja le a



9.7. ábra. Oldalfurat helyettesítése

jobb oldalon és az oldalfuraton. Ezzel nem csorbítjuk az általánosságot, hanem azt feltételezzük, hogy az L , D és d távolságok már tartalmazzák a korrekciós hosszakat is.

A d hosszú oldalfurat hangszer belsejéből „látott” z_1 bemenő impedanciája

$$z_1 = jz_0 \tan kd \quad (9.45)$$

A D hosszú csővég bemenő z_2 impedanciája pedig hasonló módon

$$z_2 = jz_0 \tan kD \quad (9.46)$$

Kérdés, hogy milyen impedanciaként látszik a cső belsejéből az oldalfurat és a csővég együttese. Ennek megválaszolásához bevezetjük a térfogatsebesség fogalmát, amely a részecske sebesség és a felület szorzata, dimenziója pedig m^3/s (innen a térfogatsebesség elnevezés). Tegyük fel, hogy a cső bal oldalának végén $U = vA$ térfogatsebesség jelenik meg. Ez a térfogatsebesség szétoszlik az oldalfuratra beáramló $U_1 = v_1 a$ és a jobb oldali csővégre beáramló $U_2 = v_2 A$ térfogatsebességekre, vagyis az elágazásnál érvényes az alábbi folytonossági egyenlet:

$$U = U_1 + U_2 \quad (9.47)$$

A hangnyomás az elágazásnál természetesen azonos mind a három csővégződésben, vagyis

$$p = p_1 = p_2 \quad (9.48)$$

Vezessük be a hangnyomás és a térfogatsebesség hányadosából képzett Z akusztikai impedanciát (a

nagy Z jelöléssel a hagyományos z specifikus impedanciától való eltérésre utalunk, a $Z = p/U$ impedanciát szokás akusztikai impedanciának mértékegységét pedig akusztikai ohm-nak nevezni), illetve ennek reciprokát, az Y akusztikai admittanciát. Az admittanciára felírhatjuk hogy

$$Y = \frac{U}{p} = \frac{U_1 + U_2}{p} = \frac{U_1}{p_1} + \frac{U_2}{p_2} = Y_1 + Y_2 \quad (9.49)$$

vagyis elágazásnál a csődarabok admittanciái összeadódnak. Ez az impedanciák esetében természetesen replusz kapcsolatot jelent.

Az elágazásnál balról látszó teljes admittancia tehát

$$Y = Y_1 + Y_2 = \frac{a}{z_1} + \frac{A}{z_2} = \frac{a}{jz_0 \tan kd} + \frac{A}{jz_0 \tan kD} \quad (9.50)$$

Alkalmazzuk a $\tan x \approx x$ egyszerűsítést, feltéve, hogy mind a D , mind a d távolság elegendően rövid a hullámhosszhoz képest. Ekkor a bemenő admittancia

$$Y = \frac{1}{jz_0 k} \left(\frac{a}{d} + \frac{A}{D} \right) \quad (9.51)$$

ahonnan a bemenő impedancia

$$Z = \frac{1}{Y} = jz_0 k \frac{dD}{aD + Ad} \quad (9.52)$$

illetve az A keresztmetszetű bal oldali cső végén látszó specifikus impedancia

$$z = ZA = jz_0 k \frac{AdD}{aD + Ad} \approx jz_0 \tan k \frac{AdD}{aD + Ad} \quad (9.53)$$

ahonnan leolvasható, hogy az oldalfurat és a D hosszúságú csővégződés együtt egy

$$D' = \frac{AdD}{aD + Ad} \quad (9.54)$$

hosszú, ideálisan nyitott, A keresztmetszetű csőként látszik.

A végtől D távolságban megnyitott oldalfurat mellett a cső látszólagos rövidülése tehát nem D , hanem attól eltér. A rövidülés mértéke

$$\Delta = D - D' = \frac{aD^2}{aD + Ad} \quad (9.55)$$

A rövidülés mértékét tekintve látszik, hogy amennyiben az oldalfurat a átmérője nulla (nincs

oldalfurat), a rövidülés zérus. Amennyiben az oldalfurat átmérője végtelen, a rövidülés mértéke megegyezik a D furattávolsággal. Valóságos esetekben persze a furatátmérő nem haladhatja meg a cső átmérőjét, vagyis $a \leq A$. Az $a = A$ határesetben a rövidülés mértéke

$$\Delta = \frac{D^2}{D+d} < D \quad (9.56)$$

9.2. példa Oldalfurat hatása I

A végétől milyen távol kell megnyitni egy $L = 30$ cm hosszú, $R = 5$ mm belső sugarú és $d = 5$ mm falvastagságú, mindkét végén nyitott sípot, ha az alapfrekvenciát egy 16/15-ös kissetundal szeretnénk növelni? A furatátmérő 3 mm.

A megoldás során először eltekintünk a hossz-korrektúráról, vagyis ideális nyitott végeket feltételezünk. A kissetundnyi hangmagasság-növekedés 16/15 frekvenciaszorozónak felel meg, vagyis a hosszúságot 15/16 részre kell csökkenteni. Ez a 30 cm hosszú síp esetében $\Delta = L/16 = 18,75$ mm-es hosszcsökkenésnek felel meg.

Adott Δ hosszcsökkenés mellett A (9.55) egyenletből a D furatpozícióra másodfokú egyenlet adódik:

$$D^2 - \Delta D - \frac{A}{a}d\Delta = 0 \quad (9.57)$$

ahonnan a D furatpozíció

$$D_{1,2} = \frac{\Delta}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4d}{\Delta} \left(\frac{R}{r} \right)^2} \right) \quad (9.58)$$

Mivel a gyökös kifejezés egynél nagyobb, a D_1 megoldás Δ -nál nagyobb, a D_2 megoldás pedig negatív lesz, és fizikai tartalmat nem hordoz.

A megadott értékekkel a fizikailag értelmes megoldás $D_1 = 28,04$ mm. Figyelemre méltó, hogy a $\Delta = 18,75$ mm-es látszólagos hosszcsökkenéshez az oldalfuratot lényegesen távolabb, 28,04 mm-re kell elhelyezni. A nagy különbség a cső sugarához képest kis furatátmérőnek és a nem elhanyagolható falvastagságnak köszönhető.

9.3. példa Oldalfurat hatása II

Oldjuk meg a 9.2. feladatot a hossz-korrektúra figyelembe vételével is

A hossz-korrektúra hat mind a síp lezárására, mind az oldalfurat lezárására, vagyis a cső látszólagos

hossza $L^* = L + 8R/3\pi = 30,42$ cm, a furat látszólagos mélysége pedig $d^* = d + 8r/3\pi = 7,54$ mm. A kívánt látszólagos hosszcsökkenés $\Delta^* = L^*/16 = 19,02$ mm.

Az ehhez szükséges (L^* korrigált hosszhoz mért) furatpozíció

$$D^* = \frac{\Delta^*}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4d^*}{\Delta^*} \left(\frac{R}{r} \right)^2} \right) = 31,62 \text{ mm} \quad (9.59)$$

vagyis a tényleges, síp végétől mért furatpozíció $D = D^* - 8R/3\pi = 27,38$ mm.

A hossz-korrektúrával és anélkül számított megoldások eltérése 0,66 mm.

9.2. Kürtök

Kürt alatt változó keresztmetszetű csöveket értünk. Fúvós hangszereknek a kürtök alkalmazásának két-célja van:

- A táguló kürtök impedanciátranszformátorok, melyek optimális teljesítményátvitelt eredményezhetnek egy csőszakasz és a végtelen szabad tér között.
- A kürtök jelentős mértékben hangolják a fúvós hangszereket.

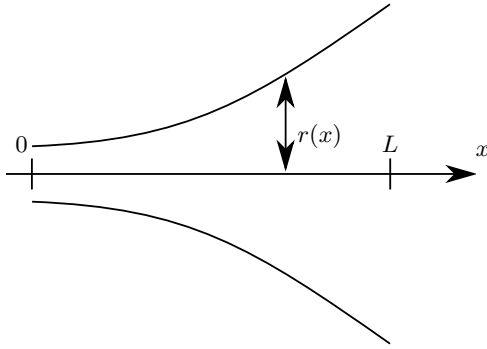
9.2.1. A Webster-egyenlet

A Webster-egyenlet a változó keresztmetszetű hullámvezetőben terjedő nyomáshullámokat leíró differenciálegyenlet. Levezetéséhez tekintsük ismét az egydimenziós hangtér (8.10) egyenletét, mely a V_0 térfogatban uralkodó nyomást a relatív térfogatváltozással fejezi ki:

$$\begin{aligned} p(x) &= -\kappa P_0 \frac{\Delta V(x)}{V_0(x)} \\ &= -\kappa P_0 \frac{A(x+\Delta x)u(x+\Delta x) - A(x)u(x)}{\Delta x A(x)} \\ &\rightarrow -\kappa P_0 \frac{(Au)'}{A} \end{aligned} \quad (9.60)$$

amit idő szerint kétszer deriválva

$$A\ddot{p} = -\kappa P_0 (A\dot{v})' \quad (9.61)$$



9.8. ábra. Kürt

Az Euler-egyenlet (8.4) alapján

$$-p'(x, t) = \rho_0 \ddot{u}(x, t) \quad (9.62)$$

amit A -val szorozva, majd hely szerint egyszer deriválva

$$-(Ap')' = \rho_0 (A\dot{v})' \quad (9.63)$$

(9.63) és (9.61) kombinálásával az alábbi Webster-egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{c^2} \ddot{p} = \frac{(Ap')'}{A} \quad (9.64)$$

Időben harmonikus esetben az idő szerinti kétszeres deriválás $-\omega^2$ szorzóvá egyszerűsödik, aminek értelmében a Webster-egyenlet alakja

$$\frac{(Ap')'}{A} + k^2 p = 0 \quad (9.65)$$

9.2.2. A kürtfüggvény

A harmonikus Webster-egyenlet új Ψ változó bevezetésével egyszerűbb, analitikusan kezelhető alakra hozható. Legyen

$$p(x) = \frac{\Psi(x)}{r(x)} \quad (9.66)$$

ahol Ψ a hullámfüggvény, $r(x)$ pedig a kürt belső sugara az x pozícióban. Kör keresztmetszetű kürtgeometria esetére a Webster-egyenlet új alakja ekkor

$$\frac{\left(r^2 \pi \left(\frac{\Psi}{r}\right)'\right)'}{r^2 \pi} + k^2 \frac{\Psi}{r} = 0 \quad (9.67)$$

A deriválások elvégzése és egyszerűsítések után az alábbi hullámegyenlethez jutunk:

$$\Psi'' + \left(k^2 - \frac{r''}{r}\right) \Psi = 0 \quad (9.68)$$

ahol az

$$F(x) = \frac{r''(x)}{r(x)} \quad (9.69)$$

menyiség a kürtfüggvény, ami a kürt geometriáját jeleníti meg az egyenletben. Ha adott x pozícióban $k^2 > F(x)$, akkor a hullámegyenlet megoldása az adott pozícióban haladó hullámot ad, ha $k^2 < F(x)$, akkor a megoldást lokálisan exponenciálisan csökkenő evanescens hullámok írják le. Fontos kiemelni, hogy míg állandó keresztmetszetű csövek esetében csak a keresztirányú módusok esetében jelentek meg evanescens hullámok a hullámegyenlet megoldásában, addig változó keresztmetszetű csövek esetében a keresztirányban konstans nyomáshullámok is csak vágási frekvenciájuk fölött terjedhetnek.

A továbbiakban szükségünk lesz a $v(x)$ részecseksebesség és a $z(x)$ impedancia kifejezésére is. Ezek a mennyiségek a hullámfüggvény segítségével az alábbi alakban adhatók meg.

$$v(x) = \frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\Psi r' - \Psi' r}{r^2} \quad (9.70)$$

$$z(x) = \frac{p(x)}{v(x)} = \frac{\Psi/r}{-\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\Psi' r - \Psi r'}{r^2}} = j\omega\rho_0 \frac{\Psi r}{\Psi r' - \Psi' r} \quad (9.71)$$

9.2.3. Salmon-kürtök

Az analitikus megoldás szempontból fontosak azok a kürtgeometriák, melyekre a kürtfüggvény konstans:

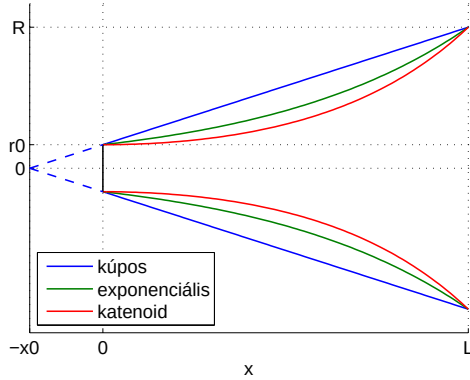
$$F(x) = F \quad (9.72)$$

A konstans kürtfüggvényű kürtöket Salmon-kürtöknek nevezzük. A kürtfüggvény konstans, ha

$$r'' = Fr \quad (9.73)$$

aminek általános megoldása

$$r(x) = r_0 (\cosh mx + T \sinh mx) \quad (9.74)$$



9.9. ábra. Salmon-kürtök

Könnyen látható, hogy ez esetben $F = m^2$, ahol az m konstans a tágulási állandó.

A T és m paraméterek megválasztásával különböző kürtcsaládokat definiálhatunk.

- Ha $T = 1$, az exponenciális kürtöt kapjuk meg, melyre $r(x) = r_0 e^{mx}$.
- Ha $T = 0$, akkor az ún. katenoid kürtöket kapjuk meg, melyekre $r(x) = r_0 \cosh mx$.
- Ha $Tm = 1/x_0$ konstans, és $m \rightarrow 0$, akkor az $r(x) = r_0 (1 + x/x_0)$, alakú kúpos kürtöket kapjuk meg.

A különböző Salmon-kürtöket a 9.9. ábra mutatja.

Salmon kürtök esetére a hullámgörvénylet természetesen

$$\Psi'' + (k^2 - m^2) \Psi = 0 \quad (9.75)$$

alakú, aminek megoldása

$$\Psi(x) = \Psi^+ e^{-j\kappa x} + \Psi^- e^{j\kappa x} \quad (9.76)$$

vagy más felírási móddal

$$\Psi(x) = A \cos \kappa x + B \sin \kappa x \quad (9.77)$$

ahol $\kappa = \sqrt{k^2 - m^2}$

9.2.4. Salmon-kürtök módusai

Az alábbiakban az $x = L$ -ben ideálisan nyitott Salmon-kürtök módusait vizsgáljuk. Célunk első

sorban a kürtök sajátfrekvenciáinak meghatározása, és természetesen a legalább az egyik végén nyitott kürtök iránt érdeklődünk. A vizsgálat módszerre a kürt z_{in} bemenő impedanciájának meghatározása, hiszen az impedancia zérus- és maximumhelyei a kürt sajátfrekvenciáit adják meg.

A $p(L) = 0$ ideálisan nyitott feltétel ekvivalens a $\Psi(L) = 0$ kikötéssel, ami szerint (9.77)-ben $B = -A \cot \kappa L$. A bemenő impedancia kifejezése ezek után (9.71) alapján

$$\begin{aligned} z_{\text{in}} = z(0) &= j\omega\rho_0 \frac{\Psi(0)r(0)}{\Psi(0)r'(0) - \Psi'(0)r(0)} \\ &= j\omega\rho_0 \frac{Ar_0}{Ar'(0) - \kappa Br_0} \\ &= jz_0 \frac{1}{\frac{r'(0)}{\kappa r_0} + \frac{\kappa}{k} \cot \kappa L} \end{aligned} \quad (9.78)$$

Kúpos kürtök

A kúpos kürt esetében $r(x) = r_0(1 + x/x_0)$, vagyis $r'(0)/r_0 = 1/x_0$. Mivel a kúpos kürtre a kürtfüggvény zérus, $m = 0$, ahonnan $\kappa = k$. A bemenő impedancia kifejezése ezek szerint

$$\begin{aligned} z_{\text{in}} &= jz_0 \left(\frac{1}{kx_0} + \cot kL \right)^{-1} \\ &= jz_0 \frac{\sin kL}{\frac{1}{kx_0} \sin kL + \cos kL} \end{aligned} \quad (9.79)$$

Természetesen $x_0 \rightarrow \infty$ esetben visszkapjuk a hengeres cső bemenő $jz_0 \tan kL$ impedanciáját.

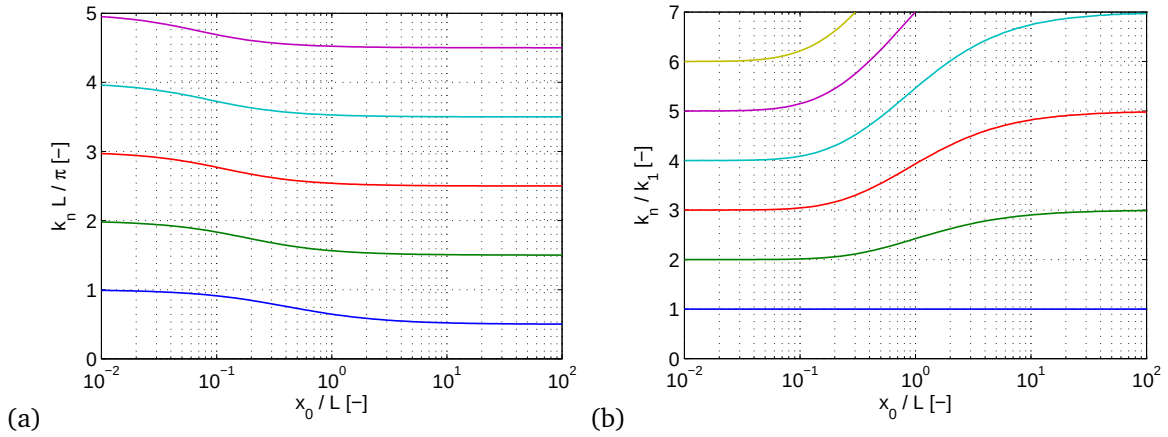
A mindkét végén nyitott kúpos kürt sajátfrekvenciáit a bemenő impedancia nullhelyein, vagyis a $\sin kL$ gyökeinél kell keresnünk. Ezek egybeesnek a mindkét végén nyitott hengeres cső $k_n = n\pi/L$ sajátfrekvenciáival.

A bal oldalon zárt, jobb oldalon nyitott kúpos kürt rezonanciafrekvenciáit a z_{in} függvény maximumhelyein, vagyis a $\tan kL = -kx_0$ egyenlet gyökeinél kell keresnünk. Átírva

$$-\frac{x_0}{L} kL = \tan kL \quad (9.80)$$

Kis x_0/L értékekre a bal oldal hozzávetőlegesen zérus, vagyis a jobb oldalon használhatjuk a $\tan$ függvény zérushelyek közelében érvényes $\tan kL \approx kL - n\pi$ közelítését, ahonnan visszkapjuk a

$$k_n \approx \frac{n\pi}{L + x_0} \quad (9.81)$$



9.10. ábra. Egyik végén zárt, másikon nyitott kúpos kürt saját hullámszámai különböző tágulási arányok esetére.

sajáthullámszámokat. Ez az eredmény jelentős, hiszen azt látjuk, hogy a kúpos kürtök esetében az egyik végén zárt, másik végén nyitott peremfeltétellel is közel harmonikus sajátfrekvencia-sort kaphatunk, ha a kürt L hossza lényegesen nagyobb az x_0 fókusz távolságnál, vagyis ha a szájnylás lényegesen nagyobb a toroknyílásnál. Az ellenkező esetben természetesen a $k_n \approx (2n - 1)/2L$ hullámszámokat kapjuk vissza.

A jelenséget a 9.10. ábra szemlélteti, ahol az x_0/L mennyiség függvényében látjuk a bemenő impedancia maximumhelyeit. Ha x_0/L kis érték, vagyis a kürt fókuszpontja az origóhoz közel van, a saját hullámszámok az alapharmonikus egész számú többszörösein jelennek meg. Ha a fókuszpont távolodik az origótól, a felharmonikusok az alapharmonikus páratlan számú többszörösein jelentkeznek. Figyeljük meg, hogy az $x_0/L \approx 0,1$ értéknél, vagyis hozzávetőlegesen tízszeres sugárnövekedésnél is harmonikus felhangsort kapunk a bal oldalon zárt kúpos kürt esetében.

Ez a jelenség magyarázza meg azt, hogy a fűvós nádsípos hangszerek túlnyomó többségének főfurata kúpos alakú. Így, bár a nádsípos gerjesztés zárt peremfeltétellel írható le, a főfurat alakja mégis harmonikus felhangsort eredményez.

Exponenciális kürt

Az exponenciális kürt $r(x)$ sugarát az $r(x) = r_0 e^{mx}$ exponenciális függés írja le. Lényeges eltérés a kúpos kürtökhöz képest, hogy itt a kürtfüggvény po-

zitív, vagyis a kürt nem enged át tetszőlegesen mély hangokat: a vágási frekvencia alatti harmonikusokat erősen csillapítja.

A kürt bemenő impedanciája

$$\begin{aligned} z_{\text{in}} &= jz_0 \frac{\sin \kappa L}{\frac{m}{k} \sin \kappa L + \frac{\kappa}{k} \cos \kappa L} \\ &= jz_0 \left(\frac{m}{k} + \frac{\kappa}{k} \cot \kappa L \right)^{-1} \end{aligned} \quad (9.82)$$

A bemenő impedancia minimumhelyei a számláló zérushelyein, vagyis a $\kappa_n = n\pi/L$ értékeken jelennek meg, ahonnan

$$k_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + m^2} \quad (9.83)$$

Látjuk, hogy az m tágulási állandó a mindkét végén nyitott kürt sajátfrekvenciáinak alsó korlátja.

A bemenő impedancia maximumhelyeit a

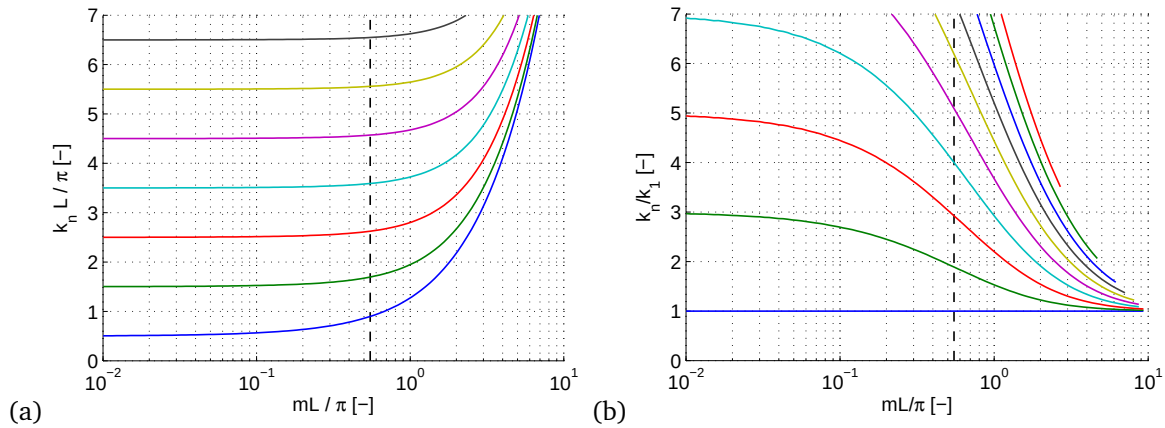
$$\tan \kappa L = -\frac{\kappa}{m} \quad (9.84)$$

egyenlet határozza meg. Azt látjuk, hogy kis m értékre a tangens függvény maximumhelyeit keressük, vagyis

$$\kappa_n \approx k_n = \frac{(2n - 1)\pi}{2L} \quad (9.85)$$

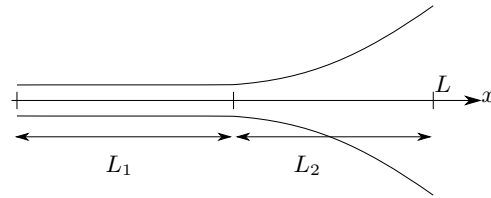
Nagy m értékekre, vagyis gyorsan táguló exponenciális kürtök esetére a tangens függvény zérushelyeit keressük, ahonnan

$$\kappa_n \approx \frac{n\pi}{L}, \quad k_n \approx \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + m^2} \quad (9.86)$$



9.11. ábra. Egyik végén zárt, másikon nyitott exponenciális kürt saját hullámszámai különböző tágulási arányok esetére.

A bal oldalon zárt, jobb oldalon nyitott kürt sajátfrekvenciáit a 9.11 ábra mutatja. Figyelemre méltó, hogy amennyiben a tágulási arányt úgy választjuk meg, hogy a torok- és szájnyílás sugarainak aránya $e^{mL} \approx 5,6$, hozzávetőlegesen harmonikus felhangsorú exponenciális kürtöt kapunk.



9.13. ábra. Kompozit kürt

Katenoid kürtök

Katenoid kürtök esetén a sugarat az $r(x) = r_0 \operatorname{ch} mx$ összefüggés adja meg. A katenoid kürtök előnye, hogy mivel a ch függvény meredeksége $x = 0$ -ban nulla, ezért a katenoid kürt törés- (és ezáltal reflexió)mentesen illeszthető hengeres csövek végére. Az exponenciális kürtökhöz hasonlóan a katenoid kürt kürtfüggvénye is $F(x) = m^2$, vagyis a kürt a $k = m$ határ fölötti hullámszámú rezgéseket engedi át.

Az $x = L$ -ben nyitott katenoid kürt bemenő impedanciája

$$z_{\text{in}} = \frac{p(0)}{v(0)} \Big|_{p(L)=0} = jz_0 \frac{\tan \kappa L}{\kappa/k}$$

A mindkét végén nyitott katenoid kürt sajátfrekvenciáit az exponenciális kürtökhöz hasonlóan a

$$k_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + m^2} \quad (9.87)$$

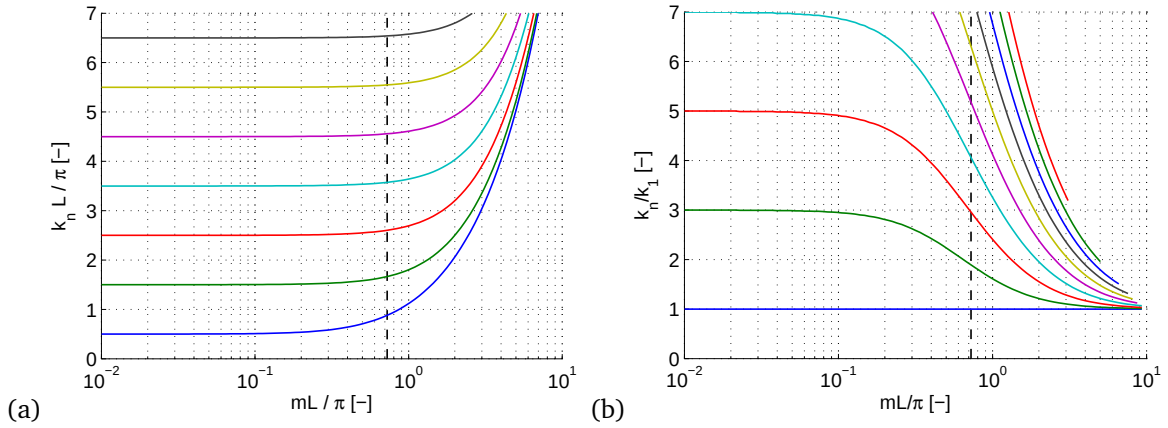
összefüggés adja meg. A bal oldalon zárt, jobb oldalon nyitott kürt sajátfrekvenciáit a

$$\tan \kappa L = \frac{\kappa}{k} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{k^2}} \quad (9.88)$$

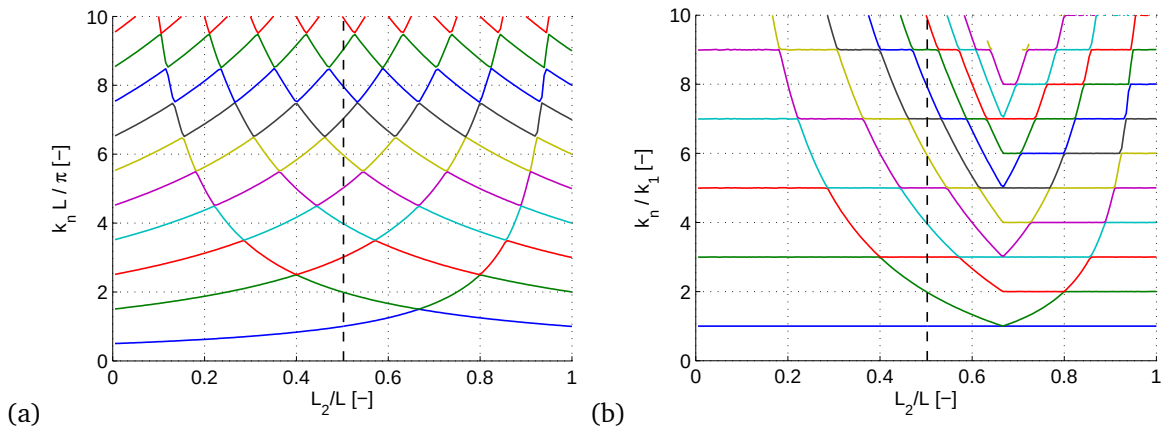
adja meg. Az egyenlet megoldásait a 9.12. ábra mutatja. Az ábrázolt sajátfrekvenciák igen közel esnek az exponenciális kürtnél látottakhoz. Katenoid kürtök esetén a harmonikus felhangsorhoz vezető optimális torok-szájnyílás átmérő arányt a $\operatorname{ch} mx \approx 5$ érték adja meg.

9.2.5. Kompozit kürtök

Rézfúvós hangszerek esetében, ahol a hangmagasságváltoztatást elsődlegesen toldalékcövek beiktatásával érjük el, mindenképpen szükséges a hengeres csőszakaszok alkalmazása. Vizsgáljuk meg ezért, hogy miként viselkedik egy olyan kompozit kürt, melynek egy L_1 hosszúságú darabja hengeres, további L_2 hosszú darabja pedig kúpos. Ennek a kürtnek a bemenő impedanciája egy z_2 impedanciával lezárt hengeré, ahol z_2 egy ideális zérus nyomás feltétellel lezárt kúpos kürt bemenő impedan-



9.12. ábra. Egyik végén zárt, másikon nyitott katenoid kürt saját hullámszámai különböző tágulási arányok esetére.



9.14. ábra. L_1 hosszú hengeres és $L_2 = L - L_1$ hosszúságú kúpos kürtből összeállított kompozit kürt saját hullámszámai különböző L_2/L hosszarányok esetére

ciája:

$$z_{be} = z_0 \frac{z_2 + jz_0 \tan kL_1}{z_0 + jz_2 \tan kL_1} = jz_0 \frac{\left(\frac{1}{kx_0} + \cot kL_2\right)^{-1} + \tan kL_1}{1 - \left(\frac{1}{kx_0} + \cot kL_2\right)^{-1} \tan kL_1} \quad (9.89)$$

A bal oldalon zárt hangszert rezonanciafrekvenciáit a z_{be} bemenő impedancia maximumhelyein, vagyis a nevező nullhelyein keressük:

$$\tan kL_1 = \frac{1}{kx_0} + \cot kL_2 \quad (9.90)$$

A transzcendentális egyenlet k_n megoldásait a 9.14. ábra mutatja különböző L_2/L arányok esetére, ahol L a hangszer teljes hossza. Meglepő, hogy amennyiben $L_2 \approx L/2$, vagyis a kürtnek fele hengeres, fele pedig kúpos, a hangszer felhangsora közel harmonikusnak adódik. Megmutatható továbbá, hogy az eredményül kapott optimális hosszarány igen kevésbé függ a kúpos tölcésrész x_0/L_2 tágulási állandójától.

A számítások részletezése nélkül megjegyezzük, hogy igen hasonló eredmény adódik $L_2 = L/2$ hosszúságú exponenciális és katenoid kürtbetoldások esetére is.

9.2.6. Kürtök finomhangolása

Láttuk, hogy kompozit kürtök segítségével a rézfűvós hangszerek felhangsora közel ideális, harmonikus sorra állítható be. A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy milyen lehetőség adódik a sajátfrekvenciák finomhangolására. Tekintsük a Webster-egyenletet:

$$-\frac{1}{A(x)} (A(x)p'(x))' = k^2 p(x) \quad (9.91)$$

amit operátoros jelölésmóddal az alábbi alakban írhatunk:

$$\mathcal{A}\{p\} = \gamma p \quad (9.92)$$

Tegyük fel, hogy az $A(x)$ függvényt az $A_0(x)$ értékről $A_0(x) + \epsilon \delta A(x)$ értékre változtatjuk. Ekkor a differenciáloperátor $\mathcal{A}_0$ értékről $\mathcal{A}_0 + \epsilon \delta \mathcal{A}$ -ra változik. Ha feltételezzük, hogy ϵ elég kicsi, akkor a hangnyomás és a sajátfrekvencia is megváltozása is ϵ lineáris függvényeként közelíthető, $p(x) = p_0(x) + \epsilon \delta p(x)$ és $\gamma = \gamma_0 + \epsilon \delta \gamma$. A . fejezetben megismert eredmények szerint a $\delta \gamma$ sajátfrekvenciaváltozás kifejezése

$$\delta \gamma = \frac{\langle \delta \mathcal{A}\{p_0\}, p_0 \rangle}{\|p_0\|^2} \quad (9.93)$$

ahol

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}\{p\} &= \left. \frac{\partial \mathcal{A}\{p\}}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(-\frac{((A_0 + \epsilon \delta A)p')'}{A_0 + \epsilon \delta A} \right) \right|_{\epsilon=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(-\frac{(A_0 + \epsilon \delta A)' p'}{A_0 + \epsilon \delta A} + p'' \right) \right|_{\epsilon=0} \\ &= -\frac{\delta A' A_0 - A_0' \delta A}{A_0^2} p' \\ &= \left(\frac{\delta A A_0'}{A_0^2} - \frac{\delta A'}{A_0} \right) p' \end{aligned} \quad (9.94)$$

A sajátfrekvencia megváltozásában szereplő skaláris szorzat kifejtése ezek szerint

$$\begin{aligned} \langle \delta \mathcal{A}\{p_0\}, p_0 \rangle &= \int_0^L \delta \mathcal{A}\{p_0(x)\} A_0(x) p_0(x) dx \\ &= \int_0^L \left(\frac{\delta A A_0'}{A_0} - \delta A' \right) p_0' p_0 dx \end{aligned} \quad (9.95)$$

Legyen $\delta A(x) = \Delta x \delta(x - x_0)$, ekkor

$$\begin{aligned} \langle \delta \mathcal{A}\{p_0\}, p_0 \rangle &= \Delta x \left(\frac{A_0'}{A_0} p_0' p_0 + (p_0' p_0)' \right) \\ &= \Delta x (-k_0^2 p_0^2 + (p_0')^2) \end{aligned} \quad (9.96)$$

ahol kihasználtuk a Dirac-delta és deriváltja kiválasztási tulajdonságát, valamint ismét felhasználtuk a Webster-egyenletet.

Mivel a nyomásmódusok normanégyszete változó keresztmetszetű kürtök esetében is $L/2$, a sajátfrekvencia megváltozása

$$\delta \gamma = \delta k^2 = \frac{2\Delta x}{L} (-k_0^2 p_0^2 + (p_0')^2) \quad (9.97)$$

Hozzávetőlegesen harmonikus módusokat feltételezve eredményünk azt jelenti, hogy amennyiben a kürtöt egy módusának duzzadó pontján szélesítjük, akkor az adott módus sajátfrekvenciáját csökkenthetjük. Ha a kürtöt egy módus csomópontjában szélesítjük, akkor a nyomás deriváltat tartalmazó tag miatt a módus sajátfrekvenciája növekedni fog.

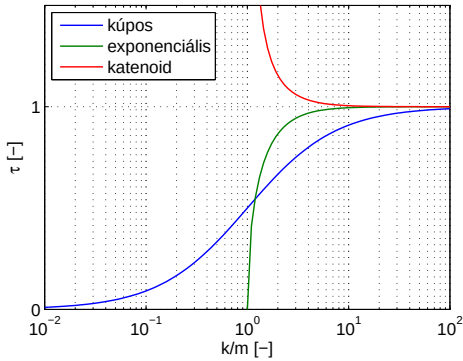
9.2.7. Kürtök hatásfoka

A kürtök hatásfokát a sugárzási hatásfokokhoz hasonlóan definiáljuk, vagyis azt vizsgáljuk, hogy a végtelen hosszú kürt toroknyílásában v sebességgel mozgó dugattyú mekkora teljesítményt képes a kürtbe becsatolni. A hatásfokot a végtelen, azonos torokátmérőjű egyenes hengerbe sugárzott teljesítményhez viszonyítjuk. A τ hatásfok definíciója eszerint

$$\tau = \frac{\frac{1}{2} v^2 A \operatorname{Re}\{z_{be}\}}{\frac{1}{2} v^2 A z_0} = \frac{\operatorname{Re}\{z_{be}\}}{z_0} \quad (9.98)$$

ahol A a torokfelület. A kifejezésben a számláló a végtelen kürtbe betáplált teljesítményt fejezi ki, a nevező pedig a végtelen hengeres csőbe betáplált teljesítményt adja meg.

Salmon-kürtök esetére a hullámfüggvény (reflexiómentes esetet feltételezve) $\Psi(x) = \Psi^+ e^{-j\kappa x}$, ahol $\kappa = \sqrt{k^2 - m^2}$ a terjedési állandó, m pedig a tágulási állandó. Ennek alapján tetszőleges



9.15. ábra. Salmon-kürtök hatásfoka a frekvencia függvényében. A kónikus kürt esetében $m = 1/x_0$.

Salmon-kürtre a bemenő impedancia

$$\begin{aligned}
 z_{be} &= \frac{p(0)}{v(0)} = j\omega\rho_0 \frac{\Psi(0)r(0)}{\Psi(0)r'(0) - \Psi'(0)r(0)} \\
 &= j\omega\rho_0 \frac{1}{\frac{r'}{r}|_{x=0} + j\kappa} \\
 &= z_0 \frac{1}{\frac{\kappa}{k} - j\frac{r'}{kr}|_{x=0}} \\
 &= z_0 \frac{\frac{\kappa}{k} + j\frac{r'}{kr}|_{x=0}}{\left(\frac{\kappa}{k}\right)^2 + \left(\frac{r'}{kr}|_{x=0}\right)^2} \quad (9.99)
 \end{aligned}$$

ahonnan a sugárzási hatásfok

$$\tau = \frac{\frac{\kappa}{k}}{\left(\frac{\kappa}{k}\right)^2 + \left(\frac{r'}{kr}|_{x=0}\right)^2} \quad (9.100)$$

A kónikus kürt hatásfoka

Kónikus kürtre a kürtfüggvény zérus, ahonnan $\kappa = k$, valamint $r'/r = 1/x_0$. Ezek szerint a hatásfok

$$\tau = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{kx_0}\right)^2} \quad (9.101)$$

Látjuk, hogy a kürt hatásfoka kisfrekvencián közel zérus, a frekvencia növekedtével pedig egységnyihez tart. A hatásfok függvényt a 9.15. ábra mutatja.

Az exponenciális kürt hatásfoka

Az exponenciális kürt esetére $r'/r = m$, ami alapján a hatásfok nevezője egységnyiinek adódik, így

$$\tau = \frac{\text{Re}\{\kappa\}}{k} = \begin{cases} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{k}\right)^2} & k > m \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (9.102)$$

A hatásfok frekvenciafüggését a 9.15. ábra mutatja. A vágási frekvencia fölött a kürt hatásfoka ugrás-szerűen növekszik fel egységnyi értékre, vagyis az exponenciális kürtök a vágási frekvenciájuk fölött nagyon hatékony sugárzók.

A katenoid kürt hatásfoka

Katenoid kürt esetére $r'(0) = 0$, ahonnan a hatásfok

$$\tau = \frac{1}{\text{Re}\{\kappa\}/k} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{m}{k}\right)^2}} & k > m \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (9.103)$$

A hatásfok frekvenciafüggését a 9.15. ábra mutatja. A vágási frekvencián a katenoid kürt hatásfoka végtelen, majd rohamosan csökken, és a frekvencia növekedtével az egységnyi érték felé tart, vagyis az exponenciális kürtökhöz hasonlóan a katenoid kürt a vágási frekvencia fölött nagyon hatékony sugárzó.

9.3. Fúvós gerjesztés

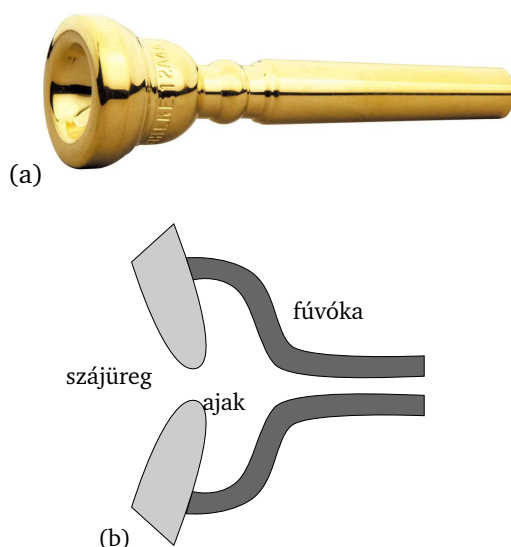
A fúvós gerjesztést alapvetően két csoportra osztjuk: a nádgerjesztésre és az ajkásípos gerjesztésre.

9.3.1. Nádgerjesztés

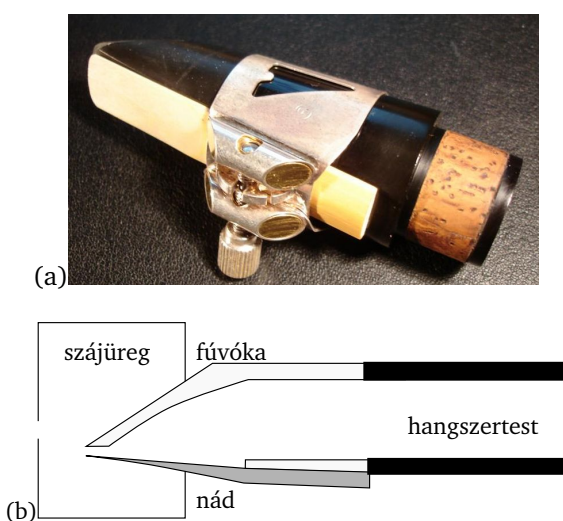
A nádgerjesztésnek két alfaja van: a tölcséres fúvókás hangszerek gerjesztési mechanizmusa, valamint a fafúvós hangszerek valódi nádnyelvi gerjesztési mechanizmusa. Az előbbi valójában nem náddal történő gerjesztés, fizikai leírása miatt mégis a nádgerjesztés családjába soroljuk.

A tölcséres fúvókás hangszerek fúvókájának sematikus ábráját a 9.16. ábra mutatja. Itt a gerjesztést a játékos fúvókának préselt ajkainak rezgése biztosítja. Ennek a gerjesztési típusnak sajátossága, hogy a szájban növekvő légnyomás az ajkak szétnyílását eredményezi. Ezt a fajta gerjesztést szokás „blown-open” gerjesztésnek nevezni.

A valódi nádnyelvi gerjesztés sematikus ábráját a 9.17. ábra mutatja. Itt a játékos egy valódi nádat feszít ajkaival a hangszer fúvókájához. Ezen



9.16. ábra. (a) Trombita fúvókája (b) Tölcséres fúvókás hangszer fúvókájának sematikus ábrája



9.17. ábra. (a) Klarinét fúvókája (b) Nádnyelves fafúvós hangszer fúvókájának sematikus ábrája

gerjesztés esetén a játékos szájüregének növekvő nyomása a nád záródását eredményezi, ezért a gerjesztési mechanizmus neve „blown-closed”.

A Bernoulli-törvény

A nádgerjesztés fizikai leírásához először a Bernoulli-féle áramlási törvényt írjuk fel, ami a szájüregből kiáramló levegő sebességének meghatározásához alkalmazható.

Vizsgáljuk az egydimenziós tér Δx szélességű légtömegére ható, légnyomásból származó erőket, és írjuk fel a légtömegre Newton II. törvényét:

$$\sum F = P(x, t)A - P(x + \Delta x, t)A = A\Delta x\rho \frac{Dv(x, t)}{Dt} \quad (9.104)$$

ahonnan

$$P'(x, t) + \rho \frac{Dv(x, t)}{Dt} = 0 \quad (9.105)$$

A második tagban szereplő D/Dt idő szerinti derivált alatt idő szerinti teljes deriváltat értünk, melynek megadása

$$\begin{aligned} \frac{Dv(x, t)}{Dt} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} \\ &= v'v + \dot{v} = \left(\frac{v^2}{2}\right)' + \dot{v} \end{aligned} \quad (9.106)$$

Ennek alapján az Euler-egyenlet kibővített alakja

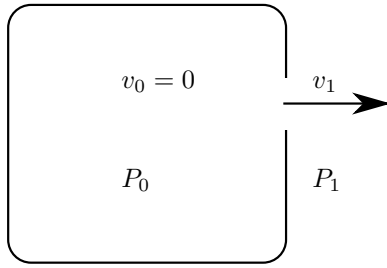
$$P' + \rho \left(\frac{v^2}{2}\right)' + \rho\dot{v} = 0 \quad (9.107)$$

Amennyiben az időbeli változásokat elhanyagoljuk, vagyis időben állandó, stacioner áramlást vizsgálunk ($\dot{v} = 0$), a Bernoulli-féle áramlási törvényt kapjuk vissza:

$$P(x) + \rho \left(\frac{v^2(x)}{2}\right) = C = \text{állandó} \quad (9.108)$$

ahol C a vizsgált rendszer teljes dinamikus nyomása.

A Bernoulli-törvény egyszerű alkalmazásaként vizsgáljunk egy zárt üreget, melyben P_0 statikus nyomás uralkodik. Az üregeken kívül a nyomás legyen P_1 . Nyissunk meg az üregeken egy kis nyílást, aminek felülete eléggé kicsi ahhoz, hogy a kiáramló levegő csak elhanyagolható mértékben csökkentse az üreg nyomását. Ebben az esetben feltelezhetjük, hogy az üregeben a v_0 áramlási sebesség zérus marad, az üregeken kívül viszont v_1 sebességgel áramlik kifelé a levegő. Bernoulli törvényét az



9.18. ábra. Levegő áramlása P_0 nyomású nagy tartály szűk nyílásán keresztül

üregre és a kiáramló légáramra felírva:

$$P_0 + 0 = C = P_1 + \rho_0 \frac{v_1^2}{2} \quad (9.109)$$

ahonnan a kiáramló levegő sebessége

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P_0 - P_1)}{\rho}} \quad (9.110)$$

A fenti példa jól írja le a nádgerjesztés esetét. Itt az üreg a játékos szája, ahol a nyomás tipikusan 1 kPa körül mozog (természetesen a külső légköri nyomáshoz viszonyítva), ennek értelmében a szűk ajak- vagy nádnyíláson kiáramló levegő sebessége hozzávetőlegesen 40 m/s.

Statikus nádmodell

Mind a tölcséres fúvókájú, mind a nádsípos hangszerek esetében a nád egyszerű modellje egy rugóval megtámasztott tömeg nélküli lapka, mely előfeszítetlen nyugalmi állapotban x_0 pozícióban helyezkedik el. Ha a lapka bal és jobb oldalán eltér a légnyomás, az A felületű lapkára $A_r(p_0 - p)$ pozitív irányú erő hat, aminek hatására a rugó összenyomódik, és a lapka x pozícióba mozdul el, ahogy azt a 9.19. ábra mutatja. Hooke törvénye szerint

$$(p_0 - p) A_r = K_r(x - x_0) \quad (9.111)$$

ahol K_r a nád merevsége.

Az $x = 0$ pozícióban a lapka merev falnak ütközik, és lezárja a bal és jobb oldali térrészek közti légáramlást. Az x_0 nyugalmi pozíció előjele szerint két esetet különböztetünk meg. Ha $x_0 < 0$, akkor a szelep növekvő $p_0 - p$ nyomáskülönbségre záródik, ha $x_0 > 0$, akkor a szelep a $p_0 - p$ nyomás különbség

növekedtével kinyílik. Az első eset a nádnyelves fafúvós hangszerek esete, ahol a szelepet a nádnyelv növekvő szájnnyomásra bezárja, az utóbbi pedig a tölcséres fúvókájú rézfúvós hangszerek esete ahol a játékos ajkait a növekvő p_0 szájnnyomás kinyitja.

Nádnyelves hangszerek esetében a nád valójában nem tömeg nélküli rugó, hanem egy egyik végén befogott, másikon szabadon hagyott rúd, melynek első sajátfrekvenciája tipikusan 4–6 kHz körül van. Mivel ilyen peremfeltételek esetén a második felhang sajátfrekvenciája az alaphang frekvenciájának több mint hatszorosa, a hallható frekvenciatartományban nyugodtan közelíthetjük a nádat egy-szabadságfokú rendszerként, illetve a párszáz Hz-es zenei tartományban rugóként. A tölcséres fúvókás hangszerek esetében ez a közelítés kevésbé állja meg a helyét, de a későbbiekben még modellünket pontosítjuk.

A Hooke-törvény átrendezésével

$$x_0 + (p_0 - p) \frac{A_r}{K_r} = x \quad (9.112)$$

Ha a szájból megnő a légnyomás, akkor Bernoulli törvénye szerint $v > 0$ sebességű légáram indul ki a szájból. A légáram sebessége

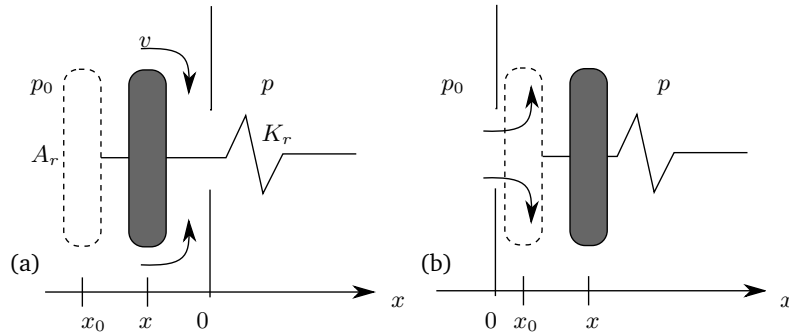
$$v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho_0}} \quad (9.113)$$

A szájból a hangszerbe bejutó térfogatsebességet a v sebesség és a nyílás felületének szorzataként kapjuk meg. Tegyük fel, hogy az x távolság elég kicsi ahhoz, hogy a nyílás felületét alapvetően $|x|$ határozza meg. Legyen a szelepszapka kerülete d , ekkor az áramlási felület $d|x|$, vagyis a beáramló U térfogatsebesség

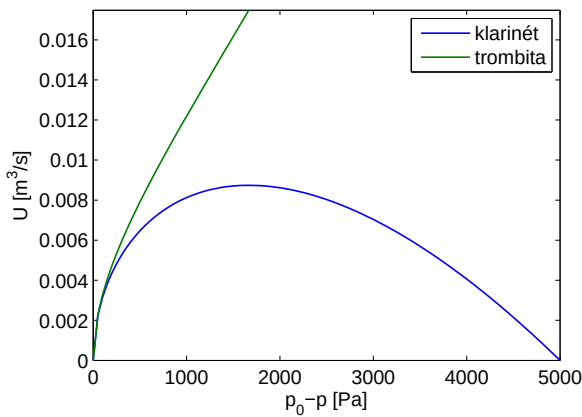
$$U = A_{ny}v = d|x|v \quad (9.114)$$

A fafúvós (nádsípos, nyomásra záródó) esetben $x < 0$, vagyis

$$\begin{aligned} U &= -dxv = -d \left(x_0 + (p_0 - p) \frac{A_r}{K_r} \right) \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho_0}} \\ &= d\sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \left(|x_0|(p_0 - p)^{1/2} - \frac{A_r}{K_r} (p_0 - p)^{3/2} \right) \end{aligned} \quad (9.115)$$



9.19. ábra. (a) Nádnyelves és (b) tölcséres fúvókás nádgerjesztés egyszerűsített modellje



9.20. ábra. A hangszerbe beáramló térfogatsebesség a nyomáskülönbség függvényében

A tölcséres fúvókájú (rézfúvós) hangszerek esetében

$$\begin{aligned}
 U &= dxv = d \left(x_0 + (p_0 - p) \frac{A_r}{K_r} \right) \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho_0}} \\
 &= d \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \left(|x_0| (p_0 - p)^{1/2} + \frac{A_r}{K_r} (p_0 - p)^{3/2} \right) \quad (9.116)
 \end{aligned}$$

A két térfogatsebesség függvényt a 9.20. ábra mutatja azonos geometriai és anyagjellemzők esetére. Látszik, hogy a nádsípos esetben a nyomáskülönbség növekedtével a térfogatsebesség eleinte növekszik, mert a Bernoulli-hatás erősebb a nyílászáródás hatásánál. Egy küszöbnyomás elérése után viszont a nyílás szűkülése miatt a térfogatsebesség csökkenőbe vált, és ha a nyomáskülönbség eléri a

$p_{\max} = K_r |x_0| / A_r$ értéket, a szelep bezárul, és az áramlás zérus lesz. A tölcséres fúvókájú hangszerek esetében a Bernoulli-hatás és a szelep nyílása erősítik egymást, aminek értelmében a térfogatsebesség monoton növekszik.

Vizsgáljuk meg, hogy a hangszer belesejéből a játékos szája felé nézve milyen Y_r akusztikai admittanciaként látszik a lezárás. Tegyük fel ehhez, hogy $p \ll p_0$ harmonikusan változó nyomás. Tekintve, hogy a hangszer felől nézve a térfogatsebesség elentétes előjelű, a lezárás admittanciája az alábbiak szerint alakul

$$Y_r = - \frac{\partial U}{\partial p} \Big|_{p_0 - p = p_0} = \frac{\partial U}{\partial (p_0 - p)} \Big|_{p=0} \quad (9.117)$$

A nádnyelves hangszerek esetén az admittancia

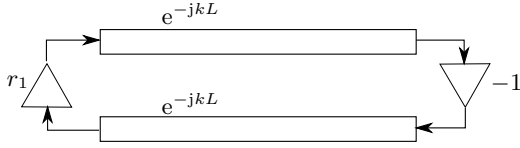
$$Y_r = d \sqrt{\frac{1}{2\rho_0 p_0}} \left(|x_0| - 3 \frac{A_r}{K_r} p_0 \right) \quad (9.118)$$

ami a $p^* = |x_0| K_r / 3 A_r = p_{\max} / 3$ küszöbnyomás felett negatív, alatta pozitív. A negatív lezáró admittancia azt jelenti, hogy amennyiben a hangszer testben növekszik a p nyomás, a lezáráson kiáramló térfogatsebesség csökken, vagyis a beáramló térfogatsebesség növekszik. A küszöbnyomás fölötti statikus p_0 nyomás esetén a lezárás akusztikai generátorként működik.

Tölcséres fúvókájú hangszerek esetén az admittancia

$$Y_r = d \sqrt{\frac{1}{2\rho_0 p_0}} \left(|x_0| + 3 \frac{A_r}{K_r} p_0 \right) \quad (9.119)$$

ami természetesen mindig pozitív, így itt semmilyen küszöbnyomás fölött sem áll elő a negatív admittanciájú lezárás akusztikai generátor esete.



9.21. ábra. A fúvós hangszer hullámvezető modellje

Vizsgáljuk meg másként is, hogy mi történik, ha egy ideális hengeres csövet nádsípval zárunk le, és a nádsípot a kritikus nyomás fölött gerjesztjük. Ekkor a síp bal oldalán negatív valós admittanciával, azaz negatív valós impedanciával van lezárva. A 9.21. ábra egy ilyen cső hullámvezető modelljét ábrázolja. Az ideális cső a pozitív és negatív x tengely irányában c sebességgel haladó hullámokat vezető hullámvezetők együtteseként képzelhető el, a lezárásokat pedig reflexiók tényezőikkel modellezhetjük. A két hullámvezető e^{-jkL} és e^{jkL} szorzóként vehető figyelembe, a jobb oldali lezárás legyen ideális zérus nyomású, aminek értelmében $r_2 = -1$, a bal oldali lezárás pedig

$$r_1 = \frac{Z_r - \rho_0 c/A}{Z_r + \rho_0 c/A} = \frac{\rho_0 c/A + |Z_r|}{\rho_0 c/A - |Z_r|} \quad (9.120)$$

aminek értelmében $|r_1| > 1$ (sőt, a tipikus esetben $r_1 > 1$).

A teljes rendszer nyílthurkú körerősítése ezek szerint $-r_1 e^{-2jkL}$, ami egynél nagyobb abszolút értékű.

A stabil oszcilláció feltétele, hogy a körerősítés egynél nagyobb valós érték legyen. Ez teljesül akkor, ha r_1 pozitív, és a két hullámvezető együttes fázistolása π páratlan számú többszöröse, ami pont a bal oldalon ideálisan mereven lezárt síp rezonanciafrekvencián alakul ki.

A tölcséres fúvókájú hangszerek esetében a bal oldali reflexiók tényező abszolút értéke egynél kisebb érték lesz, így nem alakulhat ki stabil oszcilláció az egyszerű modell szerint.

Dinamikus nádmodell

Tekintsünk ezért egy dinamikus nádmodellt, ahol a nádat egy egyszabadságfokú, de immár tömeggel és csillapítással felruházott rendszer írja le. Az

admittancia kifejezése ekkor

$$Y_r = d \sqrt{\frac{1}{2\rho_0 p_0}} \left(|x_0| - 3 \frac{A_r}{K_r + j\omega R_r - \omega^2 M_r} p_0 \right) \quad (9.121)$$

a klarinét,

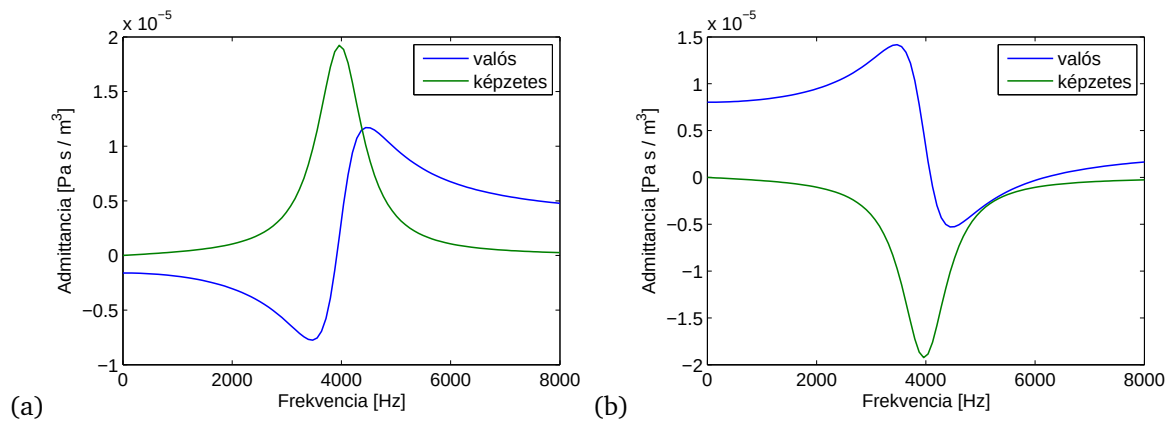
$$Y_r = d \sqrt{\frac{1}{2\rho_0 p_0}} \left(|x_0| + 3 \frac{A_r}{K_r + j\omega R_r - \omega^2 M_r} p_0 \right) \quad (9.122)$$

a trombita esetére.

Vizsgáljuk meg, hogy mely frekvenciatartományon alakul ki az a kedvező eset, hogy az admittancia valós része negatív. A 9.22. ábra a klarinét és a trombita nádjának lezáró impedanciáját ábrázolja a frekvencia függvényében a kritikus nyomás fölötti $p_0 = p_{\max}/2$ statikus nyomás esetén. Látjuk, hogy a klarinét esetében az Y_r admittancia egy széles tartományban negatív valós részű, és itt a képzetes része eleinte elhanyagolható, majd a rezonanciafrekvencia közledtével egyre növekszik. Eszerint a klarinét a nád rezonanciafrekvenciája alatti széles frekvenciatartományban jó akusztikai gerjesztést tud biztosítani, ha a kritikus nyomás fölé esik a szájüreg statikus nyomása.

A trombita esetében a helyzet eltérő. Itt a lezáró admittancia valós része a kisfrekvenciás tartományban végig pozitív – ezt a statikus modell már megmutatta –, csupán az ajak rezonanciafrekvenciája környékén vált negatív értékre. Ez azt jelenti, hogy a rézfúvós játékos csak az ajak rezonanciafrekvenciája körüli tartományban képes meggerjeszteni a hangszer módusait, vagyis az ajkak feszítésével követnie kell a játszott hang frekvenciáját.

Fontos még megjegyeznünk, hogy a lezáró admittancia a klarinét esetére pozitív képzetes részű, ami szerint a lezárás a hangszertestet hosszabbítja. Ennek eredményeként a nádyelvé hangszerek esetében a tényleges sajátfrekvenciák az ideálisan lezárt cső rezonanciafrekvenciáinál némileg kisebbek lesznek. A trombita esetében a lezáró admittancia negatív képzetes részű, ami szerint a lezárás a csövet rövidíti, és a sajátfrekvenciák az ideális sajátfrekvenciáknál kissé magasabban jelentkeznek.



9.22. ábra. A (a) klarinét és a (b) trombita nádgerjesztésének lezáró admittanciája a $p_0 = p_{\max}/2$ statikus nyomáson