

Akusztikai térszámítás a peremelem-módszerrel

A mérési leírást kidolgozta: Rucz Péter

Mérési leírás
Akusztika és hangtechnika laboratórium

1. Bevezetés

Jelen mérés célja a számítógépes akusztikai térszámítás alapfogalmainak illetve egy, a gyakorlatban is sokszor alkalmazott számítási módszernek, a peremelem módszernek a megismertetése. Célunk, hogy az alapvető összefüggések áttekintése után képesek legyünk a technikát valódi problémákra alkalmazni és a számítás eredményeit műszaki szempontokból értékelni, azokból következtetéseket levonni.

2. A térszámítás feladata

Az „Akusztika” c. tantárgyban láttuk, hogy a hanghullámok terjedését a hullámegyenlet írja le. A hullámegyenlet megoldását azonban általános esetben nem tudjuk zárt alakban megadni, az analitikus (az egyenletet hibamentesen kielégítő) megoldást csak igen korlátozott esetekben (egyszerű geometria, homogén anyagjellemzők feltételezése esetén) tudjuk megadni.

A numerikus térszámítás célja, hogy közelítő megoldást találjunk olyan problémákra, melyek analitikus („pontos”) megoldását nem tudjuk meghatározni. Numerikus számítások esetén mindig egy konkrét problémát oldunk meg, vagyis rögzített geometria, anyagjellemzők és peremfeltételek mellett jóldefiniált problémák megoldását keressük. A megoldandó parciális differenciálegyenlet és a hozzá tartozó peremfeltételek összességét peremértékfeladatnak (*boundary value problem*, BVP) nevezzük.

A közelítés egyik kulcsfontosságú eleme a probléma diszkretizálása, ami a folytonos mennyiségek (pl. a megoldási tartomány és az akusztikai térjellemzők – hangnyomás, részecskesebesség, stb.) véges számú paraméterrel való reprezentálását jelenti. A diszkrét reprezentáció segítségével a differenciálegyenletet algebrai egyenletrendszerre alakítjuk át. A számítás során kihasználjuk a modern számítógépek adta számítási kapacitást, mellyel pl. sokezer ismeretlen tartalmú egyenletrendszereket is meg tudunk oldani.

Mivel közelítő megoldást keresünk, fontos szem előtt tartani, hogy milyen elvárásokat támaszthatunk a közelítés hibájával szemben. Lényeges látni, hogy a hibának több forrása is van. Először is az alkalmazott fizikai modell érvényességi tartományát kell figyelembe vennünk, hogy lássuk, a modell megfelelő-e a jelenségek leírására. Például az akusztikai hullámegyenlet levezetésekor feltételezzük, hogy a hangnyomás amplitúdója több nagyságrenddel kisebb a statikus légnyomásnál. Nagyon nagy amplitúdók esetén a lineáris feltételezés nem lesz igaz, olyan modellt kell választanunk, ami a nemlinearitásokat

is képes kezelni. A fizikai modell valóságtól való eltéréseit modellhibának (*model error*) nevezhetjük. Másodszor, a számítás során hibák származhatnak abból, hogy bizonyos fizikai jellemzőket nem tudunk pontosan megmérni, vagy az ismert jellemzőket a számítógépes modellbe nem tudjuk pontosan beépíteni. Például szokás közelítés, hogy bizonyos felületeket akusztikailag tökéletesen merevnek feltételezzük, holott a valóságnak jobban megfelelne egy nagy, de véges impedanciájú felület. Az ilyen közelítésekből adódó hibákat bemeneti vagy *a priori* hibáknak szokás nevezni. Végül a diszkretizálás és a számítógépes megoldás is további hibát jelentenek, a számítás végeredményének hibáját kimeneti hibának nevezzük. A számítási eset (az adott módszer adott geometria és fizikai paraméterek mellett) jól kondicionált, ha a diszkrét modell és annak megoldása kicsiny bemeneti hiba esetén szintén kicsiny kimeneti hibát eredményez.

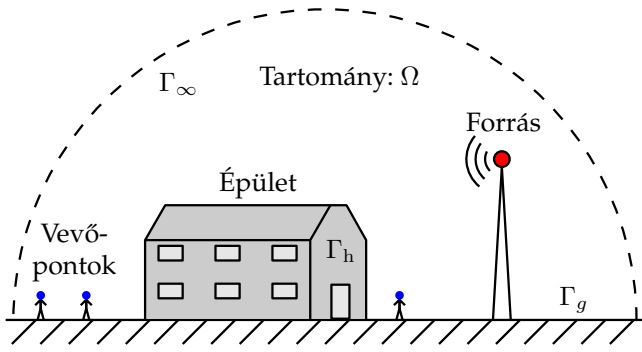
A fenti megállapítások általánosságban is igazak a számítógépes szimulációs eljárásokra. Az akusztikai térszámításhoz változatos eszközöket, módszereket használhatunk fel, ezek közül a legismertebbek a végeselem- (*finite element*), peremelem-módszerek (*boundary element*), illetve a véges differenciák (*finite difference*) módszere, de pl. sugárkövetést (*ray tracing*) vagy energiaalapú-módszereket (pl. *statistic energy analysis*) is alkalmaznak a gyakorlatban. Természetesen a megoldandó problémát figyelembe véve tudjuk kiválasztani a megfelelő számítási módszert. A következőkben egy, a gyakorlatban is gyakran alkalmazott módszert, a peremelem-módszert (*boundary element method*, BEM) fogunk részletesebben megvizsgálni.

3. Az integrálegyenletek módszere

3.1. A probléma megadása

A módszer részletes tárgyalása előtt tekintsük át, hogy mit várunk egy akusztikai térszámítási probléma numerikus megoldásától: milyen feltételezésekből indulunk ki és milyen fizikai jellemzőket kell megadnunk a számítás elvégzéséhez. Ehhez vegyünk a az 1. ábrán szemléltetett példaproblémát. Ebben az esetben arra vagyunk kíváncsiak, hogy a lakossági riasztórendszer szirénája által le-sugárzott hang mekkora hangnyomásszinten hallható a házak környezetében. (Ilyen riasztórendszereket pl. vegyi üzemek környezetében szoktak telepíteni, hogy a lakosságot gyorsan lehessen értesíteni egy esetleges baleset bekövetkezéséről.)

A probléma matematikai definícióját a következőképp adjuk meg. Az Ω számítási tartományunk a talaj feletti félvégtelen tér, melyből az épületeket (pl. az ábrán látható



1. ábra. Példaarendezés akusztikai térszámítási feladathoz.

házat) és esetleges egyéb akadályokat kivágjuk. A tartományon belül a hanghullámok terjedését a hullámegyenlet írja le, melyet a frekvenciatartományban fogunk megoldani. A számítási tartomány Γ peremét (*boundary*), egyrészt a Γ_g perem, másrészt a ház Γ_h felülete, harmadrészt a Γ_∞ szaggatott vonallal jelzett végtelen távoli képzeletbeli felület. A perem egyes részein különféle *peremfeltételeket* (*boundary condition*) kell megadnunk. Például a házat és a földfelszín tekintetjük tökéletes visszaverőnek, míg a Γ_∞ peremről azt feltételezzük, hogy visszaverődésmentesen ereszti át a tartományból érkező hanghullámokat. Fontos, hogy ahhoz, hogy jóldefiniált (*well-defined*) problémát kapjunk, a teljes $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h \cup \Gamma_\infty$ peremen ismernünk kell a peremfeltételt. Mivel a hangterjedés Ω tartománya nyílt, *kültéri* problémával (lásd majd a 3.5. szakaszt) állunk szemben.

A forrást az ábrán pirossal jelölt sziréna mutatja, melyet monopólus sugárzóznak tekintünk. A számítás során a kékkel jelölt vevőpontokban határozzuk meg a p hangnyomást különböző frekvenciákon, melyből végül hangnyomásszintet számítunk. A megoldandó peremértékfeladatot tehát az Ω tartományra felírt, forrásokot is tartalmazó Helmholtz-egyenlet és a Γ peremen megadott peremfeltételek definiálják. Azt, hogy a probléma megoldásához numerikus számítást alkalmazunk (*közéltítő* megoldást szeretnénk kapni), az indokolja, hogy a szabálytalan alakú és elhelyezkedésű objektumokról a sziréna hangja többszörösen is visszaverődhet, így pl. az épület árnyékoló hatása erősen frekvenciafüggő lesz.

Az ebben a szakaszban tárgyalt levezetés eredményeként azt fogjuk látni, hogy a p hangnyomás a tartomány tetszőleges pontjában megkapható a tartományban elhelyezett források és a tartomány peremén megadott illetve kiszámítandó hangnyomás és annak normális irányú deriváltja ismeretében. A 4. szakasz pedig azt mutatja be, hogy a perem diszkretizálásával hogyan kapjuk meg a közéltítő megoldást.

3.2. A szabadtéri Green-függvény

Az \mathcal{L} lineáris operátorral jellemzett parciális differenciálegyenlet (*partial differential equation*, PDE) szabadtéri Green-függvényének (*free field Green's function*) azt az $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ függvényt nevezzük, mely kielégíti az

$$\mathcal{L}\{F(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\} = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad \mathbf{x} \in \Omega = \mathbb{R}^d \quad (1)$$

egyenletet. Figyeljük meg, hogy az (1) definícióban az Ω tartomány a teljes d -dimenziós tér, azaz a tartománynak

nincsenek peremei. Ez alapján láthatjuk, hogy az $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ függvény az \mathbf{x}_0 pontban elhelyezett, egységnyi erősségű pontforrásnak a végtelen, szabad tér \mathbf{x} pontjában keltett tere. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a szabadtéri Green-függvény a PDE *térbeli impulzusválasza*, melyet alapmegoldásnak (*fundamental solution*) is szokás nevezni.

Az alapmegoldás jelentősége, hogy a

$$\mathcal{L}\{u(\mathbf{x})\} = -g(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad (2)$$

probléma megoldását a jobb oldali $g(\mathbf{x})$ forrástag és az alapmegoldás térbeli konvolúciójaként kapjuk:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} F(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)g(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0. \quad (3)$$

Figyeljük meg, hogy ez az állítás ekvivalens a lineáris rendszerek elméletéből megismert összefüggéssel, miszerint adott (időbeli) gerjesztésre a rendszer válaszát az impulzusválasz (súlyfüggvény) és a gerjesztőjel időbeli konvolúciójaként kapjuk.

Az analógiát folytatva további tulajdonságokat ismerhetünk fel. A rendszer időbeli invarianciájának a térbeli eltolásinvariancia felel meg: vagyis az \mathbf{x}_0 gerjesztőpozíciót tetszőleges \mathbf{d} vektorral $\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}$ -be eltolva az eredetivel azonos választ kapunk az $\mathbf{x} + \mathbf{d}$ eltoló pontban. Az eltolásinvariancia feltétele, hogy az \mathcal{L} operátorban szereplő fizikai mennyiségek helyfüggetlenek legyenek. Ebben az esetben az F alapmegoldás $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = F(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ egyváltozós alakban írható.

A következőkben az akusztikai (skalár) Helmholtz-egyenlettel (a hullámegyenlet frekvenciatartományban felírt alakjával) fogunk foglalkozni, vizsgálatainkat pedig a háromdimenziós esetre korlátozzuk:

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}) + k^2 p(\mathbf{x}) = -g(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3, \quad (4)$$

ahol p a hangnyomás komplex csúcserőértéke az adott ω körfrekvencián,¹ $k = \omega/c$ pedig a hullámszám, c a hangsebességet jelöli, melyről azt feltételezzük, hogy az Ω tartományon belül állandó. Az egyenlet jobb oldalán $g(\mathbf{x})$ tetszőleges, térben elosztott forrástagot jelöl. Operátorjelöléssel a (4) bal oldalát $\mathcal{H}\{p(\mathbf{x})\}$ módon írhatjuk, bevezetve a $\mathcal{H} = \nabla^2 + k^2$ Helmholtz-operátort. A Helmholtz-operátor természetesen lineáris, illetve a fenti feltételezésekkel konstans együtthatójú.

A Helmholtz-egyenlet háromdimenziós alapmegoldása (szabadtéri Green-függvénye):

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|, \quad (5)$$

amely az \mathbf{x}_0 helyzetű harmonikus monopólus hangforrás \mathbf{x} pontba lesugárzott hangtere. Megfigyelhetjük, hogy az alak teljesíti az eltolásinvarianciát, továbbá a $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ reciproktulajdonságot is. Utóbbi azt fejezi ki, hogy a forrás (\mathbf{x}_0 pozíció) és a vevő (\mathbf{x} pozíció) szerepe felcserélhető.

Érdeemes megjegyezni, hogy Green-függvényt nemcsak a szabad térben definiálhatunk, hanem tetszőleges peremfeltételek mellett is. Általános peremfeltételhez a Green-függvény megtalálása az eredeti peremértékfeladat megoldásával azonos bonyolultságú feladat. Speciális esetekben pl. feltér-problémák esetén a tükörfor-

¹Itt és a továbbiakban $e^{j\omega t}$ alakú időfüggést feltételezünk.

rások módszerét alkalmazhatjuk a Green-függvény előállítására. A peremelem-módszer levezetéséhez azonban elegendő a szabadtéri Green-függvény használunk.

3.3. A peremérték-feladat gyenge alakja

A peremérték-feladat gyenge alakjának előállításához vegyünk egy *tetszőlegesen megválasztott* $\psi(\mathbf{x})$ tesztfüggvényt, mellyel szorozzuk be a PDE-t és integráljuk a teljes Ω tartományon:

$$\int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) [\nabla^2 p(\mathbf{x}) + k^2 p(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] d\mathbf{x} = 0. \quad (6)$$

A (6) bal oldalán a szögletes zárójelben szereplő tagot maradéktagnak (*residual*) nevezzük, mivel ha a $p(\mathbf{x})$ megoldásfüggvény nem elégíti ki hibátlanul a (4) egyenletet, ez a tag bizonyos \mathbf{x} pozíciókban zérustól különböző lesz. A (6) egyenletben a $\psi(\mathbf{x})$ tesztfüggvény a maradékot súlyozza, így az integrált súlyozott maradéknak (*weighted residual*) nevezzük. A (6) akkor és csak akkor teljesül tetszőlegesen megválasztott $\psi(\mathbf{x})$ tesztfüggvény mellett, ha a $p(\mathbf{x})$ függvény hibátlanul kielégíti a (4) Helmholtz-egyenletet.²

A további átalakítások előtt rendezzük át a (6) egyenletet a következő alakba:

$$\int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) \nabla^2 p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) k^2 p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (7)$$

A bal oldalon szereplő első integrált (kétszeres) parciális integrálással a következő formába alakíthatjuk (a függvények \mathbf{x} argumentumát a rövidség végett elhagyva):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi \nabla^2 p d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\psi \nabla p) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla p d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\psi \nabla p) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla \psi p) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla^2 \psi p d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (8)$$

A Gauss–Ostrogradszkij-tétellel az $\int_{\Omega} \nabla \cdot (\dots) d\mathbf{x}$ alakú térfogati integrálokat $\int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\dots) d\mathbf{x}$ alakú felületi integrálokká alakítjuk, melyeket visszahelyettesítve a (7) egyenletbe kapjuk a gyenge alakot:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{x}) \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial n} d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial n} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} \underbrace{[\nabla^2 \psi(\mathbf{x}) + k^2 \psi(\mathbf{x})]}_{\mathcal{H}\{\psi(\mathbf{x})\}} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (9)$$

Az Ω tartomány peremét Γ jelöli.³ A $\partial/\partial n$ a normális irányú deriváltat jelöli, melyet a gradiens és a felület normális irányba mutató vektorának ($\mathbf{n}(\mathbf{x})$ vektor) skaláris szorzataként kapunk.

Figyeljük meg, hogy a parciális integrálások elvégzése után a \mathcal{H} Helmholtz-operátor a (9) egyenletben már

²Ezt könnyen beláthatjuk azzal a megfontolással, ha pl. a $\psi(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ tesztfüggvényt helyettesítjük be, úgy a (6) integrál a (4) egyenlet \mathbf{y} pontban adódó hibáját adja.

³Gyakran találkozhatunk a perem $\partial\Omega$ módú jelölésével is.

nem a $p(\mathbf{x})$ megoldásfüggvényre, hanem a $\psi(\mathbf{x})$ tesztfüggvényre hat. Vegyük észre azt is, hogy az eredeti (4) egyenlettel szemben a gyenge alak az Ω tartományon belül nem tartalmazza a $p(\mathbf{x})$ függvény deriváltjait, vagyis a $p(\mathbf{x})$ megoldásfüggvénnyel szemben gyengébb differenciálhatósági feltételeket ír elő az eredeti egyenletnél. Innen a „gyenge alak” (*weak form*) elnevezés. Ugyanakkor a $\psi(\mathbf{x})$ tesztfüggvényre a kiindulásnál (ti. tetszőleges függvény) erősebb differenciálhatósági feltételek vonatkoznak.

A (9) gyenge alak tovább egyszerűsíthető lehet a peremfeltételek érvényesítésével. Például egyes visszavert felületeket tökéletesen merevnek tekinthetünk. Ekkor a peremen a részecskesebesség illetve az Euler-egyenlet következtében a nyomás normális irányú deriváltja is zérus, mellyel az első peremintegrál elhagyható lesz.

3.4. Peremintegrál-reprezentáció

Alkalmazzuk a $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ szabadtéri Green-függvényt tesztfüggvényként a (9) gyenge alakban!

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial n} d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial n} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} \underbrace{\mathcal{H}\{G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\}}_{-\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (10)$$

Az (1) definíció szerint a bal oldal utolsó tagjában az alapmegoldásra ható \mathcal{H} operátort a $-\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ függvényre cserélhetjük, amivel a térfogati integrált elhagyhatjuk. Átrendezés után kapjuk:

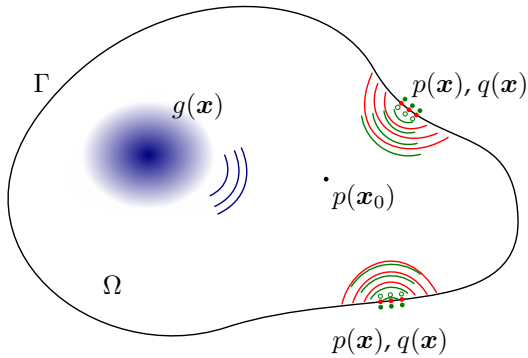
$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial n} d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial n} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{x}_0) p(\mathbf{x}_0), \end{aligned} \quad (11)$$

ahol α értéke az \mathbf{x}_0 pont helyzetétől függ:

$$\alpha(\mathbf{x}_0) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \mathbf{x}_0 \in \Omega, \\ 1/2 & \text{ha } \mathbf{x}_0 \in \Gamma, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (12)$$

A peremen adódó $1/2$ értéket akkor kapjuk, ha a Γ felület az \mathbf{x}_0 pontban sima. Ekkor – kissé elnagyoltan fogalmazva – a felület a rá eső Dirac-impulzust az integrálás során „elfelezi”. Ha az \mathbf{x}_0 pont élre vagy sarokra esik, akkor α értékét az integrálási tartományba eső és a teljes térszög hányadosaként kapjuk. A továbbiakban minden esetben sima felületen helyezzük el az \mathbf{x}_0 pontokat.

A (11) egyenlet fizikai értelmezéséhez használjuk fel a $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ reciprok tulajdonságot, illetve elsőként tételezzük fel, hogy az \mathbf{x}_0 pont az Ω tartományon belül helyezkedik el. Ekkor a (11) a $p(\mathbf{x}_0)$ hangnyomást a 2. ábrán látható módon reprezentálja. A teljes $p(\mathbf{x}_0)$ hangnyomás előáll a források által, a perem figyelembe vétele nélkül kapott lesugárzott térből, illetve a peremről visszavert hangnyomásból. Előbbit beeső (*incident*), utóbbit pedig visszaszórt (*scattered*) térnek nevezzük. Érdeemes megfigyelni, hogy a visszaszórt tér két részből áll.



2. ábra. A peremintegrál-reprezentáció fizikai értelmezése. A késsel jelzett $g(\mathbf{x})$ tag az Ω térrészben elhelyezkedő (elosztott) forrásokat jelöli.

Egyrészt a (11) első peremintegrálja a peremen elosztott monopólus forráseloszlás terét adja meg, ahol a monopólusok erőssége a hangnyomás normális irányú deriváltjával arányos: $q(\mathbf{x}) = \partial p(\mathbf{x})/\partial n$. Felhasználva a

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -j\omega\rho_0 v_n \quad (13)$$

(linearizált) Euler-egyenletet, láthatjuk, hogy a normális derivált a felületen a normális irányú rezgésyorsulással arányos. A monopóluskontribúciókat a 2. ábrán piros szín jelöli.

Másrészt, a (11) második peremintegrálja a felületen elosztott dipólforrások terét adja meg. Emlékezzünk vissza, hogy míg a G függvény monopólus terét, addig a $\partial G/\partial n$ függvény az \mathbf{n} tengelyirányú dipólus terét adja meg. A dipólforrások erősségét pedig a felületi $p(\mathbf{x})$ hangnyomáseloszlás határozza meg. A 2. ábrán a dipóluskontribúciókat zöld szín szemlélteti.

Összefoglalva a fentieket, a teljes hangnyomástér (p_{tot}) a beeső (p_{inc}) és visszaszórt (p_{scat}) hangnyomásterek szuperpozíciójaként adódik:

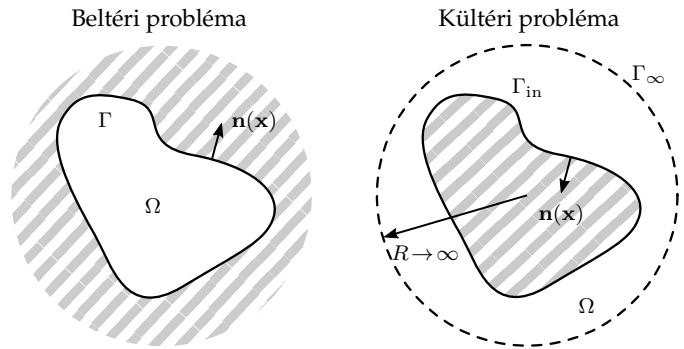
$$p_{\text{tot}}(\mathbf{x}_0) = p_{\text{inc}}(\mathbf{x}_0) + p_{\text{scat}}(\mathbf{x}_0) \quad \mathbf{x}_0 \in \Omega \cup \Gamma, \quad (14)$$

ahol p_{inc} a (11) egyenlet térfogati integrálja, míg p_{scat} a két felületi integrál kiértékelésével adódik. E megfontolások alapján a (11) egyenletet *peremintegrál-reprezentációnak* (*boundary integral representation*, BIR) szokás nevezni. Láthatjuk, hogy a reprezentáció értelmében az Ω tartomány tetszőleges pontjában meghatározhatjuk a $p(\mathbf{x}_0)$ hangnyomást, amennyiben $g(\mathbf{x})$ forráseloszlást ismerjük az Ω tartományon, a peremen pedig $p(\mathbf{x})$ és $q(\mathbf{x})$ is ismertek.

3.5. A Sommerfeld-féle sugárzási feltétel

A 3. ábra két lehetséges elrendezést, a *beltéri* (*interior*) és *kültéri* (*exterior*) problémák esetét mutatja be. Az eddig is használt jelöléssel élve az Ω számítási tartományt mindkét ábrarészen a fehér tartomány jelöli, míg a sávozott térrészek a számítási tartományon kívül esnek. Kültéri probléma esetén úgy gondolkozhatunk, hogy az Ω tartomány Γ pereme két részből áll, a Γ_{in} belső peremből és a Γ_{∞} külső peremből, melyet pl. olyan gömbfelületnek feltételezhetünk, melynek R sugara a végtelenhez tart. Így kültéri probléma esetén a (11) reprezentáció felületi integráljait a $\Gamma = \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\infty}$ felületen kell kiértékelni.

A Sommerfeld-féle sugárzási feltétel azt mondja ki, hogy a Γ_{∞} felületről vett integrál elhagyható, mivel a



3. ábra. Bel- és kültéri problémák szemléltetése.

végtelen távoli felületről visszaszórt teljesítmény zérus. Képlettel megfogalmazva

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\infty}} \left(G \frac{\partial p}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n} p \right) d\mathbf{x} = 0. \quad (15)$$

A sugárzási feltétel kövekezményeképp a Γ_{∞} peremet elhagyhatjuk, az integrálszámítást elegendő a Γ_{in} felületen elvégeznünk. Ennek következtében a peremintegrálokra épülő, alább bemutatott peremelem-módszer közvetlenül képes kezelni kültéri (nyitott tartományon) értelmezett problémákat, mely egyéb térszámítási módszerek (pl. végeelem vagy véges differenciák) esetén általában komoly kihívásokat jelent. A peremelem-módszer egyik legnagyobb előnye a kültéri problémák megoldásának közvetlen lehetősége.

3.6. Lesugárzás, visszaverődés

A fenti peremintegrál-reprezentáció segítségével kiszámíthatjuk egy sugárzó objektum (pl. hangszóró vagy éppen rezgésben lévő hangszertest) által lesugárzott hangnyomástérét. Az ilyen jellegű feladatot *lesugárzási* (*radiation*) problémának nevezhetjük.

A (14) szuperpozíció kihasználásával a BIR-t visszaverődési (*scattering*) problémák számítására is alkalmazhatjuk a következő módon. Az egyszerűség kedvéért vegyük azt a gyakori esetet, amikor egy akusztikailag tökéletesen merevnek feltételezett objektumról visszaverődő hangteret kell kiszámítanunk. Ekkor a források beeső v_{inc} részecskesebesség-terét értékeljük ki a visszaverő Γ felületen, majd a (14) szuperpozíciót a részecskesebességre alkalmazva és a felület tökéletes merevségét (a felületen a teljes, normális irányú $v_{n,\text{tot}}$ részecskesebesség zérus) kihasználva:

$$v_{n,\text{scat}}(\mathbf{x}_0) = -v_{n,\text{inc}}(\mathbf{x}_0) \quad \mathbf{x}_0 \in \Gamma. \quad (16)$$

Ezután a felület által visszaszórt p_{scat} hangnyomástér az Ω tartomány bármely \mathbf{x}_0 pontjában a peremintegrál-reprezentáció alkalmazásával adódik. Végül a teljes p_{tot} hangnyomástérét a (14) ismételt alkalmazásával kapjuk. E megfontolás előnye, hogy könnyen tudunk kezelni olyan releváns eseteket is, melyekben a $g(\mathbf{x})$ forrástérnek csak valamilyen modelljét ismerjük; tipikus példája ennek a síkhullámú beeső tér.

3.7. Peremintegrál-egyenlet

A (11) peremintegrál-reprezentáció alkalmazásával a tér tetszőleges \mathbf{x}_0 pontjában meghatározhatjuk a $p(\mathbf{x}_0)$ hang-

nyomást, amennyiben a teljes Γ peremen ismerjük mind a hangnyomást, mind annak normális irányú deriváltját (vagyis a normális irányú részecske sebességet vagy gyorsulást). A probléma megadásakor azonban legtöbbször nem adott a peremen mindkét mennyiség.

Általános esetben a peremen vagy a hangnyomást (Dirichlet-peremfeltétel) vagy a részecske sebességet (Neumann-feltétel), esetleg a két mennyiség lineáris kombinációját (Robin-feltétel) ismerjük. A perem egyes részein más-más peremfeltételek is érvényesülhetnek, de ahhoz, hogy egyértelmű megoldást kapjunk, az egész peremre ismernünk kell a peremfeltételeket. Gyakran előforduló eset például, hogy egy rezgésben lévő tárgy által lesugárzott hangtérre vagyunk kíváncsiak; a peremfeltétel ekkor az objektum teljes felületén ismert részecske sebesség.⁴ Ekkor, mielőtt az Ω tartomány tetszőleges pontjában meghatározhatnánk a hangnyomást, a Γ felületen kell kiszámítanunk azt.

A peremfeltételekből ismeretlen felületi mennyiségek meghatározásához alkalmazzuk a (11) peremintegrál-reprezentációt az $x_0 \in \Gamma$ esetben:

$$\int_{\Gamma} G(x_0, \mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x_0, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} G(x_0, \mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{2} p(x_0), \quad x_0 \in \Gamma. \quad (17)$$

A (17) egyenletet *Kirchhoff–Helmholtz-integrálegyenletnek* (KHIE) nevezzük. Figyeljük meg, hogy mivel $x_0 \in \Gamma$, a peremintegrálok kiértékelése közvetlenül nem végezhető el. Amennyiben $p(x_0)$ ismeretlen, úgy a függvényérték az egyenlet jobb és bal oldalán is megjelenik. Ezért a (17) összefüggést *peremintegrál-egyenletnek* (*boundary integral equation*, BIE) nevezzük. Természetesen, ha $q(x_0)$ az ismeretlen, úgy a másik peremintegrál kiértékelése jelenti a nehézséget. A következő szakaszban tárgyalt peremelem-módszerrel a (17) közelítő megoldását határozzuk meg.

4. A peremelem-módszer

Az akusztikai peremelem-módszer (*boundary element method*, BEM) segítségével a (17) integrálegyenlet megoldásának illetve a (11) peremintegrál-reprezentáció kiértékelésének diszkretizált, közelítő módját kapjuk meg. A módszer bevezetéséhez az egyszerűség kedvéért a *homogén* Helmholtz-egyenletből indulunk ki, vagyis a $g(\mathbf{x}) \equiv 0$ esetet tekintjük. Gondoljuk meg, hogy az a feltételezés, miszerint az Ω tartományon belül zérus a $g(\mathbf{x})$ gerjesztő tag, nem jelenti azt, hogy nem keletkeznek hanghullámok, hiszen a Γ felület rezgése is hanglesugárzáshoz vezet.

4.1. Diszkretizáció

Numerikus térszámítás esetén diszkretizáció alatt általában két közelítés alkalmazását értjük. Először a geometriát diszkretizáljuk, ami a peremelem-módszer esetén a Γ perem *elemekre* (*elements*) való felbontását jelenti. A geometriai diszkretizáció célja, hogy a bonyolult felület felett

⁴A felületi rezgés sebességet sokszor mérésrel is meghatározhatjuk, lézeres sebességmérés vagy a felületen elhelyezett gyorsulásmérők alkalmazásával.

számítandó integrált helyettesítsük sok, de külön-külön egyszerű geometriával leírt integrál összegeként:

$$\int_{\Gamma} \dots d\mathbf{x} \approx \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} \dots d\mathbf{x}, \quad (18)$$

ahol E a geometriai háló (*mesh*) alkotó elemek számát jelöli, Γ_e pedig az e -edik felületelem. Természetesen az elemek nem fednek át (diszjunktak), csak az éleikkel és sarokpontjaikkal érintkeznek:

$$\Gamma \approx \bigcup_{e=1}^E \Gamma_e, \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset \quad \text{ha } i \neq j. \quad (19)$$

Figyeljük meg, hogy a felület elemekre való felosztása is már közelítést jelenthet, például domború felületrészeket sík elemekkel közelíthetünk.

Érdeemes megemlíteni, hogy a peremelem-módszerben csak a Γ felületet kell diszkretizálnunk, ellentétben pl. a végeselem- vagy a véges differencia-módszerrel, ahol a teljes Ω tartományt kell elemekre bontanunk. Gondoljuk meg, hogy ha a diszkretizálás finomságát kétszerezni szeretnénk, akkor a peremelemek számát négyszeresére, míg a térfogatelemek nyolcszorosára kell növelnünk. Így a módszer egyik előnyös tulajdonsága, hogy csak a perem diszkretizálását igényli.

A diszkretizáció másik lépése a Γ peremen értelmezett mennyiségek (vagyis a $p(\mathbf{x})$ és $q(\mathbf{x})$ függvények) diszkretizálása. Itt a lehető legegyszerűbb, a gyakorlatban viszont sokszor használt közelítést alkalmazzuk, miszerint a változóinkat a háló egyes elemei fölött konstans értékkel közelítjük,⁵ vagyis p_j és q_j a j -edik elem (a Γ_j felületen) rendre a $p(\mathbf{x})$ és $q(\mathbf{x})$ függvények közelítő értékei. Ezt a közelítést alkalmazva a (17) integrálegyenletben, $g(\mathbf{x}) = 0$ kihasználásával kapjuk:

$$\frac{1}{2} p(x_0) = \sum_{j=1}^E \int_{\Gamma_j} G(x_0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} q_j - \sum_{j=1}^E \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G(x_0, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\mathbf{x} p_j. \quad (20)$$

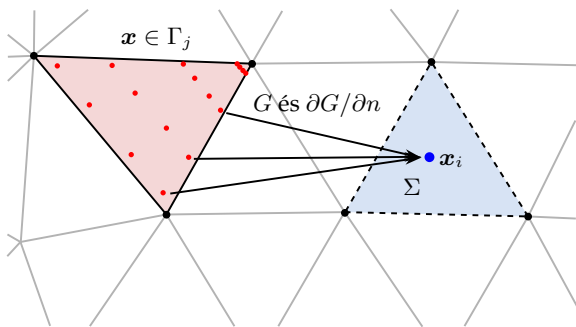
Figyeljük meg, hogy a q_j és p_j súlyok az integrálokon kívül szerepelnek, így az egyes elemek felett vett integrálok a súlyok meghatározása előtt is kiértékelhetők.

4.2. Kollokációmódszer

A diszkretizálás segítségével a folytonos függvények helyett a p_j vagy q_j súlyozótényezőket kell meghatároznunk. Az elemenként konstans közelítéssel az ismeretlenek száma az elemek E számával lesz megegyező, így legalább E darab független egyenletre van szükségünk az ismeretlen felületi súlyok kiszámításához.

A kollokációmódszer alkalmazásakor a (20) diszkretizált KHIE-t írjuk fel úgy, hogy az x_0 pozíciót az i -edik ($i = 1, 2, \dots, E$) felületelem középpontjának (x_i) választ-

⁵Ez a választás a $p(\mathbf{x})$ és $q(\mathbf{x})$ *alakfüggvények* (*shape functions*) lineáris kombinációjával való közelítésének speciális esete. Az alakfüggvények tipikusan egyszerű alakban felírható, csak szűk tartomány (egy vagy néhány szomszédos elem) felett nemzérus értékű függvények, pl. alacsony fokszámú polinomok. Itt olyan alakfüggvényeket használunk, melyek elemenként konstans értékűek.



4. ábra. A G_{ij} és H_{ij} mátrixelemek számításának szemléltetése.

juk:

$$\frac{1}{2}p_i = \sum_{j=1}^E \underbrace{\int_{\Gamma_j} G(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) d\mathbf{x}}_{G_{ij}} q_j - \sum_{j=1}^E \underbrace{\int_{\Gamma_j} \frac{\partial G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\mathbf{x}}_{H_{ij}} p_j. \quad (21)$$

Ehhez kihasználtuk, hogy $p_i = p(\mathbf{x}_i)$ az elemenként konstans alakfüggvényekkel. Végül, az $i = 1, 2, \dots, E$ egyenleteket mátrixalakba írhatjuk:

$$\frac{1}{2}\mathbf{p}_s = \mathbf{G}_s \mathbf{q}_s - \mathbf{H}_s \mathbf{p}_s, \quad (22)$$

ahol \mathbf{q}_s és \mathbf{p}_s (oszlop)vektorok a q_j és p_j változókat foglalják magukban, az s alsó index pedig a felületre (*surface*) utal. A peremfeltételektől függően a (22) felületi egyenletrendszert a \mathbf{q}_s vagy \mathbf{p}_s vektorra oldjuk meg.⁶

A (22) G_{ij} és H_{ij} mátrixelemeit az integrálok numerikus kiértékelésével kapjuk. Ehhez kvadratúra-szabályokat használunk fel, melyek az integrált a függvényt bizonyos alappontokban kiértékelve, majd a kapott függvényértékeket a megfelelően megválasztott súlyokkal összegezve közelítik az integrál értékét. Ezt szemlélteti a 4. ábra. A halvány pirossal jelölt j forráselemen a pirossal jelzett alappontok és a kékkel jelzett \mathbf{x}_i pont között kiértékeljük a Green-függvényt és annak normális irányú deriváltját, majd ezeket a megfelelő súlyokkal összegezve kapjuk a G_{ij} és H_{ij} elemeket. A számítást az összes (i, j) párra elvégezzük. Külön figyelemmel kezelendők a főátló elemei ($i = j$ eset), mivel az integrálandó függvények (G és $\partial G / \partial n$) $r = 0$ -ban szingulárisak.

Vizsgáljuk meg a \mathbf{G}_s és \mathbf{H}_s rendszermátrixok tulajdonságait. A peremelem-módszer mátrixai teli mátrixok, komplex értékűek és a kollokációmódszer alkalmazása esetén nem szimmetrikusak. Elemenként konstans alakfüggvények esetén mindkét felületi mátrix $E \times E$ típusú. A gyakorlatban a mátrixok méretét a rendelkezésre álló memória korlátozza. Duplapontosságú lebegőpontos számok⁷ tárolása esetén egyetlen komplex értékű mátrixelem 16 bájttárhelyet foglal, így pl. $E = 10\,000$ elem esetén a két mátrix tárolása összesen 3,2 GB memóriát igényel.

A (22) lineáris egyenletrendszert direkt vagy iteratív módszerekkel is megoldhatjuk. Nagy elemszám esetén az iteratív megoldás tipikusan gyorsabb lehet a direkt módszernél.

⁶Impedancia (Robin-) peremfeltétel esetén további átrendezés lehet szükséges.

⁷Lásd IEEE 754–2008 szabvány (*double precision, binary64*).

4.3. A lesugárzott tér számítása

Miután meghatároztuk a \mathbf{p}_s és \mathbf{q}_s felületi mennyiségeket, a (11) peremintegrál-reprezentációt alkalmazhatjuk az Ω tartomány tetszőleges pontjaira. Ezeket a kiértékelési pontokat *field point* néven szokás nevezni. Hasonlóan a felületi egyenletrendszerhez, a diszkrétizált egyenletrendszer a

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{G}_f \mathbf{q}_s - \mathbf{H}_f \mathbf{p}_s \quad (23)$$

formában adódik, ahol az f alsó index a *field*-re utal. Vegyük észre, hogy a (23) kiértékelése \mathbf{q}_s és \mathbf{p}_s ismeretében nem egyenletrendszer megoldását jelenti, a \mathbf{p}_f eredményt mátrix-vektor szorzatok kiértékelésével kapjuk.

A felületi egyenletrendszerhez hasonlóan numerikus integrálással kapjuk a \mathbf{G}_f és \mathbf{H}_f mátrixok elemeit, itt természetesen szinguláris eset nem fordul elő.

4.4. A számítás menete

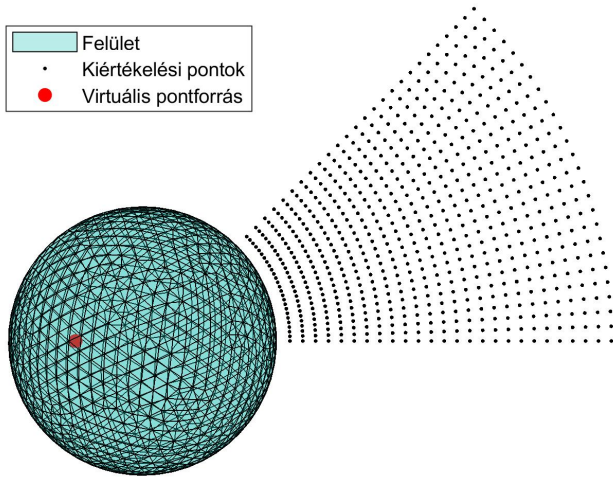
Foglaljuk össze a peremelem-számítás tipikus munkameutét.

1. Elsőként a diszkrétizált geometriát (*mesh*) állítjuk elő. A háló finomságát már aszerint választhatjuk meg, hogy milyen hullámhosszakon fogjuk majd a számítást elvégezni. Széles frekvenciatartomány esetén indokolt lehet kis frekvenciákon (nagy hullámhosszakon) durvább, nagy frekvenciákon (kis hullámhosszakon) pedig finomabb hálót használni.
2. Definiáljuk a probléma fizikai paramétereit (pl. ρ_0 átlagos sűrűség, c hangsebesség), a peremfeltételeket illetve a külső, előre ismert forrásokat.
3. Összeállítjuk a (22) egyenlet \mathbf{G}_s és \mathbf{H}_s mátrixait, majd megoldjuk a lineáris egyenletrendszert.
4. Kiszámítjuk a \mathbf{G}_f és \mathbf{H}_f mátrixok elemeit, majd pedig a (23) segítségével a kiértékelési pontokban kiszámítjuk a lesugárzott teret. Visszaverődési probléma esetén, a (14) alkalmazásával a külső források besző terét is kiértékeljük a p_{tot} teljes hangnyomástér előállításához.
5. Ha a vizsgálatot több frekvencián vagy különböző gerjesztések mellett is el kívánjuk végezni, úgy az előbbi 2–4. pontokat minden egyes gerjesztésre és frekvenciára megismételjük.
6. Értelmezzük az eredményeket. Egyértelműen hangzik, de a számítás egyik legfontosabb lépése a kapott eredmények helyes értelmezése, hiszen a számítást pontosan azért végeztük el, hogy információt kapjunk egy bonyolult probléma viselkedéséről. Szükség esetén az eredményeket utófeldolgozzuk (*post-processing*), például tercsávós szinteket, vagy lesugárzott zajteljesítményt értékelünk ki a számítási eredmények alapján.

5. Ellenőrző számítás

5.1. Transzparens probléma

Numerikus módszereink helyes működéséről általában olyan problémák kiszámításával győződhetünk meg, melyeknek létezik zárt alakú (analitikus) megoldása is. Ebben a részben egy ún. transzparens problémát vizsgálunk



5. ábra. Transzparens tesztp probléma elrendezése.

meg. A transzparenciát itt a geometriára értjük, vagyis a várt eredményünk a hálótól független lesz.

Külső problémát fogunk vizsgálni, a geometria pedig egységnyi ($R = 1$ m) sugarú gömbfelszín lesz. A gömb Γ felületére egy, a gömbön belül elhelyezkedő (virtuális) monopólus forrás terét írjuk elő, melyet Neumann-peremfeltétellel adunk meg. Vagyis, a gömbfelület normális irányú sebességét írjuk elő a felület minden pontjában. Ennek hatására a gömbfelületen (illetve a teljes Ω számítási tartományban) a hangnyomásnak az eredeti pontforrás által lesugárzott hangnyomástérrel kell meg egyeznie (a háló térbeli alakjától és felbontásától függetlenül). Az elrendezést az 5. ábra szemlélteti.

Az első számítást $f = 400$ Hz frekvencián végezzük el, a hangsebességet $c = 343$ m/s-nak vesszük, így $k = 2\pi f/c = 7,327$ rad/m hullámszám adódik. A peremelem-számításban a \mathbf{q}_s vektort adjuk meg. A \mathbf{G}_s és \mathbf{H}_s mátrixok összeállítása után a (22) egyenlet megoldásával kiszámítjuk a \mathbf{p}_s vektort. Ezután összeállítjuk a \mathbf{G}_f és \mathbf{H}_f mátrixokat, végül pedig a (23) kiértékelésével kapjuk a kiértékelési pontokban a hangnyomást, vagyis a \mathbf{p}_f vektort.

Az ellenőrzéshez a gömbfelületen és a kiértékelési pontokban az analitikus eredményhez hasonlítjuk a peremelem-számítás eredményét. Gyakran alkalmazott hibamérték a két eredmény relatív négyzetes eltérése, melyet a következő formában számítunk ki:

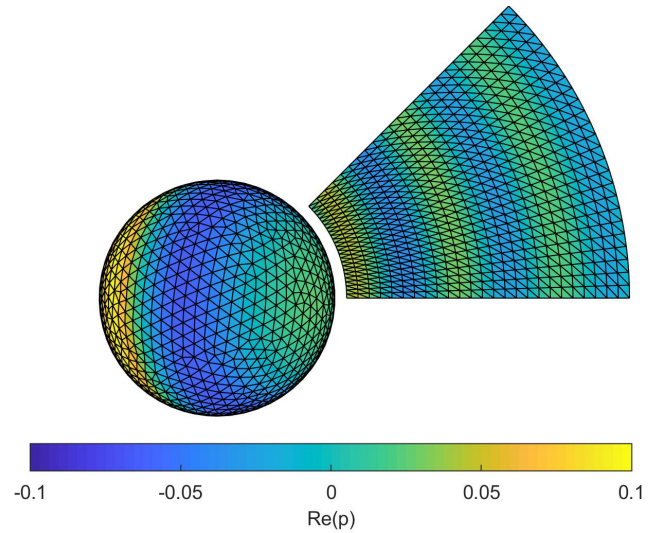
$$\varepsilon_s = \frac{\|\mathbf{p}_s^{(\text{BEM})} - \mathbf{p}_s^{(\text{ana})}\|_2}{\|\mathbf{p}_s^{(\text{ana})}\|_2}. \quad (24)$$

A felső indexbe írt „BEM” és „ana” a peremelem és analitikus eredményeket jelöli. Hasonlóan számítható a kiértékelési pontokra is az ε_f relatív hiba.

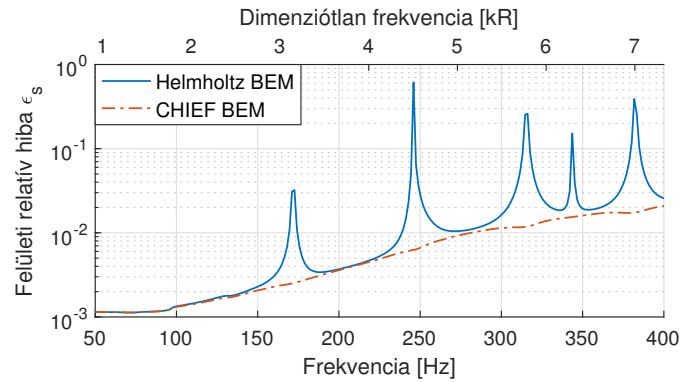
A peremelem-számítás eredményét a 6. ábra szemlélteti. Láthatjuk, hogy várakozásunknak megfelelően gömbi (monopólus) hangteret kapunk, a forrástól távolodva az amplitúdó csökken. A kiértékelési pontokra illesztett hálón jól megfigyelhetjük az egyes hullámfrontokat is.

5.2. Irreguláris frekvenciák és a CHIEF

A fenti számítást több frekvencián is elvégezve azt tapasztaljuk, hogy lesznek olyan frekvenciák, melyek szűk környezetében kiugróan magas relatív hibaértékeket kapunk, ahogy azt a 7. ábra „Helmholtz BEM” görbéje is



6. ábra. Transzparens gömből számított hanglesugárzás $f = 400$ Hz frekvencián. $\varepsilon_s = 2.82\%$, $\varepsilon_f = 2.91\%$.

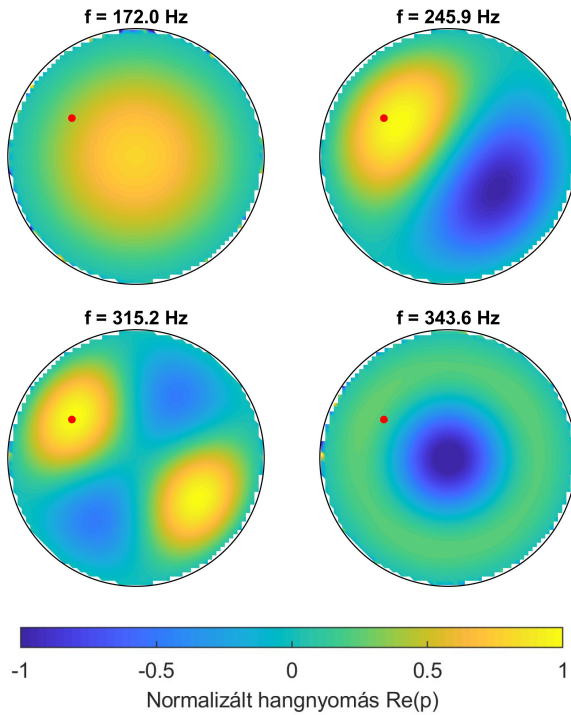


7. ábra. A felületi nyomás relatív hibája egységnyi sugarú transzparens gömb esetén, Neumann-peremfeltétellel.

szemlélteti. A jelenség okát megérthetjük a 8. ábra segítségével, ahol azt ábrázoltuk, hogy a gömböt elfelező síkban hogyan alakul a *beltéri* hangnyomás. Figyeljük meg, hogy a gömb belsejében állóhullámú hangteret alakul ki, melynél a felületen minden esetben zérus hangnyomást kapunk. Vagyis, a Γ perem által bezárt térfogatnak a $p(x) = 0$ ($x \in \Gamma$) peremfeltételt kielégítő módusalakjaihoz tartozó sajátfrekvenciái környékén kapunk nagy relatív hibát (akár $> 100\%$ -ot).⁸ Mivel ezek a frekvenciák a komplementer probléma sajátfrekvenciái, ezért az irreguláris frekvenciákat *fictitious eigenfrequency*-nek is szokás nevezni.

A CHIEF (*combined integral equation formalism*, [1]) módszer a (11) reprezentációt olyan \mathbf{x}_0 pontokra is alkalmazza, melyek nincsenek benne az Ω tartományban (sem a Γ peremen). Ezekben a pontokban a (12) értelmében zérus hangnyomást kell kapnunk. (A 8. ábrán pontosan azt látjuk, hogy ez az elvárás bizonyos frekvenciákon nem teljesült a számításunkban.) A (22) és (23) egyenletekhez hasonlóan a CHIEF-pontokra adódó diszkretizált egyenleteket a felületi egyenletekkel közösen felírva az alábbi

⁸Hasonlóan, ha a feladatot Dirichlet-peremfeltétellel (\mathbf{p}_s ismert) oldanánk meg, akkor a $q(x) = 0$ ($x \in \Gamma$) homogén Neumann-peremfeltételt kielégítő módusok okoznának hibákat.



8. ábra. Beltéri módusalakok megjelenése az irreguláris frekvenciákon. A virtuális forrás helyzetét a piros pötty jelzi.

mátrixegyenletet kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{P}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s \\ \mathbf{G}_c \end{bmatrix} \mathbf{q}_s - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_s \\ \mathbf{H}_c \end{bmatrix} \mathbf{p}_s, \quad (25)$$

ahol \mathbf{G}_c és \mathbf{H}_c a CHIEF-pontokba számító lesugárzási mátrixok. Vegyük észre, hogy a (25) túlhatározott egyenletrendszert alkot – az egyenletek száma $E + C$ (a CHIEF-pontok száma C), a változók száma pedig továbbra is E , – melyet a legkisebb négyzetek módszerével oldhatunk meg.

A 7. ábra „CHIEF BEM” görbéje mutatja a számítás elvégzésének eredményét a Γ peremen belül felvett CHIEF-pontok alkalmazásával és a kibővített (25) egyenletrendszer megoldásával. (Ebben az esetben a CHIEF-pontokat egy 1 m élhosszúságú kocka szabályosan, 0,25 m rászter-távolságban felvett pontjainak választottuk.) Láthatjuk, hogy a kiugró hibacsúcsok megszűntek, a relatív hiba várakozásunknak megfelelően lassan nő a frekvenciával, melynek oka, hogy a hullámhossz csökkenésével a háló relatív felbontása egyre csökken. A gyakorlatban a maximális frekvenciát, melyre egy adott hálóval számításokat végzünk úgy határozzuk meg, hogy a legnagyobb elem élhossza se legyen nagyobb hullámhossz $1/6$ -ánál.

Érdekes még megjegyezni, hogy az irreguláris frekvenciák problémája kizárólag kültéri számításoknál jelentkezik. Beltéri számításoknál, mivel a komplementer külső, végtelen térnek nincsenek módusai, irreguláris frekvenciákkal sem kell számolnunk.

6. A felkészülést segítő kérdések

1. Milyen hibafajták terhelhetik az akusztikai hullámegyenlet numerikus megoldását? Mikor nevezhetünk egy számítási esetet jól kondicionáltnak?

2. Add meg a Helmholtz-egyenlet szabadtéri Green-függvényének definícióját! Mi a szabadtéri Green-függvény fizikai jelentése? Melyek a fontos tulajdonságai?
3. Milyen lépésekkel állíthatjuk elő egy PDE gyenge alakját? Mire utal a „gyenge alak” elnevezés?
4. Milyen értékeket adhat az $\int_{\Omega} \delta(x - x_0) dx$ integrál az x_0 pont elhelyezkedésétől függően?
5. Hogyan értelmezzük a peremintegrál-reprezentáció fizikai jelentését? Milyen kontribúciók alkotják a teljes hangteret?
6. Mi a Sommerfeld-féle sugárzási feltétel fizikai jelentése?
7. Hogyan állnak elő a \mathbf{G}_s és \mathbf{H}_s rendszer-mátrixok G_{ij} illetve H_{ij} elemei?
8. Milyen tulajdonságokkal bírnak a peremelem-módszer \mathbf{G}_s és \mathbf{H}_s rendszer-mátrixai?
9. Foglald össze egy akusztikai peremelem-számítás tipikus lépéseit!
10. Mit értünk transzparens tesztp probléma alatt?
11. Mi okozza az irreguláris frekvenciák megjelenését kültéri BEM számítások esetén? Milyen módszerrel szüntethető meg az irreguláris frekvenciák hatása?

7. Mérési feladatok

A feladatok megoldásában segít a függelék, mely a felhasználandó szoftverek használatát mutatja be röviden.

7.1. Hangtér hengeres csőben

Elsőként egy hengeres, merev falú cső különböző gerjesztések mellett kialakuló hangterét elemezzük; azaz beltéri problémát vizsgálunk. Vizsgálatunkban a cső hossza $L = 1$ m, átmérője pedig $d = 0,2$ m.

1. Nyisd meg a Gmsh programban a hengeres cső geometriáját (`cylinder.geo` fájl), készítsd el a hálót és mentsd el „V2 ASCII” formátumban.
2. Töltsd be Matlabba a hálót és ellenőrizd az elemek felületi normálisait.
3. Készíts kiértékelő pontokat a cső belsejében, az x - y síkban! A pontokat úgy vedd fel, hogy egyenletes osztásközzel fedjék le a $[0, L] \times [-d/2, d/2]$ tartományt, de a *field point*-ok ne legyenek túl közel a peremhez. Ehhez használd a `mesh_create_slab` függvényt.
4. Válaszd ki a háló $x = 0$ síkba eső elemeit, és add meg a \mathbf{q}_s vektort úgy, hogy ezeken az elemeken q legyen egységnyi, a többi elemén pedig zérus.
5. Számítsd ki a cső felületén majd a kiértékelési pontokban a p nyomásteret. A vizsgálathoz válassz olyan frekvenciákat, amik a cső valamelyik longitudinális sajátfrekvenciájához közeliak ($kL = n\pi$). Ismételd meg a vizsgálatot a vágási frekvencia ($kr = 1.84$) felett is. Mit vársz a két esetben? Hasonlítsd össze a kapott eredményt a várttal! Mit tapasztalsz?

- Változtasd meg a gerjesztést (\mathbf{q}_s vektort) úgy, hogy az $x = 0$ síkba eső elemek közül csak ott legyen q nemzérus, ahol $y \leq 0$! Ismételd meg a szimulációt a vágási frekvencia felett! Hasonlítsd össze az előző eredménnyel és értékelj a megoldást!
- A beeső hangtér legyen egységnyi amplitúdójú, x irányú síkhullám, vagyis $p_{inc} = e^{-jkx}$. Számítsd ki a gömbfelületen a q_{inc} normális deriváltat, majd a (16) összefüggés alapján q_{scat} -ot. (Használd az `incident_field` függvényt a 'plane' opcióval.)

7.2. Hangszóró iránykarakterisztikája

Ebben a feladatrészben egy dobozba épített hangszóró iránykarakterisztikáját szimuláljuk, vagyis kültéri, lesugárzási problémát vizsgálunk.

- Nyisd meg a Gmsh programban a hangszóró geometriáját (`loudspeaker.geo` fájl), és az e paraméter megfelelő beállításával készíts kb. 3–5 ezer elemből álló felületi hálót, melyet `loudspeaker.msh` néven ments el.
- Töltsd be a Matlabba az elkészített hálót és a geometriai paramétereket, majd győződj meg róla, hogy a felületi normális vektorok konzisztens irányokban állnak.
- A `mesh_kmax` függvény segítségével számítsd ki, hogy mi a hálón megengedhető legnagyobb frekvencia, ha hullámhosszonként legalább 6 elemet szeretnénk.
- Definiálj kiértékelési pontokat az origó középpontú, 2 m sugarú vízszintes ($x-z$) és függőleges ($y-z$) síkú körvonalak 1° felosztású mintavételezésével.
- Add meg a peremfeltételt a hangszóró membránjának kiválasztásával! A teljes membránon a z -irányú rezgésyorsulás legyen 100 m/s^2 , a többi felületet pedig vedd tökéletesen merevnek. Ügyelj rá, hogy peremfeltételként a normális irányú rezgésyorsulást kell majd megadni, a normális pedig nem feltétlenül esik egybe a z iránnyal.
- $f = 1 \text{ kHz}$ frekvenciát és $c = 343 \text{ m/s}$ hangsebességet választva állítsd össze a rendszermátrixokat, majd oldd meg a felületi egyenletet. Ezután számítsd ki a lesugárzott hangnyomást a kiértékelési pontokban, majd ábrázold az iránykarakterisztikát a vízszintes síkban.
- Ismételd meg a számítást $f = 100 \text{ Hz}$ és $f = 2 \text{ kHz}$ frekvenciákon is, és dB SPL egységben ábrázold az iránykarakterisztikákat. Hasonlítsd össze a különböző frekvenciákon kapott vízszintes és függőleges iránykarakterisztikákat! Mit tapasztalsz? Értékelj az eredményt!

7.3. Visszaverődés merev gömbről

Ez a teszt eset egy következő, hangtérreprodukció tematikájú méréshez kapcsolódik, melyben merev gömbfelületbe ágyazott mikrofontömbbel végzünk méréseket. Itt a merev gömbfelületről szóródó hangteret vizsgáljuk, vagyis kültéri visszaverődési problémát oldunk meg.

- A `sphere.geo` geometriafájl alapján készíts hálót és töltsd be a Matlabba. A gömb köré, a $z = 0$ sík $[-3R, 3R] \times [-3R, 3R]$ tartományba végy fel kiértékelési pontokat (R a gömb sugara), a gömb belsejébe eső pontokat pedig hagyd el. (Ismét használhatod a `mesh_create_slab` függvényt.)

- A felületen kiszámított q_{scat} -ot Neumann-peremfeltételként alkalmazva számítsd ki először a felületen, majd a kiértékelési pontokban is a p_{scat} visszazórt hangnyomásteret. Végül, a (14) egyenlet alapján számítsd ki a p_{tot} hangnyomásteret a kiértékelési pontokban. Ábrázold $|p_{tot}|$ -ot a kiértékelési pontokban a `plot_mesh` függvény segítségével!
- Hasonlítsd össze a p_{scat} teret a kiértékelési pontokban az analitikus megoldással, melyet a `ana_sphere_scat` függvény ad meg! Értékelj ki az ε_f hibát a (24)-hez hasonlóan, különböző k hullámszámokon.

A. Geometriai háló készítése – Gmsh

2D és 3D hálók készítéséhez érdemes megismerni az ingyenes, nyílt forráskódú Gmsh programot [2]. A programban először egy geometriát kell definiálnunk, melyet megtehetünk a grafikus felhatalmazott felület segítségével, vagy közvetlenül szerkesztve a `.geo` kiterjesztésű szöveges fájlt. A feladatok során előre adott geometriákkal fogunk dolgozni, ennek ellenére hasznos megismerni a program működésének logikáját.

A geometria felépítésének logikája, hogy először pontokat definiálunk, melyeket egyenesekkel, körvonalakkal vagy parametrikus görbékkel összekötve 1D objektumokat kapunk. Ezek után a görbék felsorolásával zárt görbevonalat tudunk megadni, melyek sík vagy akár görbült felületeket definiálhatnak. Térfogati hálók készítéséhez pedig a zárt térfogatot határoló felületek felsorolásával tudunk zárt térrészeket megadni. (Nekünk utóbbira nem lesz szükségünk.)

A felületi háló elkészítéséhez a bal oldali fa szerkezetű menü „Modules” → „Mesh” → „2D” pontját választjuk. Érdemes a háló generálásakor bekapcsolni a napló konzolt (a `Ctrl+L` billentyűkombinációval), itt ugyanis hasznos információt kapunk az elkészített hálóról, látjuk például az elemek számát.

A háló ábrázolásakor a felső menü „Tools” → „Options” ablakát megnyitva a „Mesh”-re kattintva beállíthatjuk a háló ábrázolásának módját. Hasznos pl. a „2D element faces” opció bekapcsolása. A megjelenítőablakban a bal egérgomb nyomva tartásával és az egér mozgatásával forgathatjuk a nézetet, a jobb gombot lenyomva tartva mozoghatunk a térben, a görgővel pedig nagyítani és kicsinyíteni lehet.

A Gmsh program nagy előnye, hogy a geometria és a háló definiálásához paramétereket is megadhatunk. Paraméter lehet például egy hangszóró membránjának a sugara, vagy éppen a háló jellemző elemmérete is. A `.geo` fájlban definiált paraméterek a grafikus felületen a fa menü „Parameters” pontja alatt jelennek meg. Bármely paraméter megváltoztatása után a háló a fenti módon újra generálható.

Az elkészített hálót a felső menü „File” → „Export” pontjának választásával tudjuk elmenteni. A `.msh` kiterjesztésű fájl a háló geometriáját és a kiértékelési pontokat tartalmazza.

jesztés kiválasztása után a „Version 2 ASCII” formátumot válasszuk, ezt a formátumot tudja feldolgozni a rendelkezésre álló Matlabos akusztikai BEM implementáció.

B. Matlab BEM segédlet

Ez a függelék a méréshez előkészített, akusztikai peremelem-számításokat támogató Matlab toolbox használatát mutatja be röviden.

B.1. Háló betöltése, ellenőrzése

A Gmsh program által készített, v2 ASCII formátumú hálót a `file.msh` nevű fájlból a

```
mesh = gmsh_import_mesh('file.msh');
```

módon tudjuk betölteni. Ennek hatására a `mesh` egy struktúra lesz, melynek `nodes` mezője a háló csomópontjainak fizikai koordinátáit adja meg ($N \times 3$ típusú mátrix), `elements` mezője pedig a háromszögeket alkotó csomópontok indexeit írja le ($E \times 3$ típusú mátrix).

Hasznos lehet még a Gmsh háló geometriai paramétereinek betöltése:

```
params = gmsh_import_params('file.geo');
```

Ezután a `params` struktúra az összes, a `.geo` fájlban megadott paramétert tartalmazni fogja.

A háló ellenőrzéséhez érdemes megjeleníteni a betöltött geometriát:

```
plot_mesh(mesh);
```

A számítás során fontos, hogy a felület háromszögelemek normális iránya egymással kompatibilis módon legyen megadva, vagyis az összes normális vagy az Ω tartomány belseje felé, vagy abból kifelé mutasson. A felületi normálisok megjelenítése:

```
plot_elem_normals(mesh);
```

A megjelenő ábrán a geometria körbefordításával vizuálisan ellenőrizhető, hogy minden normális a megfelelő irányba néz-e. Ha egy adott felületrészen a normálisok fordított irányításúak, úgy az adott felületrész irányítását érdemes a `.geo` fájlban megfordítani a határoló élek felsorolási sorrendjének megfordításával.

B.2. Háló manipulálása

A peremfeltételek megadásához hasznos lehet a háló bizonyos feltételeket teljesítő elemeinek kiválasztása, melyet a `mesh_select` függvény támogat. Például a

```
[ni, ei] = mesh_select(mesh, ...  
    'abs(z) < 1e-3', 'all');
```

hívás a `mesh` hálóból azokat a csomópontokat és elemeket (a visszaadott `ni` és `ei` indexvektorok) választja ki, melyek z koordinátájára teljesül, hogy $|z| < 10^{-3}$. Az utolsó `'all'` paraméterrel azokat az elemeket választjuk ki, melyek mindegyik csomópontjára teljesül a megadott feltétel.

Ezután pl. a kiválasztott elemeken egységnyi sebességet adhatunk meg:

```
ne = size(mesh.elements, 1);  
v = zeros(ne, 1);  
v(ei) = 1;
```

Az első sor a háló elemszámát határozza meg, utána megfelelő méretű null oszlopvektort állítunk elő, végül pedig a kiválasztott indexekre az 1 értéket írjuk.

B.3. Mátrixok összeállítása, megoldás

A G_s és H_s mátrixokat a k hullámszámon a

```
[Gs, Hs] = bem_matrices(k, mesh);
```

hívással állíthatjuk össze. Hasonlóan, ha a kiértékelési pontok koordinátáit az x_f $F \times 3$ típusú mátrixban adjuk meg, úgy G_f és H_f mátrixokat a

```
[Gf, Hf] = bem_matrices(k, mesh, xf);
```

módon kapjuk.

Ha a q_s a felületen a q_s $E \times 1$ oszlopvektorban adott, akkor a p_s oszlopvektort a (22) egyenlet

```
ps = (Hs + 0.5*eye(size(Hs))) \ (Gs*qs);
```

módú megoldásával kapjuk. (Itt az `eye` függvény a megfelelő méretű $E \times E$ típusú I egységmátrixot állítja elő.)

A kiszámított nyomástér ábrázolható például a

```
plot_mesh(mesh, real(ps));
```

függvényhívással.

B.4. Egyéb függvények

Minden függvény a toolbox `source` mappájában található. A függvények elnevezése a következő konvenciót követi: a `bem_` kezdetűek a peremelem-számítás legfelső szintű függvényei, az `elem_` kezdetűek az egyes elemeken képesek segédmenyiségeket kiszámítani, a `mesh_` sel kezdődőek pedig a háló módosítására, a háló felett kiértékelhető mennyiségek kiszámítására használhatóak.

Az egyes függvények használatáról a `doc` vagy `help` parancsokkal tudhatunk meg többet, pl.:

```
doc bem_matrices
```

Hivatkozások

- [1] H. A. Schenck. „Improved integral formulation for acoustic radiation problems”. *Journal of the Acoustical Society of America* 44.1 (1968), 41–58. old. DOI: 10.1121/1.1911085.
- [2] Ch. Geuzaine és J.-F. Remacle. *Gmsh: A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*. Utoljára látogatva: 2024. április 11. URL: <https://gmsh.info/>.