

Móduselemzés

A mérési leírást kidolgozta: Fiala Péter

Mérési leírás
Akusztika és hangtechnika laboratórium

1. Bevezetés

Jelen mérés feladata egy mechanikai rendszer viselkedésének mérés útján történő feltérképezése. Ez a feladat gyakran előfordul a mérnöki gyakorlatban, mikor egy létező objektumról (épület, híd, hangszer, jármű) szeretnénk modellt alkotni. A modellalkotás célja többféle lehet. Egyrészt használhatjuk a modellt arra, hogy segítségével megmagyarázzuk a rendszer viselkedését. A modell használható arra is, hogy megjósoljuk a rendszer jövőbeli gerjesztésekre adott válaszát. Végül, a modell segítségével megjósolhatjuk későbbi beavatkozások várható hatását is.

A mérés során a kísérleti móduselemzés módszerét alkalmazzuk egy egyszerű mechanikai rendszer vizsgálatára. Ez a leírás a móduselemzés elméleti háttérét mutatja be, majd röviden ismerteti a mérési környezetet és a mérés menetét.

2. Elméleti háttér

2.1. Mechanikai rendszer mozgásegyenlete

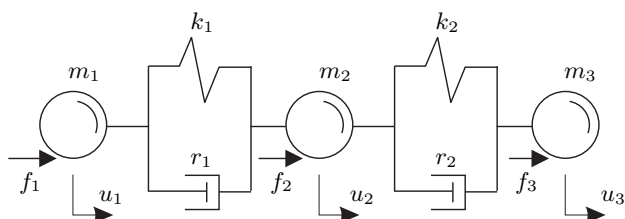
Tekintsük az 1. ábrán látható, három tömegből, rugókból és csillapítókából álló koncentrált paraméteres mechanikai rezgő rendszert. A rendszer gerjesztése a tömegekre ható $f_i(t)$ erők, válasza pedig a tömegek $u_i(t)$ elmozdulásai. A rendszer mozgásegyenlete az alábbi módon írható fel:

Az m_1 tömeget az f_1 erő, az r_1 csillapítású csillapító elem sebességéből, illetve a k_1 merevségű rugó megnyúlásából származó erők gyorsítják:¹

$$k_1 [u_1(t) - u_2(t)] + r_1 [\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)] + m_1 \ddot{u}_1(t) = f_1(t). \quad (1)$$

Az egyenletben a változó feletti pont az idő szerinti deriválást jelöli. Az f_2 erő az m_2 tömeget gyorsítja, valamint

¹A k rugómerevség definíciója esetünkben $f = ku$, a c csillapítás definíciója: $f = cv = c\dot{u}$ és a tömeg definíciója: $f = ma = m\ddot{u}$.



1. ábra. Három szabadsági fokú koncentrált paraméteres rezgő rendszer

az r_1 csillapító és a k_1 rugó megnyúlását, illetve az r_2 csillapító és a k_2 rugó összenyomódását okozza:

$$k_1 [u_2(t) - u_1(t)] + k_2 [u_2(t) - u_3(t)] + r_1 [\dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)] + r_2 [\dot{u}_2(t) - \dot{u}_3(t)] + m_2 \ddot{u}_2(t) = f_2(t). \quad (2)$$

Az f_3 erő az m_3 tömeget gyorsítja, valamint felelős az r_2 csillapítás és a k_2 rugó összenyomódásáért:

$$k_2 [u_3(t) - u_2(t)] + r_2 [\dot{u}_3(t) - \dot{u}_2(t)] + m_3 \ddot{u}_3(t) = f_3(t). \quad (3)$$

Az (1–3) egyenletek mátrixalakba rendezhetőek az alábbi módon:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 & -r_1 & 0 \\ -r_1 & r_1 + r_2 & -r_2 \\ 0 & -r_2 & r_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \dot{u}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

A (4) egyenletrendszer kompakt formája

$$\mathbf{K}\mathbf{u}(t) + \mathbf{R}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (5)$$

ahol \mathbf{K} a rendszer merevségmátrixa, \mathbf{R} a csillapításmátrix, \mathbf{M} pedig a tömegmátrix. A mozgásegyenletben levő független egyenletek számát a rendszer szabadsági fokszámának (*degree of freedom*, DOF) hívjuk. Jelen esetben egy $D = 3$ szabadsági fokú rendszerrel van dolgunk, a jelenlegi felírásban a szabadsági fokok a tömegek elmozdulásai: (u_1 , u_2 és u_3).

A rendszer mozgásegyenletét felírhatjuk a frekvenciatartományban is. Ha feltételezzük, hogy minden időbeli változás $e^{j\omega t}$ alakú, akkor az idő szerinti deriválás a $j\omega$ képzetes frekvenciával való szorzásba transzformálódik. Ekkor az (5) egyenletrendszert a

$$(\mathbf{K} + j\omega\mathbf{R} - \omega^2\mathbf{M}) \hat{\mathbf{u}}(\omega) = \hat{\mathbf{f}}(\omega) \quad (6)$$

formájú mozgásegyenletté alakíthatjuk. Itt a változó feletti kalap a komplex amplitúdóra utal.

2.2. Direkt megoldás

A frekvenciatartományban felírt (6) mozgásegyenlet direkt megoldása egyszerű feladat:

- Fourier-transzformációval meghatározzuk az $\mathbf{f}(t)$ gerjesztő erők frekvenciafüggő $\hat{\mathbf{f}}(\omega)$ komplex csúcserőit.

- Minden frekvencián előállítjuk a bal oldali $\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{K} + j\omega\mathbf{R} - \omega^2\mathbf{M}$ rendszer-mátrixot.
- A rendszer-mátrix invertálásával megkapjuk az elmozdulás frekvenciafüggő $\hat{\mathbf{u}}(\omega)$ komplex csúcstértékét $\hat{\mathbf{u}}(\omega) = \mathbf{S}^{-1}(\omega)\hat{\mathbf{f}}(\omega)$ alakban.
- Ennek inverz Fourier-transzformálásával megkapjuk a rendszer $\mathbf{u}(t)$ elmozdulásválaszának időbeli lefutását.

2.3. Modális megoldás

A továbbiakban egy egyszerűbb megoldási módot vizsgálunk, melyhez a rendszer módusainak bevezetése szükséges.

A mechanikai rendszer módusai olyan rezgésformák, melyek a csillapítatlan rendszerben a gerjesztés jelenléte nélkül is fennmaradhatnak.

Keressük tehát a (6) frekvenciatartománybeli mozgásegyenlet megoldásait úgy, hogy alkalmazzuk a $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ (csillapítatlan rendszer) és $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ (gerjesztés nélkül) helyettesítéseket. A módusok az így adódó

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_n = \omega_n^2\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_n \quad n = 1, \dots, D \quad (7)$$

általánosított sajátértékfeladat megoldásai.²

A D szabadsági fokú rendszernek D különböző módusa van. Minden módus egy rezgésalakot ad meg, amely a hozzá tartozó sajátfrekvencián maradhat fenn a rendszerben. Az n -edik módushoz tartozó rezgésalakot a $\boldsymbol{\varphi}_n$ sajátvektor adja meg, a módus sajátfrekvenciáját pedig az ω_n sajátérték.

Tekintsük azt az egyszerű esetet, mikor a fentebb bevezetett három szabadsági fokú rendszerben $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $k_1 = k_2 = k$, illetve $r_1 = r_2 = r$. Ebben az esetben a rendszer módusalakjai és sajátfrekvenciái:

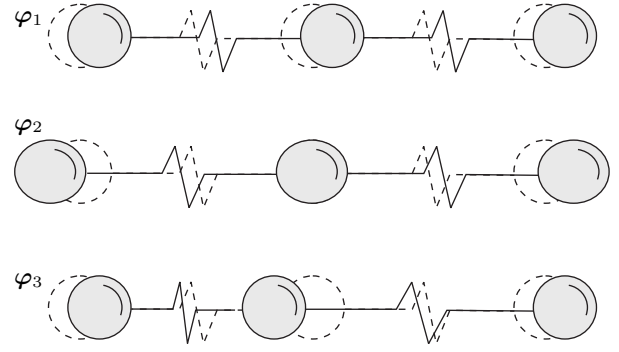
$$\boldsymbol{\varphi}_1 = b_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_2 = b_2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_3 = b_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad (8)$$

A módusalakok b_i amplitúdói tetszőleges konstansok lehetnek, aminek értelmében sem a módusalakok nagyságát, sem azok dimenzióját egyelőre nem értelmezzük. Igaz ugyan, hogy a módusalakokat általában elmozdulásként szemléltetjük, de mint később látni fogjuk, dimenziójukat nem feltétlenül kitérésnek célszerű választanunk.

A módusokhoz tartozó rezgésalakokat a 2. ábra szemlélteti. Az első $\boldsymbol{\varphi}_1$ módus olyan elmozdulásalakot ír le, melynél mindhárom tömegpont azonos elmozdulást szenved, vagyis a teljes rendszer merev testként mozdul el. Ez a módus a rendszer merevtestmódusa, ami csak zérus sajátfrekvencián maradhat fenn. Könnyen belátható, hogy a merevtestmódus (amennyiben már létrejött) gerjesztő erő nélkül fenntartható. Nyilvánvaló, hogy merevtestmódusa csak befogatlan rendszernek van. Ha a koncentrált paraméteres rezgő rendszerünket úgy módosítanánk, hogy az egyik tömeget merev falhoz rögzítjük, akkor az új rendszernek nem lenne merevtestmódusa.

²Az általánosított sajátértékfeladat felírható $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_n = \omega_n^2\boldsymbol{\varphi}_n$ alakban is. Ezen az alakon rögtön látszik, hogy a $\boldsymbol{\varphi}_n$ vektorok az $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ mátrix sajátvektorai, az ω_n^2 értékek pedig a sajátértékek.



2. ábra. A három szabadsági fokú rendszer $\boldsymbol{\varphi}_n$ módusalakjai

A másik két dinamikus módushoz valódi harmonikus mozgás tartozik. Ezeknél a mozgásformáknál a rendszer tömegközéppontja mozdulatlan, és a rugók nyúlásából származó erők gyorsítják a tömegpontokat. Megfogott rendszereknél nem feltétlenül teljesül a tömegközéppont mozdulatlansága, gondoljunk csak a merev testre rugalmasan felfüggesztett tömeg szabadrezgésére.

2.3.1. A módusok tulajdonságai

A modális megoldás szempontjából a következő tulajdonságok fontosak.

A módusalakok a tömegmátrixra nézve ortogonális rendszert, sőt, a b_i amplitúdók célszerű megválasztásával ortonormált rendszert alkotnak. Ez azt jelenti, hogy

$$\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_m = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = m \\ 0 & \text{ha } n \neq m \end{cases} \quad (9)$$

Ez az összefüggés határozza meg a módusok b_i amplitúdóit. Az $n = 1$ esetre például

$$\boldsymbol{\varphi}_1^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_1 = b_1 \{1 \quad 1 \quad 1\} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} b_1$$

$$= 3b_1^2 m = 1, \quad (10)$$

ami alapján

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3m}}. \quad (11)$$

Hasonló számítással belátható, hogy $b_2 = 1/\sqrt{2m}$ és $b_3 = 1/\sqrt{6m}$, vagyis a módusalakok mértékegysége $\text{kg}^{1/2}$.

A módusalakok a merevségmátrixra nézve is ortogonális, de nem ortonormált rendszert alkotnak. A jelenleg megválasztott b_i amplitúdókkal igaz, hogy:

$$\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_m = \begin{cases} \omega_n^2 & \text{ha } n = m \\ 0 & \text{ha } n \neq m \end{cases} \quad (12)$$

A módusalakok általános esetben a csillapításmátrixra nézve nem alkotnak ortogonális rendszert. Jelen esetben mindazonáltal, mivel a csillapításmátrix a merevségmátrixszal azonos alakú, érvényes az

$$\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{R} \boldsymbol{\varphi}_m = \begin{cases} 2\xi_n \omega_n & \text{ha } n = m \\ 0 & \text{ha } n \neq m \end{cases} \quad (13)$$

összefüggés, ahol $\xi_n = r/2m\omega_n$ a rendszer n -edik módusához tartozó csillapítási tényező.

2.3.2. A modális megoldás

A modális megoldás azon a fontos tételen alapszik, miszerint a rendszer $\hat{\mathbf{u}}(\omega)$ elmozdulásválasza tetszőleges $\hat{\mathbf{f}}(\omega)$ gerjesztés esetén felírható a rendszer φ_n módusalakjainak szuperpozíciójaként:

$$\hat{\mathbf{u}}(\omega) = \sum_{n=1}^D \varphi_n \hat{\alpha}_n(\omega) = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\alpha}_1(\omega) \\ \hat{\alpha}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_D(\omega) \end{Bmatrix} = \Phi \hat{\alpha}(\omega), \quad (14)$$

ahol Φ a módusalakok oszlopvektoraiból összeállított módusmátrix, $\hat{\alpha}(\omega)$ pedig a módusok részesezési ténye-

zőinek vektora. Az $\hat{\alpha}_n$ részesezési tényezőket modális koordinátáknak is nevezzük. Ha ezt a szuperpozíciót bevezetjük a csillapított rendszer (6) mozgásegyenletébe, akkor a következő egyenlethez jutunk:

$$[\mathbf{K} + j\omega\mathbf{R} - \omega^2\mathbf{M}] \Phi \hat{\alpha}(\omega) = \hat{\mathbf{f}}(\omega). \quad (15)$$

Szorozzuk meg balról az egyenletet a módusmátrix transzponáltjával, és vigyük be a módusmátrixot a zárójelen belülre:

$$[\Phi^T \mathbf{K} \Phi + j\omega \Phi^T \mathbf{R} \Phi - \omega^2 \Phi^T \mathbf{M} \Phi] \hat{\alpha}(\omega) = \Phi^T \hat{\mathbf{f}}(\omega). \quad (16)$$

Mivel a módusalakok a rendszermátrixokra nézve ortogonális rendszert alkotnak, a bal oldali mátrixok diagonálisak. Az egyenletrendszer kibontott alakja:

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \omega_D^2 \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 2\xi_D\omega_D \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\alpha}_1(\omega) \\ \hat{\alpha}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_D(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \vdots \\ \varphi_D^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{f}_1(\omega) \\ \hat{f}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{f}_D(\omega) \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Írjuk fel ezen alak alapján a (17) egyenletrendszer első egyenletét:

$$(\omega_1^2 + j\omega 2\xi_1\omega_1 - \omega^2) \hat{\alpha}_1 = \varphi_1^T \hat{\mathbf{f}}. \quad (18)$$

Ebben az egyenletben csak az első módus rezgésalakja és sajátfrekvenciája szerepel, és segítségükkel meg lehet határozni a módus részesezési tényezőjét. A (16) egyenletrendszer bal oldali mátrixainak diagonális volta tehát azt jelenti, hogy a részesezési tényezők csatolatlanok, vagyis az n -edik módus $\hat{\alpha}_n(\omega)$ részesezési tényezőjét meghatározhatjuk pusztán az n -edik módus alakja, sajátfrekvenciája és csillapítása valamint a gerjesztés alapján, a többi módus ismerete nélkül:

$$\hat{\alpha}_n(\omega) = \frac{\varphi_n^T \hat{\mathbf{f}}(\omega)}{\omega_n^2 + j\omega 2\xi_n\omega_n - \omega^2}. \quad (19)$$

Látszik, hogy az n -edik módus $\hat{\alpha}_n(\omega)$ részesezési tényezője egy ω_n frekvenciára hangolt egyszabadságfokú csillapított rezgő rendszer válasza, aminek gerjesztése az erővektor és a φ_n módusalak skaláris szorzata.

A rendszer teljes elmozdulásának kifejezése (14) alapján:

$$\hat{\mathbf{u}}(\omega) = \sum_{n=1}^D \varphi_n \hat{\alpha}_n(\omega) = \sum_{n=1}^D \frac{\varphi_n \varphi_n^T \hat{\mathbf{f}}(\omega)}{\omega_n^2 + j\omega 2\xi_n\omega_n - \omega^2}. \quad (20)$$

A (20) egyenlet jelentősége nagy. Az egyenlet azt mondja ki, hogy egy D szabadsági fokú rendszer adott

$\hat{\mathbf{f}}(\omega)$ gerjesztésre adott válasza felírható úgy, mint D számú, egymástól független egyszabadságfokú rendszer elmozdulásainak szuperpozíciója, ahol a független egyszabadságfokú rendszerek a sajátfrekvenciákra vannak hangolva.

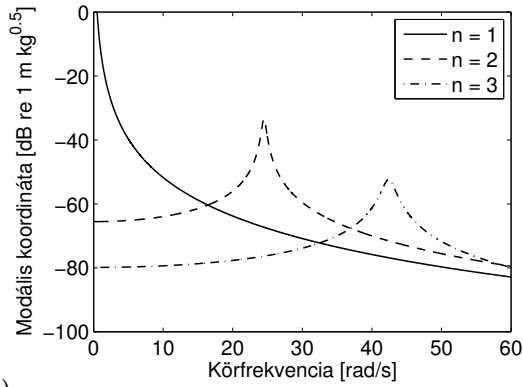
Tegyük fel például, hogy a három szabadsági fokú rendszerünk gerjesztése egy, az m_1 tömegre ható egységnyi Dirac-erőimpulzus, vagyis

$$\mathbf{f}(t) = f_0(t) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}(\omega) = \hat{f}_0(\omega) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (21)$$

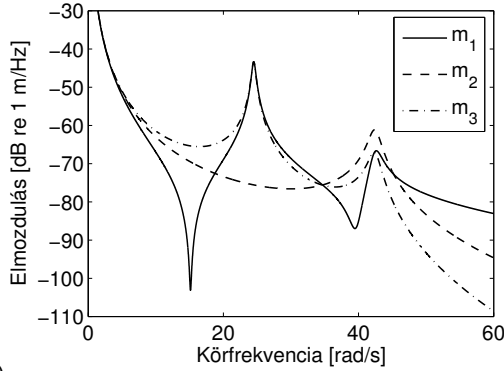
ahol $f_0(t) = 1 \text{ N} \cdot \delta(t)$, aminek Fourier-transzformáltja $\hat{f}_0(\omega) = 1 \text{ N}/(\text{rad/s})$. Ekkor a válasz modális koordinátáinak kifejezése (19) alapján:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_n(\omega) &= \frac{\varphi_n^T \hat{\mathbf{f}}(\omega)}{\omega_n^2 + j\omega 2\xi_n\omega_n - \omega^2} \\ &= \frac{\{\varphi_{n1} \quad \varphi_{n2} \quad \varphi_{n3}\} \hat{f}_0(\omega) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{\omega_n^2 + j\omega 2\xi_n\omega_n - \omega^2} \\ &= \frac{\varphi_{n1} \hat{f}_0(\omega)}{\omega_n^2 + j\omega 2\xi_n\omega_n - \omega^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

A gerjesztéshez tartozó modális koordinátákat a 3(a). ábra mutatja $k = 3 \text{ kN/m}$, $r = 3 \text{ Ns/m}$ és $m = 5 \text{ kg}$ esetére. Látható, hogy kisfrekvencián az $n = 1$ értékhez tartozó merevtestmódus dominál a válaszban, majd ahogy



(a)



(b)

3. ábra. Az m_1 tömegnél Dirac-impulzussal gerjesztett rendszer elmozdulásválaszának (a) $\hat{\alpha}_n(\omega)$ modális koordinátái és (b) a tömegek $\hat{u}(\omega)$ elmozdulásai

a frekvenciával zérus felől az $\omega_2 = \sqrt{k/m} \approx 24,5$ rad/s értékhez közelítünk, a második módusalak válik dominánssá, végül az $\omega_3 = \sqrt{3k/m} \approx 42$ rad/s sajátfrekvencián a harmadik módusalak uralkodik. A köztes frekvenciákon több módusalak többé-kevésbé egyenlő arányban részesedik a válaszban.

A három tömeg kitéréseit megadó $\hat{u}(\omega)$ vektort a (20) egyenlet alapján írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \hat{u}(\omega) = & \frac{\frac{1}{\sqrt{3m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3m}}}{\omega_1^2 + j\omega 2\xi_1\omega_1 - \omega^2} \hat{f}_0(\omega) + \\ & + \frac{\frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2m}}}{\omega_2^2 + j\omega 2\xi_2\omega_2 - \omega^2} \hat{f}_0(\omega) + \\ & + \frac{\frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6m}}}{\omega_3^2 + j\omega 2\xi_3\omega_3 - \omega^2} \hat{f}_0(\omega). \end{aligned} \quad (23)$$

A tömegek kitéréseinek amplitúdómenetét a 3(b). ábra mutatja. Kis frekvencián a tömegek nagy amplitúdóval, azonos kitéréssel lengenek (merevtestmódus). A második sajátfrekvencián az m_1 és m_3 tömegek azonos amplitúdóval (ellentétes irányban) mozognak, míg a középső m_2 tömeg 30 dB-lel kisebb elmozdulást mutat, vagyis gyakorlatilag mozdulatlan. A harmadik sajátfrekvencián az m_1 és m_3 tömegek azonos amplitúdóval mozognak,

míg az m_2 tömeg kb. 6 dB-lel nagyobb, vagyis kétszeres amplitúdóval tér ki. Ez egyezik a φ_3 módusalakkal.

2.4. Összefoglalás

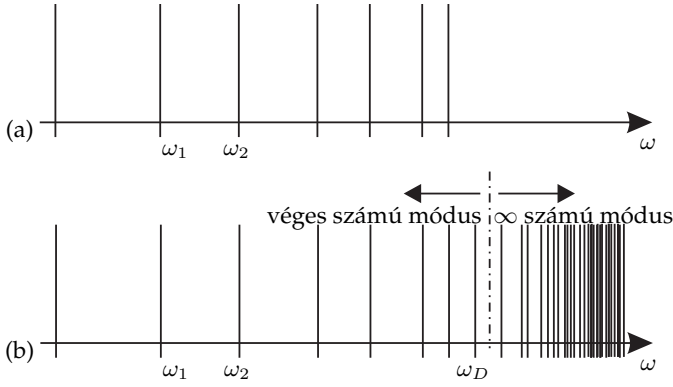
Összefoglalva, a modális válasz számítása a következő lépésekben végezhető el:

1. Fourier-transzformációval meghatározzuk az $f(t)$ gerjesztő erők frekvenciafüggő $\hat{f}(\omega)$ komplex csúcserőértékeit.
2. A merevség- és tömegmátrixra felírt általánosított sajátértékfeladat megoldásával előállítjuk a rendszer módusait.
3. A módusalakok és sajátfrekvenciák ismeretében a (20) egyenlet alapján minden frekvencián kiszámítjuk a kitérés komplex csúcserőértékeit.
4. Ennek inverz Fourier-transzformálásával megkapjuk a rendszer $u(t)$ elmozdulásválaszának időbeli lefutását.

Ez a megoldás több oknál fogva is sokkal hatékonyabb a direkt megoldásnál:

- A direkt megoldás esetében minden frekvencián meg kell oldanunk egy D változós egyenletrendszert, ami sok szabadsági fokú rendszerek estében rendkívül számításigényes. A modális megoldásnál csak egyszer kell előállítanunk a rendszer módusait a sajátértékfeladat megoldásával. A sajátértékfeladat numerikus megoldása nagyjából azonos számításigényű a rendszer mátrixok invertálásával, ezzel a módszerrel tehát sok számítást lehet megspórolni.
- A modális megoldás további előnye, hogy általában nincs szükségünk az összes D módus meghatározására. A rendszer leírásához szükséges módusok számáról a Rubin-kritérium ad tájékoztatást. E szerint a módusok szükséges számát a gerjesztés frekvencia-tartalma határozza meg. Ha a rendszer $\hat{f}(\omega)$ gerjesztése Ω felső határfrekvenciával sávkorlátozott, akkor a modális módszer pontos alkalmazásához elégséges azon módusok meghatározása, melyekre $\omega_n < 1.5\Omega$.
- A modális megközelítés további előnye, hogy akkor is alkalmazható, ha nem ismerjük előre a rendszer merevség-, csillapítás- és tömegmátrixait. Tipikusan ez a helyzet akkor, ha létező mechanikai rendszerek viselkedését akarjuk modellezni úgy, hogy előtte a rendszeren méréseket végzünk. Míg a direkt megközelítéshez szükséges rendszer mátrixok közvetlen mérése általában nem megoldható, a módusok kísérleti meghatározása elvégezhető.

- Szintén fontos előnye a modális megközelítésnek az, hogy míg a rendszer mátrixok bonyolult esetben nem adnak közvetlen rálátást a rendszer viselkedésére, a sajátfrekvenciák és módusalakok ismerete alapján viszont sokszor ránézésre meg lehet becsülni, hogy a rendszer bizonyos pontjain fellépő erők milyen rezgéseket eredményeznek. Ez a mindennapi mérnöki gyakorlatban igen fontos előny.



4. ábra. (a) Térben diszkrét (koncentrált paraméteres) rendszernek véges számú módusa van. (b) Folytonos rendszernek végtelen sok módusa van, de csak véges számú módus van adott felső határfrekvencia alatt.

3. A módusok kísérleti meghatározása

Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll egy mechanikai rendszer, melyen méréseket végezhetünk, vagyis a fizikai objektum tetszőleges pontját adott erővel gerjesztve megmérhetjük az objektum tetszőleges másik pontjának elmozdulását. Célunk a rendszer jellemzése, vagyis a mérések során szerzett információ alapján meg akarjuk tudni határozni a rendszer tetszőleges helyén megjelenő és tetszőleges időbeli lefutású, sávkorlátozott gerjesztésre adott válaszát. A (20) egyenlet értelmében ez lehetséges, ha ismerjük a rendszer φ_n módusalakjait, az ω_n sajátfrekvenciákat és a ξ_n csillapítási tényezőket.

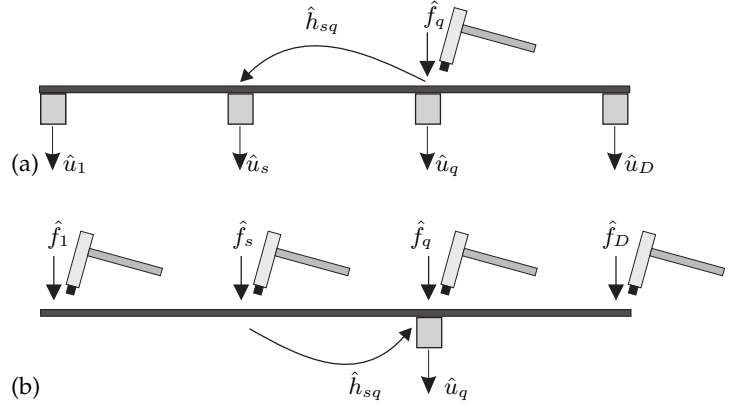
A valóságos rendszerek esetében gondot okozhat, hogy azok nem koncentrált paraméteresek, hanem tömegük térben elosztott, és merevségük tetszőlegesen közeli tömegpontok között értelmezhető. Az ilyen rendszereknek végtelen számú szabadsági fokuk, és így végtelen számú módusuk is van. Szerencsére azonban a végtelen számú módus sajátfrekvenciái egymástól elkülöníthető diszkrét frekvenciaértékeken jelennek meg, amint az a 4. ábrán látható. Ennek a tulajdonságnak köszönhető, hogy egy adott felső frekvenciakorlát alatt egy folytonos rendszernek is véges számú módusa van. A módusok kísérleti meghatározásánál csak egy véges frekvenciasávban vizsgáljuk a rendszert, és a frekvenciasávba eső, véges számú módus meghatározására törekszünk.

3.1. A mérés elve

Jelöljük ki a rendszeren D megfigyelési pontot. Gerjesszük a rendszert egy tetszőlegesen kiválasztott (mondjuk a q -adik) megfigyelési pontban frekvenciafüggetlen egységnyi erővel (időtartományban Dirac-impulzus), és mérjük a rendszer válaszát minden megfigyelési pontban. Ezzel egy átviteli vektort határozunk meg, amelynek $\hat{h}_{sq}(\omega) = \hat{u}_s(\omega)/\hat{f}_q(\omega)$ eleme a (20) egyenlet alapján közelíthető

$$\hat{h}_{sq}(\omega) = \frac{\hat{u}_s(\omega)}{\hat{f}_q(\omega)} \approx \sum_{n=1}^M \frac{\varphi_{ns}\varphi_{nq}}{\omega_n^2 + j\omega 2\xi_n\omega_n - \omega^2}, \quad s = 1, \dots, D \quad (24)$$

alakban, ahol M a figyelembe vett (illetve meghatározandó) módusok száma, φ_{ns} a φ_n módusalak értéke az s -edik megfigyelési pontban, φ_{nq} pedig a φ_n módusalak értéke a gerjesztési pontban.



5. ábra. Az átviteli vektor mérése (a) definíció szerint és (b) a reciprocitási elv nyújtotta lehetőséggel élve

A jó jel-zaj viszonytal mért átviteli függvények általában a 3(b). ábrán látható spektrumokhoz hasonlítanak. Az ω_n sajátfrekvenciákra következtethetünk a mért átvitel maximumhelyeiből, a ξ_n csillapítási tényezőket pedig az átviteli függvények csúcsainak szélességéből becsülhetjük meg.

Ha ezeket az értékeket megbecsültük, akkor már csak a módusalakok, azaz a φ_{ns} értékek meghatározása szükséges minden $n = 1, 2, \dots, M$ módusra és minden $s = 1, 2, \dots, D$ megfigyelési pontra. Ez tehát $M \times D$ számú ismeretlen meghatározása. Írjunk fel a (24) egyenlet alapján $M \times D$ független egyenletet úgy, hogy kifejezzük a mért átviteli függvényeket minden egyes megfigyelési pontban és minden ω_m sajátfrekvencián:

$$\hat{h}_{sq}(\omega_m) = \sum_{n=1}^M \frac{\varphi_{ns}\varphi_{nq}}{\omega_n^2 + j\omega_m 2\xi_n\omega_n - \omega_m^2}, \quad s = 1, \dots, D, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (25)$$

Az így felírt nemlineáris egyenletrendszer numerikus megoldásával meghatározhatók a módusalakok minden egyes megfigyelési pontban.

3.2. A mérés gyakorlata

A mérés során a lényegi számításokat (a sajátfrekvenciák és csillapítási tényezők becslése, illetve a módusalakok számítása) egy mérőszoftver végzi. A mi feladatunk az átviteli vektor kimérése.

3.2.1. A reciprocitási elv

Az átviteli vektor elemeinek $\hat{h}_{sq}(\omega) = \hat{u}_s(\omega)/\hat{f}_q(\omega)$ definíció szerinti mérése nehézkes. A definíció szerinti megvalósításhoz ugyanis egyszerre kell D számú rezgésérzékelőt helyezni a mérendő objektumra. Ennek gyakorlati korlátja lehet, hogy nem áll rendelkezésünkre D számú érzékelő, valamint mérés technikai korlátja, hogy a sok érzékelő együttes tömege lényegesen befolyásolja a vizsgált rendszer viselkedését. Reprodukálható gerjesztés esetén megoldható ugyan, hogy az átviteli vektort elemenként mérjük ki, vagyis egyetlen érzékelővel mérünk minden kijelölt pontban, ez a módszer azonban az érzékelők D -szeri felhelyezése és leszerelése miatt nem praktikus.

Ezért az átvitel vektor meghatározásakor kihasználjuk a reciprocitási elvet, ami

$$\hat{h}_{sq}(\omega) = \frac{\hat{u}_s(\omega)}{\hat{f}_q(\omega)} = \frac{\hat{u}_q(\omega)}{\hat{f}_s(\omega)} = \hat{h}_{qs}(\omega) \quad (26)$$

alakban fogalmazható meg (lásd a (24) egyenletet). Szavakban: a q -adik pontban gerjesztett rendszer s -edik pontban mérhető válasza megegyezik az s -edik pontban gerjesztett rendszer q -adik pontban mérhető válaszával. Megtehetjük tehát, hogy a rendszer rezgését egyetlen pontban mérjük, és a reprodukálható gerjesztést mozgatjuk pontról pontra.

3.2.2. A mérendő objektum és a mérőműszerek

A mérendő objektum egy sík fémlemez, melynek a síkra merőlegesen rezgéseit vizsgáljuk. A mérés során a fémlmezt tökéletesen befogatlan állapotában természetesen nem tudjuk vizsgálni, a lemezt rugalmasan alá kell támasztanunk, fel kell függeszteniünk, ezek a beavatkozások a rendszer kisméretű válaszát befolyásolják leginkább.

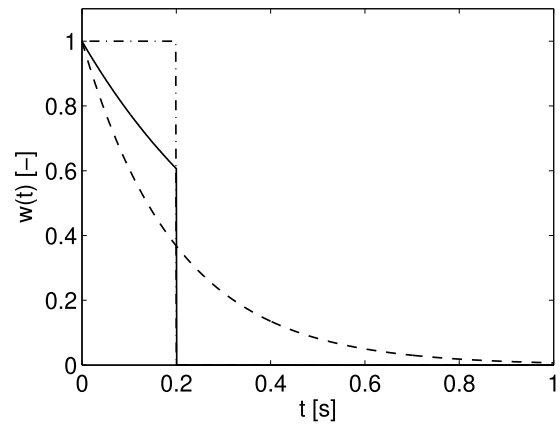
A gerjesztéssel szemben támasztott követelmény, hogy a számunkra fontos frekvenciatartományban viszonylag egyenletes erőt produkáljon. Kézenfekvő az impulzusszerű erőgerjesztés alkalmazása, amit impulzuskalapáccsal (*impact hammer*) tudunk előállítani. Az impulzuskalapács olyan mérőműszer, melynek fejébe piezo elven működő erőérzékelő cella van beépítve. Ez a cella méri a kalapács fején megjelenő erőt, ami fontos a $\hat{h}_{sq}(\omega)$ átviteli függvény méréséhez. A kalapács legfontosabb paraméterei:

- A mérőfej érzékenysége [mV/N]
- A használható frekvenciatartomány, ami egyrészt a kalapács és a gerjesztett rendszer együttes tömegétől és merevségétől függ, másrészt az erőérzékelő frekvenciamenetétől.
- Az erőimpulzus elérhető nagysága, amit leginkább a kalapácsfej tömegének változtatásával (póttömeg felhelyezésével) tudunk befolyásolni.

A rendszer rezgésválaszát piezo elven működő gyorsulásérzékelővel mérjük. A gyorsulásérzékelő legfontosabb tulajdonságai:

- A mérőfej érzékenysége [mV/g]. Kis érzékenységgű műszerrel rossz a mérés jel-zaj viszonya, nagy érzékenységgű műszert könnyű túlvezérelni.
- A használható frekvenciatartomány, ami az erőérzékelő frekvenciamenetétől függ.
- A felhelyezés módja: Lehet ragasztani kellően nagy szilárdságú kötőanyaggal, mágnesesen rögzíteni vagy mechanikusan felcsavarozni.
- Az érzékelő tömege: célszerűen legyen jóval kisebb, mint a mért objektum tömege.

A piezo elven működő eszközök az erőből/gyorsulásból nem közvetlenül feszültséget, hanem töltést állítanak elő. A töltést egy töltéserősítővel kell feszültséggé alakítani. A töltéserősítőt rendszerint a jó



6. ábra. A mérés során használt ablakfüggvények: Erőablak (folytonos vonal), exponenciális erőablak (pontosított vonal), exponenciális ablak (szaggatott vonal)

jel-zaj viszony érdekében beépítik a mérőfejbe, ez az ICP (*Integrated Circuit Piezo*) mérőműszerek jellemzője. Fontos, hogy az ICP eszközök számára biztosítani kell a 2–20 mA nagyságú egyenáramú táplálást. Ennél még fontosabb, hogy az érzékelők felhelyezésekor vagy leszerelésekor az erősítő elektronikájának védelme érdekében meg kell szüntetni a táplálást!

3.2.3. A mérés jelfeldolgozási vonatkozásai

A mérés során a mérőműszerek az $f(t)$ erőgerjesztés és $a(t)$ gyorsulás válaszjelek időbeli lefutását mérik, majd az $\hat{f}(\omega)$ és $\hat{a}(\omega)$ spektrumokat az időjelek mintái alapján gyors Fourier-transzformáció (FFT) segítségével számítják. Az időjelek mintáinak távolsága, a mintaszám, a mérési időtartam, a spektrumvonalak távolsága és a legnagyobb mérhető frekvencia közötti összefüggéseket ismertnek feltételezzük.

A Fourier-transzformáció végrehajtása előtt érdemes ablakozni az időfüggvényeket. Az impulzusszerű gerjesztés esetében két fajta ablak használata között választhatunk (6. ábra):

- Az erőablak egy speciális négyszögablak, amely az impulzusszerű erőjel megszűnése után hirtelen vág. Ezzel azt éri el, hogy a kalapácsfejen levő olyan rezgéseket (többnyire zajok), amik nem jelennek meg a vizsgált lemezen is, nem veszi figyelembe az átviteli függvény számításakor. Figyelem! Az erőablak természetesen azt is biztosítja, hogy azokat az erőimpulzusokat, amik a vágás után gerjesztik a lemezt (dupla ütések), nem veszi figyelembe az átviteli függvények számításakor. Ezért az erőablak csak akkor alkalmazandó, ha egészen biztosak vagyunk benne, hogy egyedülálló impulzusokat tudunk ütni.
- Az exponenciális erőablak annyiban tér el az erőablaktól, hogy a vágás előtt nem egyenletes, hanem exponenciálisan csökkenő amplitúdójú.

A válasz mérésekor az exponenciális ablak használata célszerű. Ez olyan ablakfüggvény, ami a mérési idő alatt egységnyi értékről exponenciálisan gyakorlatilag nullára csökken. Az ablak alkalmazása ismert többletcillapítást visz a mérőrendszerbe. Ez akkor célszerű, ha a mért

jel természetes lecsengése lényegesen hosszabb a mérési időnél. A többletszillapítás a mért módusok szillapítási tényezőjét befolyásolja ugyan, de mivel a többletszillapítás mértéke ismert, utólag lehet korrigálni vele.

A mérés jel-zaj viszonyának növelése érdekében minden átviteli függvényt többször mérünk, és a méréseket átlagoljuk.

4. Ellenőrző kérdések

- Mi a mechanikai rendszer módusa? Mi a módusalak és sajátfrekvencia fogalma?
- Milyen fontos (lineáris algebrai) tulajdonságai vannak a módusalakoknak?
- Hogyan értelmezzük a módusalakok ortonormalitását?
- Mit értünk az alatt, hogy a módusok csatolatlanok?
- A rendszermatrixok mely tulajdonsága biztosítja, hogy a sajátfrekvenciák pozitív valósak, a módusalakok pedig ortogonálisak?
- Mit mond ki a reciprocitási elv? Hogyan alkalmazzuk a kísérleti móduselemzésnél?
- Hogyan dönthető el, hogy egy mechanikai rendszernek egy adott rezgésalak módusalakja vagy sem (a rendszermatrixok ismeretében)?
- Hogyan lehet meghatározni egy módusalak sajátfrekvenciáját (a rendszermatrixok ismeretében)?
- Mire használjuk az exponenciális, az erő- és az exponenciális erőablakot?
- Mit mond ki a Rubin-kritérium?

5. Mérési feladatok

A mérés során egy acélrúd módusait vesszük fel különböző peremfeltételek mellett. Elméleti megfontolásokkal megtervezzük a rúdra rögzített rezgésérzékelő pozícióját és a kalapácsgerjesztések pozícióját. Az impulzusválaszméréseket követően felvesszük a rendszer módusait és értelmezzük azokat.

A felvett sajátfrekvenciák és szillapítási tényezők alapján szimuláld az acélrúd lesugárzott hangját a

$$p(t) = \sum_{n=1}^D U_n \cos(\omega_n t) e^{-t/\tau_n} \quad (27)$$

alakban, ahol $U_n = 1/n$.