

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Villamosmérnöki és Informatikai Kar

Hálózati Rendszerek és Szolgáltatások Tanszék

Akusztikai Laboratórium

# A FILC SZEREPÉNEK MODELLEZÉSE KALAPÁCS-HÚR KÖLCSÖNHATÁS ESETÉN

ÖNÁLLÓ LABORATÓRIUMI BESZÁMOLÓ

Készítette: Kulcsár Dóra

Mérnök informatikus alapszak

Konzulens: Dr. Fiala Péter

2013

# Tartalomjegyzék

1. Bevezetés .....	3
2. Elméleti alapvetés .....	3
2.1. A kalapács.....	3
2.2. A filc .....	4
2.3. A húr .....	4
2.4. A használt modellek .....	5
2.4.1. A kalapácsmodell .....	5
2.4.2. A filcmodell.....	5
2.4.3. Húrmodell.....	7
3. A gyakorlati megvalósítás.....	8
3.1. Az elkészített szimuláció .....	8
3.1.1. Modellezési paraméterek.....	8
3.1.2. Filcmodellek.....	9
3.2. Az eredmények értékelése .....	10
3.2.1. A modellek összehasonlítása azonos paraméterek mellett.....	10
3.2.2. A modellek összehasonlítása azonos ideig tartó gerjesztésre .....	11
3.2.3. A megvalósítás hibája .....	13
3.3. Tovább lépési lehetőségek.....	13
4. Összefoglalás .....	14
5. Idézett forrásmunkák.....	15

# 1. Bevezetés

A zongora önmagában egy nagyon összetett mechanikai rendszer. A hangkeltés folyamatát számos eleme befolyásolja. Önálló laboratóriumi témául a kalapács-húr kölcsönhatás modellezését választottam. Egészen pontosan a zongorakalapácson lévő filc kölcsönhatásban játszott szerepét.

A téma napjainkban aktuális kutatási területnek számít. Szerepe nem csak a fizikai modellezés alapú hangszintézis esetén jelentős, hanem a zongora jobb működésének megértésében is. A jobb megértés elősegíti a hangszerek „tudományos alapú” továbbfejlesztését, a hosszú időn keresztül szinte kizárólagos szerepet betöltő tapasztalati javítással szemben.

Az elmúlt szemeszter során megismerkedhettem a filc különböző modellezési lehetőségeivel, azok előnyeivel, és a modellezési korlátaival. Jelen dolgozatomban egy áttekintést szeretnék adni a szemeszter során megszerzett elméleti ismeretekről és a végzett gyakorlati tevékenységről.

## 2. Elméleti alapvetés

### 2.1. A kalapács

A kölcsönhatás egyik szereplője maga a zongorakalapács. A mai zongorák kalapácsa sok mindenben eltér a hangszer létrejöttékor megalkotott kalapácsoktól. Az idők folyamát mind anyaguk, mind méretük jelentősen megváltozott.

A kalapács számos tulajdonsága befolyásolja a hangkeltést, amelyeket az évek folyamán igyekeztek tökéletesíteni. Így a kalapács vizsgálatakor annak súlya, anyaga és a kalapácsot burkoló filcrétegeken kívül, meghatározó szerepet tölt be annak nyele is a hangkeltésben. Pontosabban zavaró tényező lehet abban az esetben, ha nem tökéletes a kialakítása. Ekkor ugyanis a kalapácsok egy „másik dallamot játszanak” a húrozathoz viszonyítva. Így a mai hangszereken igyekeznek a kalapácsnyeleket az adott, megszólaltatandó hang frekvenciájához alakítani. (Gát, 1964)

A jelen feladat szempontjából a kalapács fontos tulajdonsága, hogy a mai koncertzongorákon alulról, illetve az elterjedt állózongorákon, pianínókon oldalról üti meg a kalapács a húrozatot. De ezek nem tekinthetők kizárólagos megvalósításnak. A zongora fejlődése során időről időre

felbukkant a felülről ütött megoldás is, azonban ez a fajta hangkeltési technika nem terjedt el. (Gát, 1964)

A napjainkban használt zongorakalapács keményfából készül, amelyet több rétegben filc borít. A alapácsok tömege általában 3 és 10 g között található. Ebben a tulajdonságukban jelentősen eltérnek a kezdetben épített hangszerektől. Például Christofori 1726-ban épített hangszerén csupán fél gramm volt az eltérés a különböző hangokhoz tartozó alapácsok tömegében. (Gát, 1964)

## **2.2. A filc**

A filcet a zongoragyártásban elsőként 1826-ban Henri Pape alkalmazta. Az új anyag alkalmazása nagy előrelépés volt az addigi megoldásokhoz viszonyítva, hiszen a kezdetben alkalmazott pergamen vagy kéregpapír-alapácsok nagyon rövid idő után használhatatlanná váltak. A filc megjelenése előtt közvetlenül használt bőrrel bevont fakalapács sem bizonyult megfelelő megoldásnak, mivel a bőr hamar elvesztette a rugalmasságát. A megmerevedett felület miatt a zongora hangja kellemetlenül élessé vált. (Gát, 1964)

A filc nem egy homogén anyag, általában 3-4 különböző vastagságú és tulajdonságú rétegből épül fel. A zongorafilc gyártásakor egy hosszú folyton keskenyedő filccsíkot állítanak elő, melyet az egyes alapácsok készítésekor feldarabolnak. A filc – ugyanúgy, mint a alapács keményfa magja – a diszkanttól a basszusig fokozatosan nő, vastagodik, és formája is egyre kerekébbé válik. (Williams, 2003)

A filc keménysége kritikus paraméter egy hangszer elkészítésekor, gyártására nagy gondot kell fordítani. A filc akkor tekinthető tökéletesnek, ha biztosítja, hogy a alapács-húr érintkezés ideje pontosan a húron kialakult rezgések periódusidejének felével egyezzen meg. Ezért a alapácsfejek elkészülte után ezt a paramétert minden egyes alapácsra ellenőrizni kell. Eltérés esetén a filcet hangolni szükséges. Túl puha filc esetén vegyszeres kezeléssel lehet az anyagot merevebbé tenni. Túl kemény filc esetén különböző tűkkel és fogókkal lazítják fel a szerkezetet. Ezek az utólagos beavatkozások azonban csökkentik a filc, és így magának a hangszernek az élettartamát. (Gát, 1964)

## **2.3. A húr**

A húrok – mint a zongora többi eleme is – nagy átalakuláson mentek át, amióta a hangszer létezik. Története során az anyagok és a megoldások sokszínűségével is találkozhatunk. A

húrozat készítésekor felhasznált anyagok az állati béltől a nemesfémekig változtak. A húron kívül a felsőbb oktávokban többször alkalmaztak lemezeket is. (Gát, 1964)

A ma általánosan használt, húzott acélhúrok az 1820-as évekre érték el először azt a minőségi szintet, hogy ésszerűen lehessen őket a zongoragyártásban használni. Az acélhúrok fejlődése nagyon jelentős. Az erősebb húrok lehetővé tették nagyobb kalapácsok használatát, és jobban meg lehetett őket feszíteni, azaz végeredményben lehetővé tették a zongora hangerejének növekedését. (Williams, 2003)

Azért, hogy a zongora méreteit elfogadható keretek között lehessen tartani, a mélyebb oktávokban bevonatolt húrokat alkalmaznak. Az vastagabb acélhúrokat rézzel fonják körül, mely a húrt nehezebbé teszi. Így rövidebb húrral is mélyebb hangot lehet kelteni. Egyes modelleknél a legmélyebb basszushangokat kétszeresen is körbefonják az optimálisabb helykihasználás miatt. (Williams, 2003)

Az egyes hangokat megszólaltató húrok száma is hosszú fejlődés eredménye. A különböző gyártók egyes modelljeinél, ma is többféle megoldással találkozhatunk. Egyes modellek esetében külön rezonánshúrokat is alkalmaznak, melyeket nem üt meg közvetlenül a kalapács, hanem az többi húron keletkező rezgéseket veszik át. A húrozat ma legelterjedtebb változatában a legelső oktáv hangjai egyszeresen, a következő 8-9 hang kétszeresen, míg az innentől felfelé található hangok háromszorosan húrozottak. (Gát, 1964)

## **2.4. A használt modellek**

### ***2.4.1. A kalapácsmodell***

A modellezés során a kalapácsot mint a húrra egy adott kezdősebességgel felülről „ráeső”, majd „visszapattanó” tömeget tekintettük, mely egyetlen egy erőimpulzust hoz létre a húron. A kalapács a húrt egyetlen pontban üti meg. A modell elhanyagolja a kalapács térbeli kiterjedését.

### ***2.4.2. A filcmodell***

A filc modellezése esetén több matematikai modellt is alapul vehetünk. A következőkben három lehetséges modellt tekintünk át.

#### **Lineáris modell**

Legegyszerűbb esetben a kalapács végét borító filcet, mint egydimenziós lineáris rendszert modellezhetjük. Ebben az esetben a filcet, mint egy ekvivalens  $K_f$  merevségű rugót

jellemezhetjük. A filc által a húrra kifejtett erő egyenesen arányos a filc aktuális összenyomódásával. A modellt leíró képlet az alábbi:

$$F_f = K_f \cdot u_f,$$

ahol az  $F_f$  a filc által kifejtett erőt, és  $u_f$  a filc összenyomódását jelöli,  $K_f$  pedig a filc statikus merevsége.

Mivel a modell nagyon egyszerű, használhatósága is korlátozott.

### **Nem-lineáris modell**

A filcet a legtöbb esetben annak nem-lineáris modelljével szokták jellemezni. Ebben az esetben a filc által kifejtett erő nem-lineárisan arányos a filc összenyomódásával:

$$F_f = K_f \cdot u_f^p$$

Az arány mértékét a  $p$  nem-linearitási tényező írja le, melynek értéke relatív széles skálán változik. A nem-lineáris filcmodell használatával végzett mérések során Hall és Askentfelt megállapította, hogy az erőt 0.55 N és 35 N között változtatva, a  $p$  rendre 1.5 és 3.5 között vette fel az értékeit. Azonban az értékek nem mutattak szabályos átmenetet az alsótól a felsőbb oktávok kalapácsai felé. (Hall & Askentfelt, 1988)

Stulov szerint egy koncertzongora esetén a  $p$  értékeknek 2 és 3 között kell lenniük a megfelelő piano-forte kontraszt beállításához. (Stulov, 1995)

### **Hiszterézises modell**

A filc tényleges viselkedésének modellezésekor egyik előbbi modell sem tekinthető kielégítőnek. A filc emlékező anyag, azaz a filc további összenyomódása, kitágulása során fellépő erő függ a korábbi összenyomódási értékektől. A viselkedését számos paraméter befolyásolja. Stulov négy kulcsfaktort állapított meg munkájában, és ezen paraméterek használatával építette fel négyparaméteres hiszterézises modelljét:

$$F_f(u_f(t)) = K_f \left[ u_f^p(t) - \frac{\varepsilon}{\tau_0} \int_0^t u_f^p(\xi) e^{\left(\frac{\xi-t}{\tau_0}\right)} d\xi \right]$$

A modellben  $\varepsilon$  a hiszterézis konstans, és  $\tau_0$  a filc felejtési időállandója. (Stulov, 1995)

### 2.4.3. A húrmodell

A húr jó közelítéssel tekinthető egy egydimenziós rendszernek, amelyet az alábbi egyenlet ír le:

$$F_s(x, t) + T_s \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Az egyenletben  $F_s$  a húrra ható gerjesztő erő,  $T_s$  a húrban ható hosszirányú feszítőerő és  $\mu$  a húr hosszegységre eső tömege.

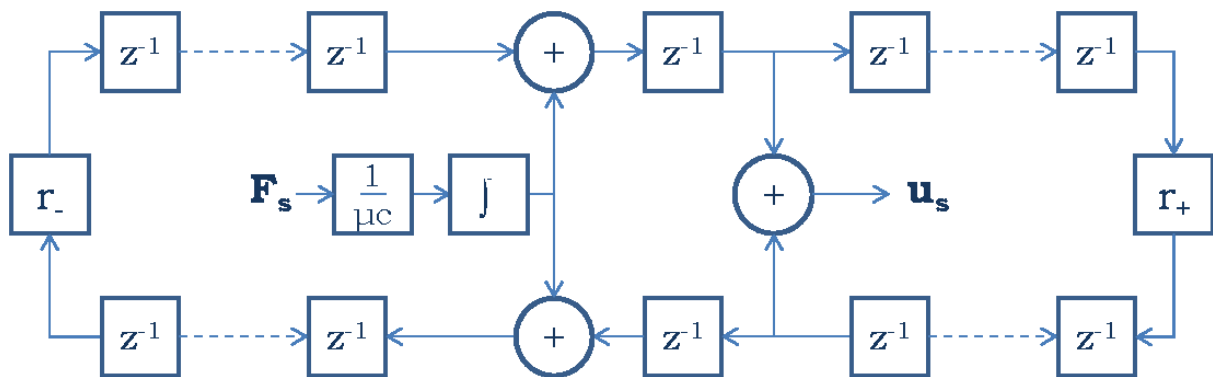
A zongorahúr esetén egy véges hosszú, mindkét végén befogott húrról beszélhetünk. A húr valóságot közelítő modellezésénél figyelembe kell venni a húron, illetve a húrlezárásokon fellépő veszteségeket, csillapításokat is.

A húr modellezéséhez a waveguide-modellt választottunk, mely a d'Alambert féle megoldásból indul ki. A d'Alambert féle megoldás a haladó hullámokat két félhullám összegeként írja le:

$$u(x, t) = u^+(ct - x) + u^-(ct + x),$$

ahol  $u^+$  jelöli a pozitív, míg  $u^-$  a negatív irányba haladó félhullámot.

A szimuláció során alkalmazott waveguide-modell a következő ábrán látható:



1. ábra A szimulációhoz használt waveguide-modell

Az ábrán végigkövethető a szimuláció teljes folyamata. Az ütési pontban megjelenő erőből kiszámítjuk a pontban érvényes aktuális elmozdulási értéket. Ezt az elmozdulás-értéket osztjuk kétfelé a waveguide pozitív, illetve negatív ágára.

Az  $r_-$ , illetve az  $r_+$  értékek jelölik a két húrlezárást. A húrlezárásban sűrítjük a visszverődésen kívül a veszteségeket, csillapításokat is. A ténylegesen megvalósult modellben mindkettő

húrlezárás a konstans -1 értéket veszi fel. Azaz elhanyagoljuk a veszteségeket, ideális hűrt tételezünk fel.

### 3. A gyakorlati megvalósítás

A modellezést Matlab környezetben végeztük.

#### 3.1. Az elkészített szimuláció

##### 3.1.1. Modellezési paraméterek

A numerikus szimulációhoz minden paramétert diszkrétizálni kellett. A filcet  $dx$  elmozdulásonként osztottuk fel  $N$  egyenlő részre. A szimuláció során minden  $dt$  időpillanatban vizsgáljuk a paraméterek aktuálisan felvett értékeit egészen  $T$ -ig, azaz a szimuláció teljes időtartalmának leteltéig.

A szimuláció többszörös futtatása során az alábbi paraméterek értékeit lehet megváltoztatni:

- A kalapácsra vonatkozó paraméterek:
  - $M_h$  [kg] kalapács tömege
  - $v_0$  [m/s] kalapács kezdeti sebessége
- A filcre vonatkozó paraméterek:
  - $K_f$  [N/m] filc ekvivalens merevsége
  - $p$  nem-linearitási tényező
  - $\tau_0$  [s] filc felejtési időállandója
  - $\varepsilon$  hiszterézis állandó
- A húrra vonatkozó paraméterek:
  - $K_s$  [N/m] húr merevsége
  - $L_s$  [m] húr hossza
  - $M_s$  [kg] húr tömege
  - $r_l, r_r$  [-] húrlezárások
  - $x_f$  ütési pont
  - $x_0$  megfigyelési pont
- A szimuláció paraméterei:
  - $dt$  [s] időlépés
  - $T$  [s] szimuláció hossza

A szimuláció során a fent megadott értékekből számolunk ki minden más értéket.



### 3.1.2. Filcmodellek

#### Lineáris modell

A fentebb ismertetett lineáris összefüggés kiszámolásához az ismertetett paraméterek alapján szükséges meghatározni a filc aktuális összenyomódását. Ezt a kialakított modellben a kalapács aktuális pozíciója és a húr aktuális pozíciója befolyásolja, az alábbiak szerint:

$$u_f = u_h - u_s,$$

ahol  $u_h$  jelöli a kalapács, míg  $u_s$  a húr aktuális elmozdulását. Mindkét esetben az elmozdulás kezdeti értéke nullával egyezik meg.

#### Nem-lineáris modell

A nem-lineáris modell gyakorlati megvalósításakor figyelembe kellett venni, hogy a filc aktuális összenyomódásának mértéke nem vehet fel negatív értéket, mivel a húr nem képes húzni a filcet és viszont sem. Ezért az  $u_f$  paraméter meghatározásakor ezt szem előtt kellett tartani:

$$u_f = \max \{u_s - u_h, 0\}$$

#### Hiszterézises modell

A modell fentebb ismertetett változata nagyon nagy erőforrást igényelne numerikus szimuláció esetén. Ezért a szimuláció során az alábbi módosított formulát alkalmaztuk:

$$F_f = K_f \cdot (u_f^p - q \cdot P), \text{ ahol}$$

$$P = (P + u_f^p) \cdot \beta \text{ a következő lépésben figyelembe veendő „múlt”};$$

$$u_f = \max \{u_s - u_h, 0\} \text{ a filc aktuális összenyomódása.}$$

A további bevezetett változók csak a szimuláció gyorsítására szolgálnak, mert azokat előre meg lehet határozni. Nem szükséges minden egyes lépésben újra számolni őket:

$$q = \frac{\varepsilon}{\tau} \text{ a múlt súlya;}$$

$$\tau = \frac{\tau_0}{dt} \text{ a dimenziótlan időállandó;}$$

$\beta = e^{-\frac{1}{\tau}}$  pedig a múlt hatásának eltűnését írja le. Minél távolabb kerülünk egy felvett értéktől időben, annál kisebb hatása van a jelen pillanatban a filc által kifejtett erőre.

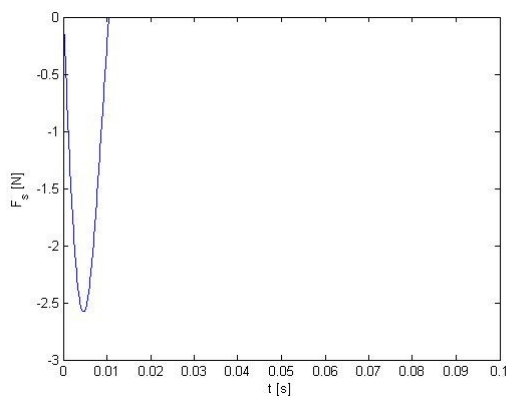
## 3.2. Az eredmények értékelése

### 3.2.1. A modellek összehasonlítása azonos paraméterek mellett

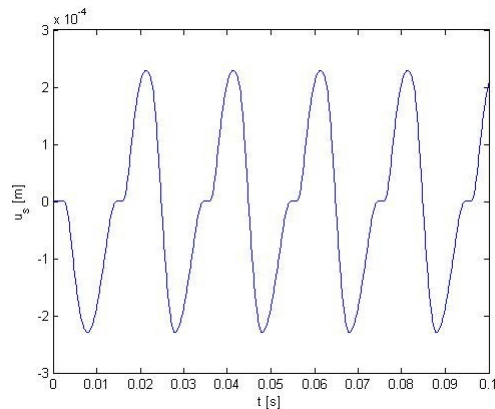
A következő részben a szimuláció grafikus kimenetét mutatjuk be, azonos paraméterek mellett. Az erőgerjesztés és a megfigyelés pozíciója eltér. Az ábrákat megnézve jól látszik, hogyan változik meg az erőgerjesztés jellege azáltal, hogy más-más modellt alkalmazunk.

#### Lineáris modell

A lineáris gerjesztésnél bemutatott jelet tekintjük a továbbiakban a „referenciagerjesztésnek”. Az elkészített szimuláció paramétereit ebből kiindulva vizsgáljuk.



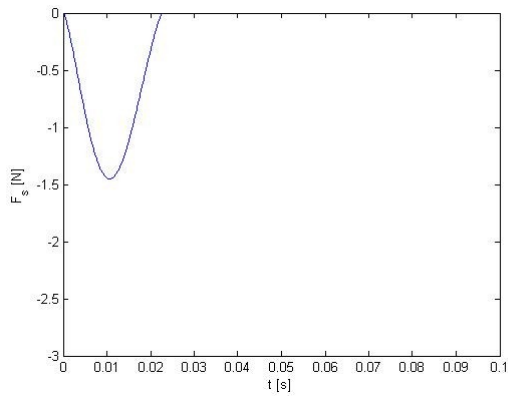
2. ábra A húrra ható erő  $L/3$  pontban



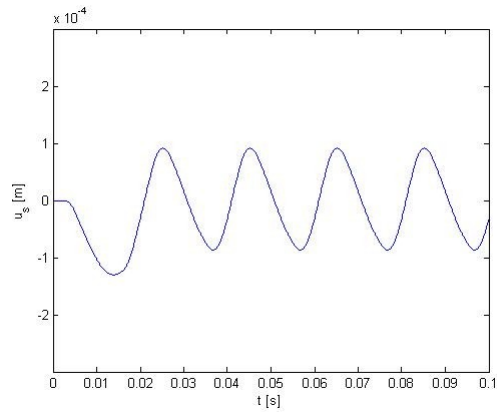
3. ábra A húr elmozdulása  $L/10$  pontban

#### Nem-lineáris modell

A nem-lineáris gerjesztés esetén az erőimpulzus nemcsak időben lesz hosszabb. A gerjesztés amplitúdója csökken és felfedezhető benne egy exponenciális jelleg. A gerjesztő erő ebben az esetben szimmetrikus marad. A szimmetrikus jelleg azzal magyarázható, hogy ebben az esetben még feltételezzük, hogy a filc viselkedése nem függ annak korábbi viselkedésétől.



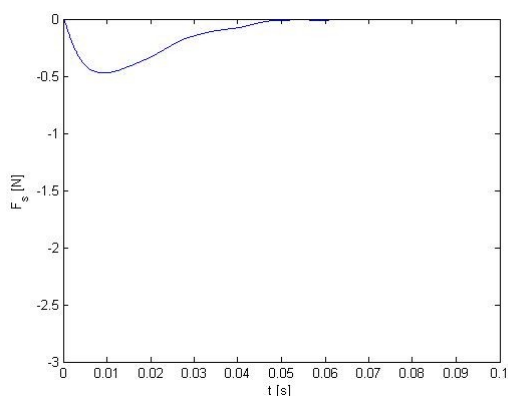
2. ábra A húrra ható erő  $L/3$  pontban



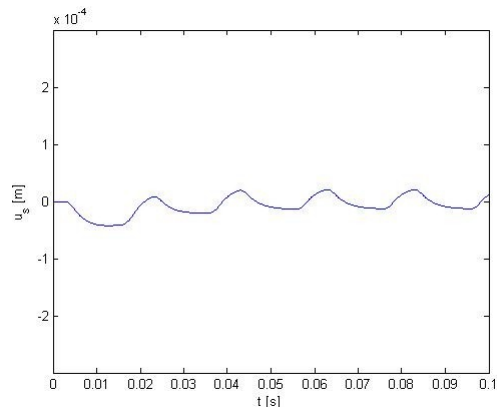
3. ábra A húr elmozdulása  $L/10$  pontban

### Hiszterézises modell

A hiszterézises modellt alkalmazva a gerjesztő erő többé nem szimmetrikus, hiszen az aktuálisan kifejtett erő értéke függ annak korábbi értékeitől is. A gerjesztés ebben az esetben jelentősen hosszabb ideig tart, mint a lineáris modellt használva.



4. ábra A húrra ható erő  $L/3$  pontban



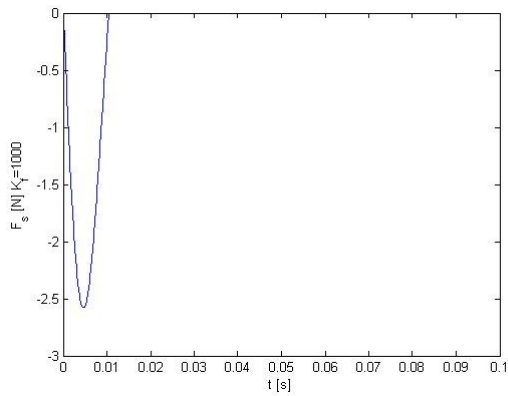
5. ábra A húr elmozdulása  $L/10$  pontban

### 3.2.2. A modellek összehasonlítása azonos ideig tartó gerjesztésre

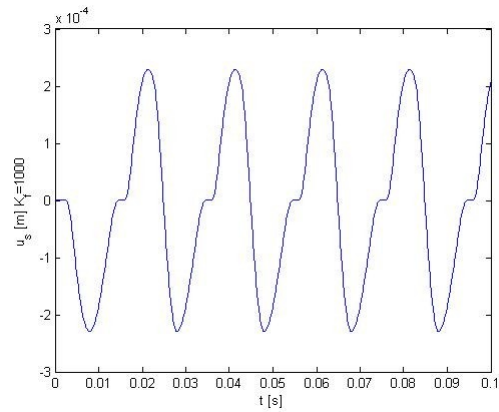
Ahhoz, hogy a húron keletkező elmozdulásról jobb összehasonlításunk legyen, igyekeztünk a  $K_f$  (fílc merevségét jellemző) paramétert úgy állítani, hogy mindegyik esetben a gerjesztés 10 ms-ig tartson. Ez a hosszérték megfelel a korábban ismertetett elvnek is, miszerint a gerjesztő erő hosszának meg kell egyeznie a kialakult rezgés periódusidejének a felével.

### Lineáris modell

Lineáris esetben ugyanabból a paraméterezésből indulunk ki, mint az előző összehasonlításban. A fílc ekvivalens merevsége ebben az esetben 1 000 N/m.



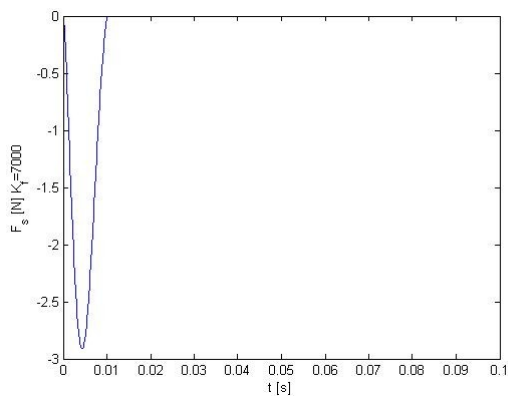
6. ábra A húrra ható erő  $L_s/3$  pontban  $K_f = 1000$



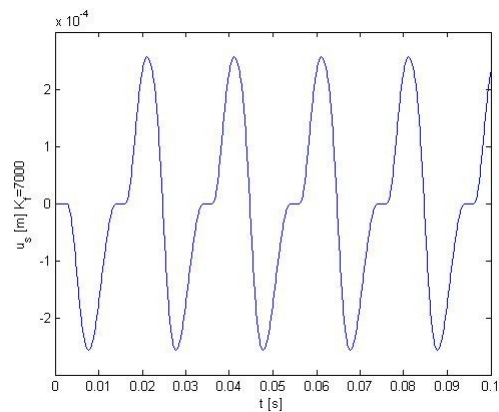
7. ábra A húr elmozdulása  $L_s/10$  pontban  $K_f = 1000$

### Nem-lineáris modell

A nem-lineáris modell esetén a filc-merevség értékét 7 000 N/m-re kellett választani, hogy megközelítőleg ugyanolyan idejű gerjesztés kapjunk, mint a referenciául választott lineáris esetben. A húr-elmozdulását figyelve láthatjuk, hogy jellegére hasonló hullám alakot kaptunk, mint lineáris esetben.



8. ábra A húrra ható erő  $L_s/3$  pontban  $K_f = 7000$

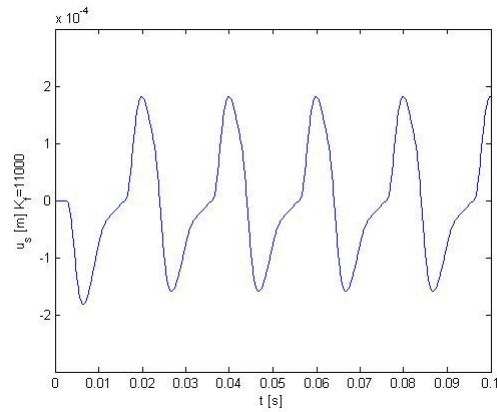
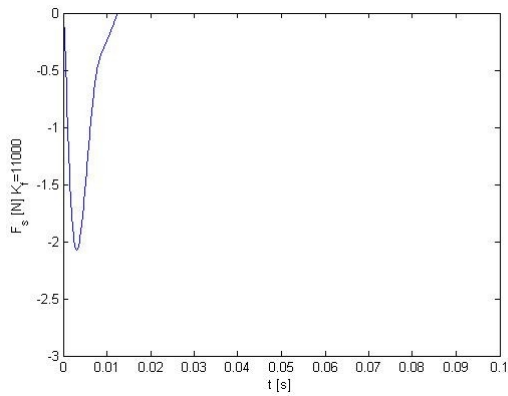


9. ábra A húr elmozdulása  $L_s/10$  pontban  $K_f = 7000$

### Hiszterézise modell

Nagyobb eltérést figyelhetünk meg a hiszterézises modell alkalmazásakor. Ebben az esetben nem sikerült tökéletesen beállítani a 10 ms-os gerjesztési időt. A megközelítőleges eredményt a 11 000 N/m-es filcmerevségi állandó beállításával sikerült elérni.

Az erőgerjesztésen itt is megfigyelhető a hiszterézises jellegből következő aszimmetrikus alak. Ennek hatását láthatjuk az elmozdulást szemléltető ábrán is. Megállapítható azonban, hogy az elmozdulás jellege itt is megegyezik a másik két modell esetén megfigyelhetővel.



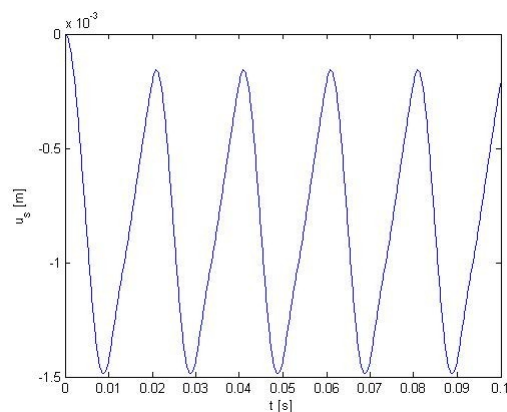
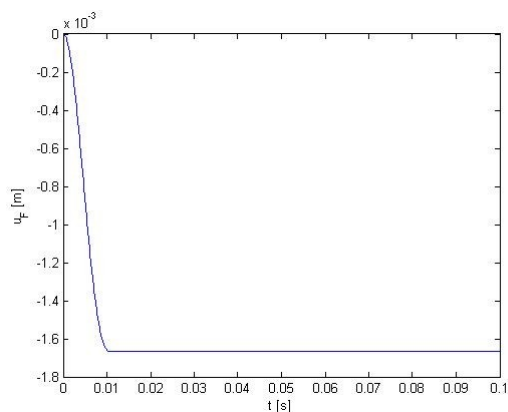
10. ábra A húrra ható erő  $L_s/3$  pontban  $K_f = 11000$

11. ábra A húr elmozdulása  $L_s/10$  pontban  $K_f = 11000$

### 3.2.3. A megvalósítás hibája

A fent leírt módon elkészített szimuláció az ütési pontban nem az elvárt módon viselkedik. Míg egy tetszőlegesen kiválasztott másik pontban a húron az elmozdulás a nulla kitérésű pont körül oszcillál, addig az ütési pontban egy kitérített állapotban teszi ugyanezt.

A jelenség a gerjesztő erőből származó elmozdulás-feltétel számítási módja miatt lép fel. A gerjesztő erőből közvetlenül sebességet számolunk a  $V = \frac{F_s(k)}{\mu \cdot c_s}$  képlettel, ahol  $\mu$  a húr anyagjellemzője, míg  $c_s$  a húrban terjedő rezgések sebessége. Az így kapott sebességértéket numerikusan integrálva kapjuk meg a keresett elmozdulás-feltételt. Az integrálás következtében a kiszámolt  $u_F$  érték az erőgerjesztés elmúltával konstans nem-nulla értéket vesz fel.



12. ábra Erőből számolt elmozdulás-kritérium  $L_s/3$  pontban

13. ábra A húr elmozdulása  $L_s/3$  pontban

### 3.3. Tovább lépési lehetőségek

A dolgozatban bemutatott szimuláció korántsem tekinthető egy elkészült rendszernek. A modelleket számos irányban lehetne bővíteni. Például figyelembe lehetne venni a fűlcs véges

kiterjedését; hogy a húrt nem egyetlen pontban, egymás melletti pontjait nem ugyanabban az időben üti meg a kalapács. (A kalapács görbülete miatt.) Figyelmet lehetne fordítani a húrtöbbszörözésre és annak filcmodellt módosító hatására, vagy vizsgálni lehetne a filcet, mint nem homogén anyagot is.

A megkezdett munkát a továbbiakban mindenképpen érdemes folytatni. Az első és legfontosabb feladat a tapasztalt hibajelenség javítása. A jelenség fellépésének oka egyértelmű, a kezdeti elmozdulás számítási módjának logikus következménye. Annak megértése, hogy a jelenség milyen módon kerülhető el, a szakirodalom további tanulmányozását igényli.

A hiba javítása után lehet hozzákezdeni a modellek célhardveren történő implementálásához. A hardveres megvalósítás előnye a gyors processzálási teljesítmény. A hardveren való megvalósítás után a szimulációnak hallható végeredménye is rendelkezésre áll, amely segíti a modellek további tesztelését, értékelését és esetleges javítását.

## **4. Összefoglalás**

Dolgozatomban áttekintettem a kalapács-húr kölcsönhatásban szereplő elemek kölcsönhatásban játszott szerepét. Igyekeztem röviden ismertetni azok fejlődését és napjainkban jellemző tulajdonságaikat.

Ismertettem a szimuláció során alkalmazott modellek elméleti hátterét, majd a gyakorlati megvalósítás elemeit. Kitértem a megvalósítás után kapott szimulációs eredményekre, illetve rávilágítottam a jelen megvalósítás már ismert hibájára.

A dolgozat végén felvettem egy pár tématerületet, melyekben alaposabban elmélyedve a kutatást tovább lehetne folytatni.

## 5. Idézett forrásmunkák

Gát, J., 1964. *A zongora története*. Budapest: Zeneműkiadó Vállalat.

Hall, D. E. & Askentfelt, A., 1988. Piano string excitation V: Spectra for real hammers and strings. *Journal of the Acoustical Society of America*, 83(4), pp. 1627-1638.

Stulov, A., 1995. Hysteretic model of the grand piano hammer felt. *Journal of the Acoustical Society of America*, 97(4), pp. 2577-2585.

Williams, J.-P., 2003. *A zongora*. Budapest: Vince Kiadó.